PHYSIKALISCHES PRAKTIKUM

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

PHYSIKALISCHES PRAKTIKUM

DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

A. G. BELJANKIN · E. S. TSCHETWERIKOWA · I. A. JAKOWLEW

PHYSIKALISCHES PRAKTIKUM

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK
HERAUSGEGEBEN VON FRANZ X. EDER UND ROBERT ROMPE
BAND 19

Physikalisches Praktikum

von

A. G. Beljankin, E. S. Tschetwerikowa, I. A. Jakowlew

unter der Redaktion von

W. I. Iweronowa

1957

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

BERLIN

ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ
ПОД РЕДАКЦИЕЙ ПРОФ. В. И. ИВЕРОНОВОЙ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ, МОСКВА 1955

Die Übersetzung und Bearbeitung lag in den Händen von Dipl.-Phys. Georg Schultz

Die deutsche Ausgabe wurde von den Verfassern freundlicherweise autorisiert

Verantwortlicher Verlagsredakteur: I. Scholz

Printed in Germany
Lizenz-Nr. 206 · 435/46/56
Satz und Druck: (III/18/203) VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig

Vorwort zur zweiten sowjetischen Auflage

Die zweite Auflage des Buches „Physikalisches Praktikum" stellt in allen seinen Teilen (außer dem der Elektrizität) eine fast vollkommene Wiederholung der ersten Auflage dar.

Im Teil der Elektrizität wurden die Anleitungen der Versuche 53, 54, 61 und 63 neu geschrieben, die Anleitung des Versuches 60 wesentlich umgearbeitet, die Versuche 46, 59, 64 und einige andere erweitert. In den Anleitungen der Versuche 53 und 54 ist die Theorie der Messungen mit der Wechselstrombrücke mit Hilfe der Methode des komplexen Widerstandes dargestellt und der physikalische Sinn der mit ihrer Hilfe erhaltenen Resultate diskutiert. Ebenso wurden die Probleme der eigenen und erzwungenen Schwingungen und die Erscheinung der Resonanz in elektrischen Schwingungskreisen strenger und konsequenter als in der vorhergehenden Auflage dargestellt (Aufgabe 60 bis 63). Dadurch war es möglich, auch die methodischen Hinweise für die praktische Durchführung der Versuche zu verbessern. In diesen Fällen wurden in die 2. Auflage neue oder zweckmäßigere Versuche aufgenommen, ohne wesentliche Änderungen an der benutzten Schaltung oder der Apparatur anzubringen (Aufgabe 46, 59).

Es muß darauf hingewiesen werden, daß in einigen Aufgaben (z. B. in den Aufgaben 44, 50, 58, 59) nicht alle beschriebenen Versuche an einem Tage (4 akademische Stunden) von den Studenten ausgeführt werden können. Trotzdem hielten wir es für zweckmäßig, alle von den Studenten der physikalischen Fakultät der MSU (Moskauer Staatsuniversität) verlangten Übungen zu beschreiben. Die Aufgabe des Praktikumleiters besteht darin, jedem Studenten zu zeigen, welche Übungen gerade für ihn am zweckmäßigsten sind.

In letzter Zeit ist das Praktikum der physikalischen Fakultät um eine Reihe neuer experimenteller Aufgaben bereichert worden. Wir hielten es jedoch nicht für zweckmäßig, ihre Beschreibung in die zweite Auflage dieses Buches aufzunehmen, da die Experimente in der Praxis noch nicht genügend erprobt worden sind.

Wir ergreifen hier die Gelegenheit, unseren Dank allen Personen auszusprechen, die zu dem Inhalt der ersten Auflage des Buches kritische Bemerkungen gemacht haben und besonders A. S. Anikejew, der viel Mühe darauf verwendet hat, die Herausgabe beider Auflagen dieses Buches vorzubereiten.

10. März 1953 W. I. Iweronowa

Vorwort zur ersten sowjetischen Auflage

Die experimentelle physikalische Ausbildung der Studenten der physikalischen, mechanisch-mathematischen, chemischen und anderer naturwissenschaftlicher Fakultäten der Moskauer Staatsuniversität — LOMONOSSOW-Universität — erfolgte im Laufe der ersten zwei Studienjahre in den Laboratorien des allgemeinen physikalischen Praktikums. Das vorliegende Buch soll den Studenten, die die experimentellen Aufgaben dieses allgemeinen physikalischen Praktikums durchzuführen haben, als Leitfaden dienen. Ebenso ist es für Studenten bestimmt, die eine experimentelle Ausbildung in Laboratorien physikalischer und physikalisch-mathematischer Fakultäten anderer Universitäten und physikalischer Institute erfahren.

Die Moskauer Universität gibt nicht das erste Mal einen solchen Leitfaden heraus. Im Jahre 1909 wurde von Professor A. P. SOKOLOW, dem Begründer des physikalischen Praktikums in der jetzigen Form, und seinen Mitarbeitern der erste Leitfaden dieser Art zusammengestellt und herausgegeben. Er war vom wissenschaftlichen Standpunkt jener Zeit geschrieben und auf die Forderungen zugeschnitten, die an die Ausbildung der Studenten vor vierzig Jahren gestellt wurden.

Später änderte sich der Charakter des Praktikums mit der Entwicklung der Physik selbst, der Meßtechnik, der Änderung des wissenschaftlichen Aufgabenbereiches und der breiten Entwicklung des inländischen Apparatebaus.

Im Jahre 1926 wurde von Professor A. P. SOKOLOW und K. P. JAKOWLEW ein neuer Leitfaden herausgegeben, der die Entwicklung des physikalischen Praktikums in den ersten Jahren nach der Großen Sozialistischen Oktoberrevolution berücksichtigte. An der Erneuerung des Praktikums nahm das gesamte Kollektiv seiner Mitarbeiter teil. Im Vorwort zur zweiten Auflage des Leitfadens danken die Autoren für die Mitarbeit an der Herausgabe des Buches: W. I. BARANOW, A. S. PREDWODITELEW, S. N. RSHEWKIN, J. P. SIMANOW, I. I. WASSILJEW, S. I. WAWILOW, A. P. WELITSCHKOWSKAJA und B. A. WWEDENSKI.

Im Jahre 1937 ergab sich die Notwendigkeit einer weiteren Verbesserung des Leitfadens. Er wurde von W. G. KORIZKI, E. S. STSCHEPOTJEWA und E. S. TSCHETWERIKOWA wesentlich erweitert und umgearbeitet. In diesen Leitfaden wurden die Beschreibungen aller im Praktikum neu aufgebauten Versuche aufgenommen und die veralteten und die abgebauten Versuche weggelassen. Geändert wurde auch die Beschreibung einiger Aufgaben, deren experimenteller Teil keiner Änderung bedurfte. An der Aufstellung neuer Praktikumsversuche haben in jener Zeit, außer den an der unmittel-

baren Herausgabe des Buches Beteiligten, W. I. BLINOW, N. S. CHLEBNIKOW, I. A. JAKOWLEW, M. I. KWASSOW, M. A. LEONTOWITSCH und L. N. LOSCHAKOW beigetragen. Sie stellten die Versuchsbeschreibungen für den Druck des Leitfadens zur Verfügung.

In den 14 Jahren, die seit der letzten Herausgabe des Leitfadens vergangen sind, hat das Laboratorium seine Ausrüstung erneut verbessert, und es werden an die im physikalischen Praktikum arbeitenden Studenten höhere Anforderungen gestellt. Die besonders in den Nachkriegsjahren erfolgende Neuausrüstung der Laboratorien ist eng mit der stürmischen Entwicklung unserer inländischen Produktion von wissenschaftlichen Instrumenten verbunden. Auf Grund der der physikalischen Fakultät bewilligten Neueinstellung von Mitarbeitern für den Lehrstuhl der allgemeinen Physik, des physikalischen Praktikums und einer Reihe von Mitarbeitern für andere Lehrstühle konnte das Praktikum wesentlich erweitert und erneuert werden.

Dieses Buch wird am Vorabend des Umzuges der Moskauer Universität in das neue Gebäude veröffentlicht. In dem neuen Gebäude erhält das physikalische Praktikum neue außerordentliche Möglichkeiten für die weitere Vervollkommnung.

Der Inhalt des vorliegenden Buches ist das Ergebnis der vieljährigen Arbeit eines Kollektivs der physikalischen Fakultät. Das Buch ist unter Beachtung des jetzigen Standes des Praktikums und der Studienpläne für die Ausbildung der Studenten der physikalischen Fakultät in Experimentalphysik geschrieben worden. Das Programm wurde 1950 aufgestellt.

Wir wollen kurz anführen, wodurch sich der vorliegende Leitfaden von dem im Jahre 1937 gedruckten unterscheidet.

Vor allen Dingen enthält das Buch die neuen nach 1937 in das Praktikum aufgenommenen Versuche. Ein großer Teil dieser Versuche gehört dem elektrischen Praktikum an, das durch neuzeitliche Geräte bereichert worden ist. Außerdem wurden die Beschreibungen aller verbesserten und einer Reihe alter Aufgaben teilweise erneuert, um sie dem modernen technischen Stand und den geänderten Anforderungen an die Art der Beschreibung der Versuche anzupassen.

Die Änderungen der Versuche sind nach folgenden Gesichtspunkten vorgenommen worden:

1. Die Aufmerksamkeit ist auf eine möglichst klare Stellung des physikalischen Problems selbst gerichtet worden, das in der Aufgabe bearbeitet werden soll.
2. Wenn irgend möglich, wurde eine Gegenüberstellung der benutzten Methoden zur Messung der physikalischen Größen mit anderen Methoden zur Messung der gleichen Größen aufgeführt und die Unzulänglichkeit der im Praktikum benutzten Methoden diskutiert. Diese Gegenüberstellung kann dazu dienen, den experimentellen Horizont der Studenten zu erweitern.
3. Es wurde der Teil verkürzt, der die rezeptartige Anleitung für das Arbeiten im Laboratorium enthält. Statt dessen wurde die Aufmerksamkeit mehr auf das Wesen der Arbeit gelenkt, um bei den Studenten größeres Interesse für das Experimentieren zu erwecken.

Die Aufstellung neuer Aufgaben im Praktikum, und in den meisten Fällen auch die erste Variante ihrer Beschreibung, wurden von folgenden Mitarbeitern der physikalischen Fakultät durchgeführt: A. G. BELJANKIN, M. W. DECHTJAR, L. M. IWANZOW, I. A. JAKOWLEW, W. P. IONOW, N. A. PENIN, A. I. PILSTSCHIKOW, A. A. SAMARSKI, O. I. SAMSCHA, W. I. SCHESTAKOW, E. G. SCHWIDKOWSKI, N. N. SOBOLEW, C. P. STRELKOW, W. G. SUBOW, E. S. TSCHETWERIKOWA, E. N. WOLKOWA.

Bei der Aufstellung neuer Aufgaben hatten ebenso nachstehende Studenten der physikalischen Fakultät Anteil: N. GORJUNOW, A. GURWITSCH, M. HERZENSTEIN, J. LOGATSCHOW, W. JUGOW, A. JUNIZKI, I. KANEWSKI, W. KAFTANOW, L. LEPJESCHKIN, W. MAGDEW, B. NEUPOKOJEW, N. PACHOMOWA, N. RUSSANOWA, S. RUSSAKOW, G. SCHIPULLO, A. SIDOROW u. a.

Alle das Buch betreffenden Bemerkungen bitten wir an den Lehrstuhl für Experimentalphysik der physikalischen Fakultät der Moskauer Staatsuniversität zu richten.

20. Juni 1951 W. I. IWERONOWA

INHALT

Erster Teil

Mechanik

Zweiter Teil

Molekularphysik

Dritter Teil

Elektrizität

Vierter Teil

Optik

Tabellen

I. Tabellen physikalischer Größen

II. Tabellen zur Auswertung

EINLEITUNG

Die Physik, einer der wichtigsten Zweige der Naturwissenschaften, ist eine Erfahrungswissenschaft.

Der erste Schritt für die Auffindung von Gesetzmäßigkeiten der physikalischen Erscheinungen ist das *Beobachten*. Eine wissenschaftliche Beobachtung stellt jedoch keine auch nur annähernd einfache Aufgabe dar. Zur Klärung der Gesetzmäßigkeiten irgendeiner physikalischen Erscheinung muß man ihre wichtigsten Elemente aussondern und die Bedingungen, unter denen die Erscheinung abläuft, nach Möglichkeit variieren, d. h., man muß von der einfachen Beobachtung *zum Experiment* übergehen. Deshalb ist es äußerst wichtig, charakteristische Größen der Erscheinung aufzufinden, die der Messung zugänglich sind. Es muß festgelegt werden, wie und mit Hilfe welcher Vorrichtungen wir diese oder jene Größen messen und quantitative Aussagen gewinnen können. Die Aufstellung quantitativer Gesetze, aus denen hervorgeht, wie eine der zu messenden Größen sich bei Variation einer anderen verändert, ist eine der wichtigsten Aufgaben. Aus dem Dargelegten geht klar hervor, welche Bedeutung das Experiment in der Physik besitzt.

Die stürmische und außerordentlich fruchtbringende Entwicklung der Physik von dem Moment an, wo das Experiment in den Prozeß wissenschaftlichen Schaffens eingeführt wurde, rief in den Reihen der Gelehrten eine Begeisterung für den reinen, die Rolle der Theorie völlig verneinenden Empirismus hervor.

M. W. Lomonossow, ein großer Gelehrter des 18. Jahrhunderts, erkannte, daß ein solcher Standpunkt unrichtig und *die Vereinigung der Theorie mit dem Experiment* unumgänglich sei. In der „Abhandlung über die große Genauigkeit von Seewegen“ unterstreicht Lomonossow diese Situation. „Aus den Beobachtungen eine Theorie aufzustellen, und über die Theorie die Beobachtung zu verbessern, ist die beste Methode, die Wahrheit zu ergründen.“ Da sich in jener Zeit die Tendenz, „keine Hypothese aufzustellen“, stark verbreitet hatte, schreibt Lomonossow, der die Methode der Hypothesen vertritt, sich aber von „dem sich in einem Kopf bildenden Hirngespinst und leerem Geschwätz“ distanziert, daß man wahrhaft wissenschaftliche „Überlegungen nur auf Grund von zuverlässigen und mehrmals wiederholten Versuchen“ anstellen kann.

Der dialektische Materialismus betrachtet das *Experiment* lediglich als einen notwendigen *Teil des gesamten Prozesses der wissenschaftlichen Erkenntnis*. Diesen Prozeß kann man sich schematisch aus drei Hauptteilen bestehend vorstellen:

1. *Die Wahrnehmung*, d. h. die primäre Untersuchung der zu erforschenden Erscheinung durch Beobachtungen.

2. *Die Verallgemeinerung*, d. h. die Aufstellung einer Hypothese, die die einzelnen Resultate der Beobachtungen untereinander und mit den früher bekannten Tatsachen verbindet und bestimmte in der Physik hauptsächlich quantitative Beziehungen zwischen ihnen festsetzt. Dabei werden alle Nebenumstände nach Möglichkeit vollständig beseitigt, um das Wesentlichste der untersuchten Erscheinung herauszuschälen.

In diesem Verallgemeinerungsprozeß werden oft zusätzliche Angaben benötigt, die man durch neue Beobachtungen oder durch speziell dafür angestellte Experimente erhält.

3. *Die Überprüfung des Wahrheitsgehaltes der Hypothese durch die Praxis* oder durch den Versuch unter realen Bedingungen, d. h. unter Berücksichtigung aller früher vernachlässigten Größen zweiter Ordnung. Im Falle eines positiven Ergebnisses erhebt diese Prüfung die Hypothese in den Rang einer Theorie und die durch sie festgesetzten Korrelationen in den Rang von Gesetzen.

W. I. Lenin schreibt: „. . . Für einen Materialisten beweist der ‚Erfolg' der menschlichen Praxis die Übereinstimmung unserer Vorstellungen mit der objektiven Natur der von uns wahrgenommenen Dinge . . ."[1])

Man darf aber nicht annehmen, daß mit der Überprüfung der Hypothese durch das Experiment der Prozeß der wissenschaftlichen Erkenntnis einer bestimmten Erscheinung beendet ist. Nach Ablauf einiger Zeit führen neue Beobachtungen und neue Versuche zu Widersprüchen mit der Theorie, die vor diesen Entdeckungen aufgestellt worden war. Sie veranlassen uns, sämtliche Tatsachen von dem neuen Standpunkt aus zu überprüfen. Dann entsteht eine neue, der Entwicklungsstufe der Wissenschaft entsprechende vollständigere Theorie, die mit der Zeit durch eine noch vollständigere abgelöst wird, usw. Der Erkenntnisprozeß setzt sich unbegrenzt fort.

Lenin schreibt: „. . . Jede Stufe für die Entwicklung der Wissenschaft fügt dieser Summe der absoluten Wahrheit neue Körnchen hinzu; aber die Grenzen der Wahrheit jedes wissenschaftlichen Satzes sind relativ und werden durch die weitere Entwicklung des Wissens entweder weiter oder enger gezogen . . ."[2])

Daraus ist ersichtlich, daß, obwohl das Experiment durchaus nicht als das einzige Mittel der wissenschaftlichen Forschung erscheint, seine Rolle, besonders als Quelle und Kriterium der Wahrheit, entscheidend ist. Deshalb ist es klar, daß der Experimentator, *der diesen oder jenen Versuch durchführt, eine große Verantwortung trägt, weil von seinen Ergebnissen nicht nur das Schicksal der entsprechenden Theorie, sondern auch, wie es mehrmals in der Geschichte der Physik vorgekommen ist, die Richtung abhängt, in der sich die Wissenschaft für einen mehr oder weniger langen Zeitraum entwickelt.* Diese Verantwortung bezieht sich nicht nur auf die Richtigkeit der erhaltenen Er-

---

[1]) W. I. Lenin, Materialismus und Empiriokritizismus, Dietz Verlag, Berlin 1949, S. 128.

[2]) W. I. Lenin, l. c., S. 124.

gebnisse, sondern auch, was besonders wichtig ist, auf die Versuchsausführung selbst.

Das Experiment muß so durchgeführt werden, daß es weder Fehler noch mehrdeutige Auslegungen der Ergebnisse zuläßt.

Somit haben wir die Rolle des physikalischen Experimentes erkannt. Es ist eines der Mittel, um zu wissenschaftlichen Erkenntnissen zu gelangen. Jedoch ist damit seine Anwendung in der menschlichen Praxis in keiner Weise erschöpft.

Wir haben schon darauf hingewiesen, daß die Entwicklung der Physik vollständig durch die Entwicklung der Technik bestimmt wird. Umgekehrt ist aber auch die Entwicklung der Technik ihrerseits nur auf der Basis der sich entwickelnden exakten Wissenschaften und damit auch der Physik möglich.

„... Jedes wissenschaftliche Ergebnis, auch wenn es nur zum Teil richtig ist, kann und muß eine praktische Anwendung finden ..."[1]) schreibt S. I. Wawilow.

Tatsächlich ist eine ganze Reihe von technischen Zweigen nur als Ergebnis der Entwicklung verschiedener Gebiete der Physik entstanden. Als Beispiel dafür kann man die gesamte Elektrotechnik ansehen, die um die Mitte des 19. Jahrhunderts den wichtigen physikalischen Entdeckungen auf dem Gebiet der Elektrizität buchstäblich auf dem Fuße folgte. In diesem Prozeß des Vordringens der Physik in die Technik spielt das physikalische Experiment auch eine außerordentlich wichtige Rolle. Bevor die durch die Physik erforschten Erscheinungen in der Praxis zur Anwendung kommen, müssen sie unter den konkreten, später vorliegenden Bedingungen geprüft werden, um die möglichen Einflüsse der im allgemeinen vielzähligen Nebenfaktoren abschätzen zu können. Zu dieser Überprüfung benutzt man in den meisten Fällen die Hilfe des entsprechenden physikalischen Experimentes.

Außerdem sind für die Technik alle möglichen physikalischen Konstanten von großer Bedeutung, die die verschiedenen Eigenschaften der Stoffe charakterisieren. Die Bestimmung der Konstanten durch Berechnung ist nicht immer möglich oder aber unwirtschaftlich, schon wenn man allein die aufgewendete Zeit betrachtet. Deshalb werden in den allermeisten Fällen diese Konstanten durch Messung mit Hilfe entsprechender physikalischer Experimente gefunden.

Endlich muß noch bemerkt werden, daß das physikalische Experiment als Hilfsmittel für die Erforschung der Naturwissenschaften, die zu den Grenzgebieten der Physik zählen — besonders für die Mechanik, Chemie, Biologie usw. —, große Bedeutung erlangt hat.

Über die Messungen im allgemeinen. Für den Anfänger hat das praktische physikalische Arbeiten zweierlei Bedeutung: Dem Praktikanten wird erstens die Möglichkeit gegeben, die wichtigsten Geräte und die hauptsächlichsten Methoden kennenzulernen, mit denen genaue physikalische Messungen durch-

[1]) S. I. Wawilow: „Die Wissenschaft der Stalin-Epoche." (С. И. Вавилов: „Наука сталинской эпохи". Издательство АН СССР Москва 1950.)

geführt werden können, und zweitens, sich eingehender mit einigen Erscheinungen und Gesetzen der Natur zu befassen, zu deren Verständnis die Demonstrationsversuche der Physikvorlesung allein im allgemeinen nicht ausreichend sind. Obwohl hier in erster Linie nicht die Durchführung der Messung wichtig ist, sondern das Studium der Erscheinung selbst, tragen auch diese Versuche den Charakter von Messungen. Zu dieser Art von Aufgaben kann man z. B. die Untersuchung der Fallgesetze der Körper an der ATWOODschen Fallmaschine, der Polarisationserscheinungen des Lichtes, die spektralanalytischen Übungen und anderes zählen.

Eine Größe messen heißt feststellen, wie oft sie eine festgelegte Einheit der gleichen Art enthält. Direkte Messungen einer gegebenen Größe werden im allgemeinen selten durchgeführt. Ein Beispiel hierfür ist die Messung von Längen mit Maßstäben oder von Maßen mit Gewichten. In den meisten Fällen wird nicht die gesuchte Größe unmittelbar gemessen, sondern einige andere Größen, die mit ihr durch bekannte Beziehungen verknüpft sind. Die Beziehungen sind durch die Gesetze der beobachteten Erscheinungen bestimmt, und die gesuchte Größe wird aus den Resultaten der direkt gemessenen Größen berechnet. Diese Größen gehen in die Formeln ein, die das Gesetz der Erscheinung oder die Beziehung zwischen der gemessenen und der gesuchten Größe ausdrücken. Zum Beispiel wird die Erdbeschleunigung aus der Länge und der Schwingungsdauer eines Pendels auf Grund einer bekannten Formel des Pendels errechnet, die latente Wärme eines Dampfes wird durch die Erhöhung der Temperatur einer abgewogenen Wassermenge bestimmt, in der eine gewisse Menge dieses Dampfes kondensiert wird usw. Deshalb erfordert die Messung einer gesuchten Größe gewöhnlich die direkte Messung einiger Hilfsgrößen, die zusammen mit der gesuchten Größe die zu beobachtende physikalische Erscheinung charakterisieren. In solchen Fällen müssen die notwendigen Messungen in einer bestimmten Reihenfolge vorgenommen werden. Auf diese Reihenfolge wird in dem vorliegenden Buch hingewiesen.

In den meisten Fällen wird eine physikalische Messung in drei aufeinanderfolgenden Schritten durchgeführt: Aufbau der Apparaturen, Beobachtung und Ablesen der Meßwerte.

Der Aufbau der Apparaturen erfordert deren richtige Anordnung zueinander, wobei man verschiedene innere und äußere Einflüsse und die Meßbedingungen beachten muß. Zum Beispiel ist es oft erforderlich, die Apparate so aufzustellen, daß eine ihrer Richtungen vertikal oder eine bestimmte Fläche horizontal steht, oder es müssen mehrere Geräte einer elektrischen Schaltung die richtige Reihenfolge besitzen usw. Bei der Aufstellung der Apparaturen ist es notwendig, die Beeinflussung der Geräte durch verschiedene äußere Faktoren, wie die Temperatur, den Druck usw., festzustellen. Wenn ihr Einfluß sich als bedeutend erweist, muß er entweder beseitigt oder aber bei der Messung beachtet werden.

Im letzteren Falle gibt man die zu beobachtenden Größen unter bestimmten äußeren Bedingungen an, z. B. bei einer Temperatur von 0° C, bei normalem Atmosphärendruck oder Vakuum usw. Um diese Angaben machen zu können, muß man bei der Lösung der Aufgabe die äußeren Bedingungen kennen, unter

denen die Messungen durchgeführt werden, sonst verlieren die Messungen ihre Bedeutung. Es ist sehr häufig notwendig, die Temperatur und den barometrischen Druck zu bestimmen, die während der Durchführung der Messung herrschen.

Der zweite Schritt ist die Beobachtung, die ihrem Charakter nach sehr verschiedenartig sein kann. Man muß beispielsweise manchmal den Moment des Verschwindens irgendeiner physikalischen Erscheinung bestimmen, wie des elektrischen Stromes in einem Kreis, des Hörens eines Tones usw., oder es ist erforderlich, die Erreichung des Temperaturmaximums irgendeines Systems festzustellen, oder die Entfernung einzustellen, bei der zwei Halbfelder eines Photometers die gleiche Leuchtdichte besitzen, oder es sind zwei Punkte oder Striche möglichst vollkommen zur Deckung zu bringen usw.

Wenn das erreicht ist, erfolgt die Ablesung einer Länge oder eines Winkels, meistens an linear oder im Bogenmaß geteilten Skalen. Aus den Ergebnissen der Ablesungen wird endlich die zu messende Größe bestimmt.

Über die Fehler der Messungen. Da die von uns benutzten Meßgeräte und unsere Empfindungsorgane unvollkommen sind, kann man alle Messungen nur mit einem ganz bestimmten Genauigkeitsgrad durchführen. Deshalb ergeben die Resultate der Messungen nicht den wahren Wert der zu messenden Größe, sondern nur einen angenäherten Wert. Wenn beispielsweise das Gewicht eines Körpers mit einer Genauigkeit bis zu 0,1 mg bestimmt ist, so bedeutet dies, daß das gefundene Gewicht sich von dem wahren Gewicht des Körpers um weniger als 0,1 mg unterscheidet.

Die Genauigkeit der Messung wird durch den Bruchteil der Maßeinheit bestimmt, bis zu welchem man, von der Richtigkeit des Ergebnisses überzeugt, eine Messung durchführen kann. Die Genauigkeit der Messungen hängt von den bei den Messungen benutzten Geräten und den allgemeinen Meßmethoden ab. Es würde eine vollkommen nutzlose Zeitverschwendung sein, wollte man bei den Messungen unter gegebenen Bedingungen die dadurch festgelegten Grenzen der Genauigkeit überschreiten. Im allgemeinen muß man sich mit einer Genauigkeit von 0,1% der zu messenden Größe zufrieden geben. In einigen Fällen kann man eine wesentlich höhere Genauigkeit erreichen. Wägt man z. B. mit einer guten Waage einen Körper von etwa 200 g, so kann man unschwer eine Genauigkeit bis zu 0,1 mg, d.h. eine Genauigkeit von 0,00005 %, erreichen. In anderen Fällen ist eine Genauigkeit von 0,1% fast unerreichbar — z. B. bei den meisten Messungen der Temperatur und ihrer Änderung mit Hilfe von Thermometern. Die gewöhnlichen Thermometer kann man nur auf 0,1°, manche auf 0,05° genau ablesen. Wenn daher die zu messende Temperaturänderung ungefähr 5° beträgt, wird der Genauigkeitsgrad von 1 bis 2 % der zu messenden Größe nicht überschritten.

Hieraus folgt, daß es notwendig ist, die Grenzen der Genauigkeit überschlagsmäßig zu bestimmen, die man mit den gegebenen Geräten erreichen kann, bevor man die Messung vornimmt. Das erreicht man durch eine aufmerksame Untersuchung der Geräte, durch die Bestimmung der Genauigkeit jedes einzelnen von ihnen und der gesamten Genauigkeit der angewendeten Meßmethode. Wenn man bei einer Aufgabe mehrere Größen

messen muß und es ergeben sich für jede der Größen verschiedene Genauigkeitsgrenzen, so ist es sinnlos, bei einzelnen Messungen weit über die Genauigkeitsgrenzen der am ungenauesten bestimmbaren Größe hinauszugehen. Man könnte bei kalorimetrischen Messungen die Bestimmung der Wassermenge und des Gewichtes des Kalorimeters durch Wägung, wie schon gesagt, auf 0,0001% genau durchführen. Es liegt im gegebenen Fall jedoch kein Grund für eine so genaue Wägung vor, und man kann sich dabei mit weniger genauen Waagen begnügen, die eine Genauigkeit von 0,1% besitzen, da die Temperaturänderung des Kalorimeters, wie bereits erwähnt, nur auf $1 \cdots 2\%$ genau gemessen werden kann.

Um die Genauigkeit des Endergebnisses zu erhöhen, ist es notwendig, jede physikalische Messung nicht einmal, sondern mehrmals unter den gleichen Versuchsbedingungen auszuführen. Es wurde schon gesagt, daß wir bei Messungen und Ablesungen mehr oder weniger bedeutende Fehler begehen. Diese Fehler entstehen aus zwei Gründen und werden deshalb in zwei Gruppen eingeteilt: Systematische Fehler und zufällige Fehler. Systematische Fehler entstehen durch die Unvollkommenheit unserer Meßgeräte, die Unrichtigkeit der Meßmethode selbst oder irgendeine Unachtsamkeit von seiten des Beobachters. Es versteht sich von selbst, daß die Vergrößerung der Anzahl der Messungen den Einfluß dieser Fehler nicht verkleinert. Man kann sie nur vermeiden, indem man an die Meßmethode selbst kritisch herangeht, auf das Intaktsein der Geräte achtet und sich streng an die in der Praxis ausgearbeiteten Regeln hält, die die Ausführung der Arbeit betreffen. Die zufälligen Fehler werden durch die Ungenauigkeit der Ablesung hervorgerufen, die jeder Experimentator völlig unwillkürlich hereinbringen kann. Ihre Ursachen sind sowohl in der Unvollkommenheit unserer Empfindungsorgane als auch in vielen anderen Umständen zu suchen, die die Messung begleiten und denen von vornherein nicht Rechnung getragen werden kann. Die zufälligen Fehler gehorchen den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit, und das bedeutet: Wenn sich bei irgendeiner Messung ein Wert größer als der wahre Wert ergeben hat, so ist es bei einer der nachfolgenden Messungen ebenso wahrscheinlich, daß sich ein Wert kleiner als der wahre ergibt. Offensichtlich verkleinert in solchen Fällen eine mehrmalige Wiederholung ein und derselben Messung den Einfluß dieser zufälligen Fehler, da kein Grund dafür vorliegt, die Abweichung vom wahren Wert in der einen Richtung für wahrscheinlicher zu halten als in der anderen. Deshalb wird das arithmetische Mittel aus einer Vielzahl von Ergebnissen zweifellos dem wahren Wert der zu messenden Größe näherkommen als alle diese Messungen im einzelnen.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung gestattet es, den wahrscheinlichen Fehler des Mittelwertes aus den Abweichungen der einzelnen Werte von diesem Mittelwert zu berechnen. In den Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung kann man sich eingehend mit diesem Problem beschäftigen[1]).

Unsere Aufgabe ist es, eine Reihe von praktischen Hinweisen zu geben, die wenigstens für die annähernde Bestimmung der Genauigkeit des er-

---

[1]) Dieses Problem wird in dem Buch von K. P. JAKOWLEW, Mathematische Auswertung von Meßergebnissen, deutsche Ausgabe: Verlag Technik, Berlin 1952, behandelt.

haltenen Ergebnisses notwendig sind, d. h. für die Bestimmung des Fehlers des Mittelwertes aus mehreren wiederholten Meßwerten.

Bezeichnen wir z. B. die Ergebnisse einzelner Messungen mit $N_1, N_2, \ldots, N_k$, wobei k die Anzahl der einzelnen Messungen bedeutet, dann erweist sich

$$N = \frac{N_1 + N_2 + \cdots + N_k}{k} \tag{1}$$

als der dem wahren Wert der zu messenden Größe am nächsten gelegene Wert. Die Abweichungen ΔN_i jeder einzelnen Messung von diesem Mittelwert, d. h. die Größen $N - N_1 = \pm \Delta N_1$, $N - N_2 = \pm \Delta N_2, \ldots$, tragen die Bezeichnung *absolute Fehler der Einzelmessungen.* Uns interessiert nicht das Vorzeichen dieser Fehler, sondern nur ihr absoluter Wert.

Der Mittelwert aus den absoluten Werten der einzelnen Fehler — wir bezeichnen ihn mit ΔN — trägt die Bezeichnung *mittlerer absoluter Fehler des Ergebnisses.* Er ist also

$$\Delta N = \frac{\Delta N_1 + \Delta N_2 + \cdots + \Delta N_k}{k}. \tag{2}$$

Die Verhältnisse $\frac{\Delta N_1}{N_1}, \frac{\Delta N_2}{N_2}, \ldots$ tragen die Bezeichnung *relative Fehler der einzelnen Messungen,* und schließlich heißt das Verhältnis des mittleren absoluten Fehlers ΔN zu dem Mittelwert der zu messenden Größe N *der mittlere relative Fehler des Ergebnisses* (F). Es ist also

$$\frac{\Delta N}{N} = \pm F. \tag{3}$$

Die relativen Fehler werden gewöhnlich in Prozenten angegeben.

Wie bereits erwähnt, kann das Ergebnis einer Arbeit sehr selten durch die Messung nur einer physikalischen Größe erhalten werden. In den meisten Fällen muß man, um zu einem Ergebnis zu kommen, eine Reihe von Messungen durchführen und mit den erhaltenen Zahlenwerten der zu messenden Größen verschiedene mathematische Berechnungen ausführen. Kennt man die Fehler, die man bei der Messung der in das Endergebnis eingehenden Größen zugelassen hat, so ist es notwendig, auch den Fehler des Endergebnisses selbst zu bestimmen.

Untersuchen wir einige wesentliche Beispiele:

Der absolute und relative Fehler des Ergebnisses, das sich aus der Summe (oder Differenz) zweier gemessener Größen zusammensetzt: $N = A + B$. Ist der absolute Fehler bei der Messung der Größe A gleich ΔA und der absolute Fehler bei der Messung der Größe B gleich ΔB, dann ist offensichtlich

$$N \pm \Delta N = (A \pm \Delta A) \pm (B \pm \Delta B).$$

Die Fehler ΔA und ΔB können sowohl positive als auch negative Vorzeichen tragen, doch muß man bei der Berechnung den ungünstigsten Fall ins Auge fassen. Bei der Messung der Summe zweier Größen A und B erhalten wir den größten Fehler, wenn die Meßfehler der Größen A und B das gleiche Vor-

zeichen tragen. Messen wir die Differenz zweier Größen, dann erhalten wir den größten Fehler, wenn die Meßfehler ungleiche Vorzeichen tragen. Folglich ist in beiden Fällen der absolute Fehler ΔN der gemessenen Größe N gleich der Summe der absoluten Fehler[1]) der gemessenen Größen A und B:

$$\pm \Delta N = \pm (\Delta A + \Delta B). \tag{4}$$

Die relativen Meßfehler werden durch folgende Formeln ausgedrückt:

$$\text{für die Summe} \quad F = \frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta A + \Delta B}{A + B}, \tag{5}$$

$$\text{für die Differenz} \quad F = \frac{\Delta A + \Delta B}{A - B}. \tag{6}$$

Daraus folgt, daß bei der Messung irgendeiner Größe, die gleich der Differenz zweier Größen ist, der relative Meßfehler um so größer wird, je mehr die Werte der gemessenen Größen einander gleichen.

Der absolute und der relative Fehler eines Produktes oder eines Quotienten zweier Größen: $N = A \cdot B$ oder $N = \frac{A}{B}$. Wenn A mit dem Fehler $\pm \Delta A$ und B mit dem Fehler $\pm \Delta B$ behaftet ist, so ist offensichtlich

$$N \pm \Delta N = (A \pm \Delta A)(B \pm \Delta B) = AB \pm A\Delta B \pm B\Delta A \pm \Delta A \Delta B.$$

Das Produkt $\Delta A \, \Delta B$ kann man vernachlässigen, da ΔA und ΔB, verglichen mit den Größen A und B, klein sind. Deshalb wird

$$\Delta N = A\Delta B + B\Delta A. \tag{7}$$

Wieder betrachten wir den ungünstigsten Fall, bei dem beide Fehler das gleiche Vorzeichen tragen. Demnach ist also der absolute Fehler eines Produktes gleich der Summe zweier Produkte, und zwar: dem absoluten Fehler der ersten Größe, multipliziert mit der zweiten, und dem absoluten Fehler der zweiten Größe, multipliziert mit der ersten. Daraus folgt

$$F = \frac{\Delta N}{N} = \frac{A\Delta B + B\Delta A}{AB} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}. \tag{8}$$

Der relative Fehler eines Produktes ist gleich der Summe der relativen Fehler der einzelnen Faktoren.

Analog ergibt sich für $N = \frac{A}{B}$

$$N \pm \Delta N = \frac{A \pm \Delta A}{B \mp \Delta B} = \frac{(A \pm \Delta A)(B \pm \Delta B)}{B^2 - (\Delta B)^2} = \frac{AB \pm \Delta AB \pm \Delta BA}{B^2}.$$

Wir vernachlässigen wieder die Quadrate und Produkte der Fehler und betrachten den ungünstigsten Fall, bei dem die Fehler des Zählers und des

[1]) Aus diesem Grunde bezeichnet man den errechneten Fehler des Ergebnisses oft als die Fehlergrenze.

Nenners mit umgekehrten Vorzeichen in die Messung eingehen. Daraus folgt

$$\Delta N = \frac{B \Delta A + A \Delta B}{B^2}. \tag{9}$$

Der absolute Fehler eines Quotienten ist gleich der Summe aus dem absoluten Fehler des Zählers, multipliziert mit dem Nenner, und dem absoluten Fehler des Nenners, multipliziert mit dem Zähler, und beides dividiert durch das Quadrat des Nenners. Der relative Fehler eines Quotienten ist offensichtlich gleich der Summe der relativen Fehler des Zählers und des Nenners. Tatsächlich ergibt sich

$$F = \frac{\Delta N}{N} = \frac{B}{A} \cdot \frac{B \Delta A + A \Delta B}{B^2} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}. \tag{10}$$

Hierbei muß man sich vor Augen halten, daß die automatische Anwendung der angeführten Regeln zu Fehlern führen kann, wenn die gemessene Größe mehrmals in die Formel zur Berechnung des Endresultates eingeht. Betrachten wir folgendes Beispiel:

$$N = \frac{A + B}{B}.$$

Man kann bei automatischer Benutzung der angeführten Formeln N als den Quotienten zweier Größen $C = A + B$ und B betrachten.
Dann ist

$$\Delta N = \frac{B \Delta C + C \Delta B}{B^2}.$$

Da jedoch

$$\Delta C = \Delta A + \Delta B,$$

folgt

$$\Delta N = \frac{B(\Delta A + \Delta B) + (A + B)\Delta B}{B^2} = \frac{B \Delta A + (A + 2B)\Delta B}{B^2}.$$

Andererseits ist offensichtlich $\Delta N = \frac{B \Delta A + A \Delta B}{B^2}$, da man N als $N = \frac{A}{B} + 1$ ausdrücken kann.

Der von uns bei der ersten Art der Berechnung gemachte Fehler kam daher, daß wir die Vorzeichen der absoluten Fehler der Messungen für die sich im Zähler und Nenner wiederholende Größe B als ungleich annahmen. Diese Art der Berechnung ist der bei der Ausrechnung des Fehlers eines Quotienten aus zwei unabhängig gemessenen Größen analog. In diesem Falle muß man jedoch dem absoluten Fehler ΔB im Zähler und Nenner das gleiche Vorzeichen geben. Bei Beachtung dessen wären wir auch bei der ersten Art der Berechnung zu dem gleichen richtigen Ergebnis gekommen.

Wird also in den Formeln eine Größe mehrmals wiederholt, so muß in jedem Fall eine besondere Berechnung des Fehlers des Endergebnisses durchgeführt werden. Die allgemeine Methode der Ausrechnung mit Hilfe der Differentialrechnung, die keine gesonderte Betrachtung einzelner Fälle erfordert, wird später dargelegt.

Der absolute und relative Fehler einer Potenz. Betrachten wir die Funktion $N = A^n$, wobei n eine ganze Zahl ist. Man kann sich dabei N als das

Produkt von n Faktoren A vorstellen. Dann ergibt sich für den relativen Fehler

$$F = n\frac{\Delta A}{A}, \tag{11}$$

d. h., der relative Fehler einer Potenz ist gleich dem relativen Fehler der Basis, multipliziert mit dem Exponenten. Für den absoluten Fehler des Ergebnisses erhält man

$$\Delta N = nA^{n-1}\Delta A. \tag{12}$$

Ist

$$N = \sqrt[n]{A},$$

dann wird

$$N + \Delta N = \sqrt[n]{A + \Delta A}.$$

Wir erheben beide in die n-te Potenz:

$$(N + \Delta N)^n = A + \Delta A.$$

Bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von ΔN erhalten wir

$$N^n + nN^{n-1}\Delta N = A + \Delta A.$$

Daraus folgt für den absoluten Fehler

$$\Delta N = \frac{\Delta A}{nN^{n-1}} = \frac{\Delta A\sqrt[n]{A}}{nA} \tag{13}$$

und für den relativen Fehler

$$F = \frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{n}\frac{\Delta A}{A}, \tag{14}$$

d. h., der relative Fehler einer n-ten Wurzel ist gleich dem relativen Fehler des Radikanden, dividiert durch den Wurzelexponenten.

Der absolute und relative Fehler trigonometrischer Funktionen. Berechnen wir den absoluten und relativen Fehler für den Fall, daß die gesuchte Größe eine trigonometrische Funktion der gemessenen Größe ist.

Es sei beispielsweise

$$N = \sin\alpha,$$

dann ist offensichtlich

$$N + \Delta N = \sin(\alpha + \Delta\alpha),$$

wobei $\Delta\alpha$ den absoluten Fehler der Winkelmessung bedeutet. Nehmen wir $\Delta\alpha$ als eine kleine Größe an, dann können wir $\cos\Delta\alpha = 1$ und $\sin\Delta\alpha = \Delta\alpha$ setzen und erhalten

$$N + \Delta N = \sin\alpha + \cos\alpha\cdot\Delta\alpha,$$

woraus sich

$$\Delta N = \cos\alpha\cdot\Delta\alpha, \tag{15}$$

$$F = \frac{\Delta N}{N} = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\Delta\alpha \tag{16}$$

ergeben.

Analog dazu kann man auch die absoluten und relativen Fehler der anderen trigonometrischen Funktionen berechnen. Wenn die zu bestimmende Größe als eine komplizierte Funktion trigonometrischer Größen erscheint, kann man die oben abgeleiteten Formeln benutzen. Jedoch muß man auch in diesem Falle darauf achten, daß das Vorzeichen des Fehlers richtig gewählt wird.

In der folgenden Tabelle sind die oben abgeleiteten und einige andere Formeln zusammengestellt.

Absolute und relative Fehler einiger Funktionen

Funktion	absoluter Fehler	relativer Fehler
1. $N = A + B + C \ldots$	$\pm(\Delta A + \Delta B + \Delta C \ldots)$	$\pm \frac{\Delta A + \Delta B + \Delta C + \cdots}{A + B + C + \cdots}$
2. $N = A - B$	$\pm(\Delta A + \Delta B)$	$\pm \frac{\Delta A + \Delta B}{A - B}$
3. $N = A \cdot B$	$\pm(A \Delta B + B \Delta A)$	$\pm\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}\right)$
4. $N = A \cdot B \cdot C$	$\pm(BC \Delta A + AC \Delta B + AB \Delta C)$	$\pm\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{C}\right)$
5. $N = A^n$	$\pm n A^{n-1} \Delta A$	$\pm n \frac{\Delta A}{A}$
6. $N = \sqrt[n]{A}$	$\pm \frac{1}{n} A^{\frac{1}{n} - 1} \Delta A$	$\pm \frac{1}{n} \frac{\Delta A}{A}$
7. $N = \frac{A}{B}$	$\pm \frac{B \Delta A + A \Delta B}{B^2}$	$\pm\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}\right)$
8. $N = \sin A$	$\pm \cos A \cdot \Delta A$	$\pm \operatorname{ctg} A \cdot \Delta A$
9. $N = \cos A$	$\pm \sin A \cdot \Delta A$	$\pm \operatorname{tg} A \cdot \Delta A$
10. $N = \operatorname{tg} A$	$\pm \frac{\Delta A}{\cos^2 A}$	$\pm \frac{2 \Delta A}{\sin 2A}$
11. $N = \operatorname{ctg} A$	$\pm \frac{\Delta A}{\sin^2 A}$	$\pm \frac{2 \Delta A}{\sin 2A}$

Da die Meßfehler so klein sind, daß die Quadrate ihrer Größen vernachlässigt werden können, kann man zu ihrer Berechnung die Differentialrechnung heranziehen. Das erleichtert das Ausrechnen der Fehler komplizierter Funktionen sehr wesentlich. Dabei treten keinerlei Schwierigkeiten mit den Größen auf, die in der Formel mehrfach vorkommen.

Muß man beispielsweise, um die gesuchte Größe N finden zu können, die einer unmittelbaren Bestimmung unzugänglich ist, irgendeine andere Größe x messen, die mit N den funktionalen Zusammenhang

$$N = f(x) \tag{17}$$

besitzt, und ist weiterhin $\pm\, dx$ der mittlere absolute Meßfehler der Größe x, so ruft dieser Fehler einen entsprechenden Fehler $\pm\, dN$ der gesuchten Größe hervor. Offensichtlich ist

$$N \pm dN = f(x \pm dx). \tag{18}$$

Entwickeln wir die rechte Seite der Gleichung (18) in eine TAYLOR-Reihe, so erhalten wir:

$$N \pm dN = f(x) \pm dx \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{(dx)^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \pm \cdots.$$

Vernachlässigen wir die Glieder der Reihe, die dx in einer höheren als der ersten Potenz besitzen, so erhalten wir:

$$N \pm dN = f(x) \pm \frac{df(x)}{dx} dx$$

oder, wenn wir die Gleichung (17) berücksichtigen,

$$dN = \pm dx \frac{df(x)}{dx}. \tag{19}$$

Der absolute Fehler einer Funktion ist daher gleich dem absoluten Fehler des Argumentes, multipliziert mit der Ableitung dieser Funktion.

Der relative Meßfehler wird durch den Ausdruck

$$F = \pm \frac{dN}{N}$$

oder

$$F = \pm \frac{dx}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} \tag{20}$$

bestimmt.

Erscheint die zu messende Größe N als Funktion nicht nur einer, sondern mehrerer Veränderlicher, d. h.

$$N = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

so ist es, wie bereits gezeigt wurde, notwendig, die Fehler der Größe N zu finden, die durch die Fehler jeder einzelnen Größe x verursacht wurden. Wir bezeichnen diese Teilfehler der Größe N entsprechend durch ∂N_1, $\partial N_2, \ldots, \partial N_n$. Betrachtet man den ungünstigsten Fall, d. h. den maximal möglichen Wert der absoluten Fehler des Endergebnisses, so muß man alle Teilfehler arithmetisch addieren (unabhängig von den beim Differenzieren erhaltenen Ergebnissen). Deshalb wird

$$dN = \pm \left(|dx_1| \cdot \left| \frac{\partial N}{\partial x_1} \right| + |dx_2| \cdot \left| \frac{\partial N}{\partial x_2} \right| + \cdots + |dx_n| \cdot \left| \frac{\partial N}{\partial x_n} \right| \right). \tag{21}$$

Selbstverständlich ist es notwendig, beim Differenzieren der Größe N nach x_1 die Größen $x_2, x_3, \ldots, x_n$ und beim Differenzieren nach x_2 die Größen x_1, $x_3, \ldots, x_n$ usw. konstant zu halten.

Den relativen Fehler des Ergebnisses findet man aus der Beziehung

$$F = \pm \frac{dN}{N} = \pm \frac{1}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \left(|dx_1| \cdot \left| \frac{\partial N}{\partial x_1} \right| + |dx_2| \cdot \left| \frac{\partial N}{\partial x_2} \right| + \cdots + |dx_n| \cdot \left| \frac{\partial N}{\partial x_n} \right| \right). \tag{22}$$

Benutzt man die Gleichungen (21) und (22), so kann man leicht die Formeln für die Bestimmung des absoluten und relativen Fehlers verschiedener Funktionen ableiten.

Betrachten wir ein Beispiel, das einem schon untersuchten analog ist. Hierbei soll eine der zu messenden Größen sowohl im Zähler als auch im Nenner vorkommen. Es sei

$$N = \frac{A^2}{2B} + \frac{B}{2};$$

dann wird

$$\frac{\partial N}{\partial A} = \frac{A}{B}, \quad \frac{\partial N}{\partial B} = -\frac{A^2}{2B^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2 - A^2}{B^2}.$$

Daraus folgt

$$dN = \frac{A}{B} \cdot dA + \frac{1}{2} \cdot \frac{|B^2 - A^2|}{B^2} \cdot dB = \frac{2A \cdot B dA + |B^2 - A^2| \cdot dB}{2B^2},$$

$$F = \frac{2A \cdot B \cdot dA + |B^2 - A^2| \cdot dB}{(A^2 + B^2) \cdot B}.$$

Im Zähler steht als Faktor von dB der Absolutwert der Differenz $B^2 - A^2$. Das bedeutet, daß diese Differenz stets positiv in die beiden zuletzt abgeleiteten Formeln eingehen muß.

Die Bearbeitung der Meßergebnisse. Wenn alle für die gestellte Aufgabe notwendigen Messungen beendet sind, erfolgt aus ihnen die Berechnung der gesuchten Größe. Es ist notwendig, an den Meßergebnissen Korrekturen anzubringen, die von der Temperatur, dem äußeren Druck, manchmal auch von irgendwelchen systematischen Fehlern in der Anzeige der Geräte usw., abhängen. (Im allgemeinen sind sie im Vergleich zu der zu messenden Größe klein.) Die Temperatur- und Druckkorrekturen sind gewöhnlich aus Tabellen zu entnehmen. Einige Tabellen wurden diesem Buch als Anhang beigefügt. Andere Korrekturen der beobachteten Größen werden aus Formeln berechnet, die ebenfalls in diesem Buch an den entsprechenden Stellen angeführt sind. Um Zeit zu sparen, müssen die Korrekturglieder, da sie klein sind, unbedingt entweder mit Näherungsformeln (siehe Tabelle 57), mit einem Rechenschieber oder, in sehr seltenen Fällen, an Hand einer vierstelligen Logarithmentafel berechnet werden.

Wenn an den einzelnen Messungen alle Korrekturen angebracht worden sind, kann die Ausrechnung der gesuchten Größe nach den Formeln erfolgen, die in der Aufgabe angeführt sind.

Führt man eine Berechnung auf Grund von Meßergebnissen durch, so hat es keinen Sinn, die Ausrechnung weiter zu treiben als bis zu der Genauigkeitsgrenze, bis zu der die unmittelbar gemessenen Größen bestimmt werden können.

Die Meßgenauigkeit bestimmt deshalb auch das Verfahren, mit dessen Hilfe man diese oder jene Berechnungen durchführt. In vielen Fällen genügt der Gebrauch eines Rechenschiebers, in anderen muß man die Logarithmentafeln benutzen. Wiederum hängt es von der Meßgenauigkeit ab, ob vierstellige Logarithmentafeln zur Ausrechnung genügen oder fünf- bzw. siebenstellige

benutzt werden müssen[1]). Empfehlenswert ist es auch, verschiedene Hilfstabellen zu benutzen (siehe Tabellen 54 bis 64).

Stellen wir z. B. nach vorhergehender aufmerksamer Untersuchung der von uns benutzten Geräte und auf Grund der von uns durchgeführten Messungen und oben dargelegten Hinweise fest, daß bei der Bestimmung der Erdbeschleunigung der relative Fehler des Endergebnisses bei der von uns angewendeten Methode 0,2 % beträgt, so ergeben sich für den absoluten Fehler des Endergebnisses 2 cm/sec². Es leuchtet daher ein, daß die Ausrechnung des Ergebnisses bis auf eintausendstel cm/sec² genau völlig unsinnig wäre, da schon der Fehler in der Größenordnung von 1 cm/sec² liegt. Aus diesem Grunde sind alle weiteren Stellen überflüssig. Die Bestimmung der nächsten Stelle (in diesem Beispiel der ersten Stelle hinter dem Komma) ist nur deshalb ganz nützlich, weil es üblich ist, beim Wegstreichen der überflüssigen Zahlen die letzte der stehenbleibenden um eins zu erhöhen, wenn die weggestrichene Zahl größer als 5 ist. In unserem Beispiel würden wir das Ergebnis erhalten: $g = 982$ cm/sec². Wenn wir jedoch die Genauigkeit unserer Messung angeben wollten, könnten wir die Fehlergrenze unseres Ergebnisses hinzufügen. Dann würde unser Ergebnis lauten:

$$g = 982 \pm 2\,\mathrm{cm/sec^2}.$$

Wenn für ein und dieselbe gesuchte Größe mehrere Werte gemessen worden sind, kann man den Genauigkeitsgrad des Ergebnisses mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung viel genauer bestimmen. In diesem Fall kann man für einen vorgegebenen Wert der Wahrscheinlichkeit w eine solche Größe F_w berechnen, daß der wahre Wert der zu messenden Größe N mit der Wahrscheinlichkeit w in den Grenzen von $N_0 - F_w$ liegt (N_0 — arithmetischer Mittelwert aus den einzelnen Meßergebnissen).

Ist im speziellen Fall $w = 50\,\%$, so nennt man die Größe F_w den *wahrscheinlichen Fehler.*

Wir führen keine Ableitungen an, sondern verweisen die sich dafür interessierenden Studenten auf die Lehrbücher der Wahrscheinlichkeitsrechnung und geben nur die Endformel des wahrscheinlichen Fehlers F_w an:

$$F_w = \pm\, 0{,}6745 \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta N)^2}{n(n-1)}}\,, \tag{23}$$

wo $\sum(\Delta N)^2$ die Summe der Quadrate der absoluten Fehler der einzelnen Messungen der gesuchten Größe darstellt und n die Anzahl der durchgeführten Messungen bedeutet. In diesem Fall heißt das endgültige Ergebnis der Messungen:

$$N = N_0 \pm 0{,}6745 \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta N)^2}{n(n-1)}}\,, \tag{24}$$

worin N_0 der arithmetische Mittelwert aus allen erhaltenen Resultaten ist.

---

[1]) Die Methoden der Näherungsrechnung sind in dem Buch von M. P. Frank, „Elementare Näherungsrechnung" (М. П. Франк, Элементарные приближённые вычисления, Гостехиздат, М.-Л., 1932) und in dem Buch von K. P. Jakowlew, „Mathematische Auswertung von Meßergebnissen", deutsche Ausgabe: Verlag Technik, Berlin 1952, dargelegt.

Man muß im Auge behalten, daß die letzte Formel nur richtig ist für eine sehr große Zahl durchgeführter Messungen.

Wenn wir sie auch im Falle einer begrenzten Zahl durchgeführter Messungen verwenden, so geschieht es nur deshalb, weil wir bei einer kleinen Anzahl von Beobachtungen kein anderes Mittel für die Ausrechnung der gestellten Aufgabe besitzen.

Über Meßfehler und die Genauigkeit der Meßgeräte. Die mehrfache Wiederholung einer Messung, um die zufälligen Fehler herabzusetzen, hat natürlich nur dann einen Sinn, wenn die zufälligen Fehler der einzelnen Messungen größer sind als der durch das Meßgerät verursachte.

Mit der *Genauigkeit des Meßgerätes* wird die Meßgenauigkeit bezeichnet, die mit diesem Gerät dann erreicht werden kann, wenn die Art seiner Anwendung keine zusätzlichen Fehler hervorruft. Als Regel gilt, daß die Genauigkeit eines Meßgerätes kleiner ist als die Genauigkeit, mit der man einen Skalenwert des Gerätes ablesen kann. Die Genauigkeit eines Gerätes ist entweder auf dem Gerät selbst oder in einem beiliegenden Prüfschein vermerkt.

Wenn wir z. B. eine Länge mit einem in Millimeter geteilten Meßstab messen, so kann unser Auge leicht auf ein zehntel Millimeter genau ablesen. Doch besitzt ein gewöhnliches Lineal gar nicht diese Genauigkeit. Wie oft wir auch die Messung wiederholen, die Genauigkeit des erhaltenen Ergebnisses wird die bei der Teilung des Lineals eingehaltene Genauigkeit nicht überschreiten. Arbeiten wir jedoch z. B. mit dem Sphärometer (siehe Aufgabe 2), so haben wir die Möglichkeit, die Messungen mit einer Genauigkeit bis zu 0,002 mm durchzuführen. Wegen der zufälligen Fehler weichen hierbei die Meßwerte der einzelnen Messungen voneinander bis zu einigen hundertstel Millimeter ab. Daher muß man in diesem Fall die Messungen mehrmals wiederholen, damit der mittlere absolute Fehler sich nach Möglichkeit dem Wert 0,002 mm nähert.

Bei der Durchführung einer Messung muß man danach streben, die Genauigkeit der Messung der Genauigkeit der Geräte anzunähern. Wenn dies erreicht ist und man bei der Wiederholung der Messungen ein und denselben Wert erhält, so kann man bei der Berechnung des Fehlers des Ergebnisses statt des absoluten Meßfehlers der einzelnen Größen die Genauigkeit der Geräte angeben.

Über die graphische Darstellung experimenteller Ergebnisse. In einer Reihe von Fällen wird die graphische Darstellung zur Auswertung der Meßergebnisse herangezogen. Es ist oft erforderlich, die Abhängigkeit irgendeiner physikalischen Größe von einer anderen festzustellen, so z. B. die Abhängigkeit der Dichte einer Lösung von ihrer Konzentration oder der Temperatur, die Abhängigkeit des Ablenkungswinkels eines Lichtstrahls von seiner Wellenlänge, die der Urspannung eines Elementes von der Temperatur usw. Dafür führt man eine Reihe von Beobachtungen der gesuchten Größe y für verschiedene Werte der Veränderlichen x durch, d. h., man mißt z. B. den Wert der Dichte (y) einer Lösung für bestimmte Werte (x) ihrer Konzentration oder Temperatur oder die Größe des Ablenkungswinkels (y) des Lichtstrahls für bestimmte Werte (x) der Wellenlänge usw. Für die anschauliche Vorstellung dieser Abhängigkeit stellt man sie graphisch dar. Man benutzt

dazu in den meisten Fällen ein rechtwinkliges Koordinatensystem, das man auf Millimeterpapier zeichnet. Man trägt auf der Abszissenachse in willkürlichem Maßstab die Werte der einen Größe, auf der Ordinatenachse in ebenso willkürlichem Maßstab die Werte der anderen Größe ab und verbindet die in einer Ebene liegenden Punkte untereinander mit einer stetigen Kurve.

Solche Kurve gibt uns die Möglichkeit, auf graphischem Wege eine Interpolation vorzunehmen, d.h. für solche Werte von x die Werte für y zu finden, die nicht unmittelbar beobachtet wurden. Dazu kann man von jedem beliebigen Punkt der Abszissenachse eine Gerade parallel zur Ordinatenachse ziehen, die die Kurve schneidet. Die Länge dieser Ordinate stellt den Wert der Größe y für die entsprechende Größe x dar. Außerdem kann man z. B. den Wert der Größe entnehmen, die dem maximalen oder minimalen Wert der anderen entspricht, obwohl diese nicht unmittelbar bestimmt wurden. Solche graphischen Darstellungen oder Diagramme erweisen sich bei der Eichung irgendwelcher Geräte, bei der Graduierung der Skala eines Spektroskops usw. als besonders nützlich. Verhältnismäßig selten wird ein anderes Koordinatensystem benutzt. Ein Beispiel dafür ist die Verwendung von Polarkoordinaten in der Aufgabe 68.

Die Bestimmung der günstigsten Meßbedingungen. Als günstigste Bedingungen bezeichnet man diejenigen, bei denen der Meßfehler am kleinsten ist.

Wenn die zu messende Größe als Funktion nur einer Veränderlichen erscheint, verursacht die Bestimmung solcher Bedingungen keinerlei Schwierigkeiten. Nehmen wir an, daß wir die Wellenlänge mit Hilfe eines Beugungsgitters bestimmen wollen, welches auf dem Tischchen eines Spektrometers steht. Wenn die Strahlen senkrecht auf das Beugungsgitter auftreffen, ist die Richtung der abgebeugten Strahlen, die man durch diesen Versuch bestimmen will, mit der gesuchten Wellenlänge durch die Beziehung verknüpft:

$$b \sin\varphi = n \cdot \lambda, \qquad (25)$$

wobei b die Gitterkonstante, n die Ordnung des Beugungsspektrums, λ die Wellenlänge bedeuten. Der Fehler $\Delta\varphi$, den man bei der Messung des Winkels φ macht, bestimmt den Fehler $\Delta\lambda$ bei der Messung der Größe λ. Aus (25) folgt:

$$b \cos\varphi \cdot d\varphi = n \cdot d\lambda$$

oder

$$\operatorname{ctg}\varphi \cdot d\varphi = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}. \qquad (26)$$

Daraus ist ersichtlich, daß ein kleinerer Fehler bei der Messung der Wellenlänge entsteht, wenn man unter großen Beugungswinkeln beobachtet.

Wenn die zu messende Größe als Funktion mehrerer Veränderlicher erscheint, wird der relative Meßfehler nach der Formel (22) bestimmt. Die günstigsten Meßbedingungen sind solche, für die die rechte Seite der Gleichung (22) den kleinsten Wert annimmt. Für die Auffindung dieses Minimums benutzt man die üblichen Methoden der Differentialrechnung, d. h., man bestimmt die partiellen Ableitungen der rechten Seite dieser Gleichung, setzt sie gleich Null und erhält so n Bedingungsgleichungen.

In vielen speziellen Fällen läßt die Auffindung der Bedingungen für ein Fehlerminimum wesentliche Vereinfachungen zu. Betrachten wir das Beispiel der Messung eines Widerstandes in einer Brückenschaltung.

Bekanntlich wird der Widerstand R_x bei der Messung in einer Brücke (siehe Aufgabe 36) nach der Formel errechnet:

$$R_x = R\frac{l_1}{l_2}, \tag{27}$$

wobei R der bekannte Widerstand, l_1 und l_2 die Längen des Meßdrahtes zwischen dem Schleifkontakt und den Drahtenden sind. Wir wollen die Stellung des Schleifkontaktes bestimmen, bei der der relative Meßfehler am kleinsten ist.

Wenn die Länge des gesamten Meßdrahtes L ist, so ist $l_1 = L - l_2$ und folglich:

$$R_x = R\frac{L-l_2}{l_2}.$$

Der partielle absolute Fehler ∂R_x ist gleich:

$$\partial R_x = \pm dl\,\frac{\partial R_x}{\partial l} = \pm dl\,\frac{\partial\left[R\frac{L-l_2}{l_2}\right]}{\partial l} = \pm\frac{RL}{l_2^2}dl. \tag{28}$$

Der relative Meßfehler:

$$F = \pm\frac{\partial R_x}{R_x} = \pm\left(\frac{RL}{l_2^2}dl : R\frac{L-l_2}{l_2}\right) = \pm\frac{L}{(L-l_2)l_2}dl. \tag{29}$$

Der Fehler F ist am kleinsten, wenn der Ausdruck $(L - l_2)l_2$ den größtmöglichen Wert annimmt, da ja L konstant ist. Dieses Maximum kann man bestimmen, wenn man die erste Ableitung des Ausdrucks $(L - l_2)l_2$ nach l_2 bildet und gleich Null setzt. (Die zweite Ableitung nach l_2 muß negativ sein):

$$\frac{d}{dl_2}[(L-l_2)l_2] = 0$$

oder

$$L - 2l_2 = 0,$$

woraus folgt:

$$l_2 = \frac{L}{2}.$$

Deshalb erhält man den kleinsten Fehler, wenn die Bedingung erfüllt ist:

$$l_1 = l_2. \tag{30}$$

Ratschläge und Hinweise. Geht man an die Lösung einer Aufgabe heran, so muß man vorher all das, was in diesem Leitfaden darüber geschrieben steht, sehr aufmerksam durchlesen. Wenn danach die Theorie und das Wesen der vorliegenden Erscheinung noch nicht genügend klar geworden sind, so ist es unbedingt notwendig, auf die allgemeinen Lehrbücher der Physik und auf die Spezialliteratur zurückzugreifen, die am Ende der Aufgabe angeführt sind, um eingehender mit der Erscheinung vertraut zu werden und sich ihre

Theorie ins Gedächtnis zurückzurufen. Außerdem ist es notwendig, sich genauso aufmerksam mit den Geräten vertraut zu machen, die für die Lösung der Aufgabe verwendet werden, d. h., ihren Aufbau und ihre Wirkungsweise zu studieren und sich die Reihenfolge der Messungen, die einem bevorstehen, zu merken.

Man darf niemals an die Ausführung einer gestellten Aufgabe herantreten, wenn an ihr noch etwas unklar geblieben ist. Die erfolgreiche Lösung von Aufgaben erfordert stets eine gewisse Fertigkeit im Umgang mit den Geräten. Aus diesem Grunde scheint das Lösen der Aufgaben anfänglich sehr schwierig zu sein, viel Zeit zu beanspruchen, und die Meßergebnisse erweisen sich oft als sehr fehlerhaft. Von diesen Umständen darf man sich jedoch nicht entmutigen lassen, da man sich das Können, genaue und richtige Messungen durchzuführen, nicht sofort aneignen kann, sondern wesentliche Arbeit darauf verwenden muß. Besondere Aufmerksamkeit muß man dem Teil der Aufgabe widmen, den man als Versuchsaufbau bezeichnet. Diesen Teil muß man besonders sorgfältig durchführen, da man sehr oft fehlerhafte Meßergebnisse erhalten kann, wenn man den Versuch nicht genügend aufmerksam aufbaut. Will man z. B. die Oberflächenspannung messen, indem man die Höhe der Flüssigkeitssäule in der Kapillare mit dem Kathetometer ausmißt, so ist es vor allem notwendig, das Kathetometer vorher sorgfältig zu justieren. Unterläßt man dies, so kann man ein Ergebnis erhalten, das sehr stark von dem wahren Wert abweicht und ungenauer ist als das bei der unmittelbaren Messung der Höhe der Flüssigkeitssäule mit einem Lineal erhaltene. Häufig besteht die Hauptschwierigkeit der Aufgabe gerade im Aufbau des Versuches. Ist der Versuch sorgfältig genug aufgebaut worden, so ist das nachfolgende Messen meist sehr einfach und führt schnell zu richtigen Resultaten.

Es ist nicht wünschenswert, daß man nach der Erfüllung der Aufgabe nur deshalb von der Richtigkeit ihrer Lösung überzeugt ist, weil das Ergebnis dem Tabellenwert der gesuchten Größe oder den Ergebnissen, die schon früher mit anderen Methoden erhalten wurden, entspricht. Es ist notwendig, daß die Gewißheit, die Aufgabe richtig gelöst zu haben, als Folge des Bewußtseins erscheint, daß alle Messungen richtig durchgeführt worden sind, und daß man keine Fehler zugelassen hat. Anders gesagt, bei dem Ausführenden einer physikalischen Arbeit muß die Überzeugung vorhanden sein, daß das Ergebnis deshalb richtig ist, weil im gesamten Gang der Lösung nichts falsch gemacht worden ist. Dazu führt sowohl die aufmerksame Ausführung der Aufgabe in allen ihren Einzelteilen als auch die unzweifelhaft notwendige mehrmalige Wiederholung aller Einzelmessungen. Dabei müssen diese Messungen immer gleich sorgfältig ausgeführt werden.

Diesen allgemeinen Ratschlägen wollen wir noch einige detaillierte Hinweise hinzufügen, die sehr nützlich sein können und an die man sich halten sollte:

1. Bevor man an eine Aufgabe herantritt, ist es notwendig, sich davon zu überzeugen, daß alle zur Aufgabe gehörigen Geräte vorhanden sind. Niemals sollte man die Geräte einer Aufgabe zur Lösung einer zweiten benutzen, weil sie für diese völlig unbrauchbar sein können, wenn sie auch äußerlich das gleiche Aussehen haben.

2. Man soll mit den Geräten sehr vorsichtig umgehen, sie nicht auseinandernehmen oder -schrauben, wenn sie nicht intakt sind, sondern sich stets zur Klärung an den Leiter des Praktikums wenden. Niemals sollte man mit den Messungen beginnen, wenn man nicht vollständig davon überzeugt ist, daß die Geräte in der richtigen Anordnung aufgebaut sind.

Ganz besonders vorsichtig sollte man mit elektrischen Geräten umgehen, die nicht nur durch mechanische Ursachen beschädigt werden können, sondern auch durch rein elektrische, wie z. B. bei unrichtigem Zusammenschalten der Verbindungen. Deshalb soll man bei der Ausführung elektrischer Aufgaben folgendes beachten:

a) Alle Verbindungen müssen ausschließlich mit heilen Schaltschnüren durchgeführt werden, deren Isolation unbeschädigt ist. Man soll die Schaltschnüre stets anklemmen und nicht durch Verdrillen verbinden.

b) In gar keinem Fall darf man die Verbindung der Geräte von der Stromquelle aus beginnen (Akkumulator, Hebelschalter auf der Schalttafel usw.). Im Gegenteil, es ist erst unmittelbar vor dem Beginn der Messung erlaubt, die Stromquelle einzuschalten, nachdem zuvor eine Überprüfung der Schaltung durch den Assistenten erfolgt ist.

c) Tritt übermäßige Erwärmung einzelner Teile der Schaltung auf (man kann sie nicht mehr mit der Hand berühren) oder sogar Brandgeruch, so muß sofort der Strom abgeschaltet und der Assistent davon in Kenntnis gesetzt werden.

Über die Anfertigung eines Meßprotokolls bei der Ausführung der Praktikumsaufgabe. Der Erfolg jeder experimentellen Arbeit hängt nicht nur ab von der richtigen Auswahl der Meßmethode, von der Genauigkeit der verwendeten Instrumente und von der sorgfältigen Ausführung der Messungen, sondern auch von dem richtigen systematischen Aufschreiben der Meßergebnisse. Zu diesem Zweck muß man sich für das Arbeiten im physikalischen Praktikum ein besonderes Heft — das Protokollheft — anschaffen, in das die Benennung des Versuches, die Methode, eine Skizze der Anordnung, die notwendigen Formeln für die Auswertung der Meßergebnisse und auch die Bezeichnung der zu messenden und zu berechnenden, in den Formeln auftretenden Größen eingetragen werden.

Es ist für das Aufschreiben der zu messenden Größen notwendig, sich vorher eine Art Tabelle anzulegen, in die die Ergebnisse aller einzelnen Messungen eingetragen werden, die zu dieser Arbeit gehören. Mit größter Sorgfalt muß man in diese Tabelle die Werte aller gemessenen Größen eintragen, mit deren Hilfe man später das Endergebnis und seinen mittleren oder wahrscheinlichsten Fehler errechnet.

Man muß sich nicht nur zu einer Fertigkeit der sorgfältigen Ausführung von Messungen erziehen, sondern auch zu ihrer rechtzeitigen Niederschrift.

Läßt man Nachlässigkeiten in der Niederschrift der einzelnen Meßergebnisse zu, so können späterhin bei der Auswertung der Resultate des Experimentes grobe Fehler auftreten, die unrichtige Folgerungen zulassen könnten.

Auf Grund der in das Protokollheft eingetragenen Meßergebnisse erfolgt die endgültige Auswertung, die Berechnung der Meßfehler und die Zusammenstellung des Versuchsprotokolls.

Zur Bewertung der Aufgabe werden dem Assistenten sowohl die aufgeschriebenen Meßergebnisse als auch die Ergebnisse der Auswertung (Protokollheft) vorgelegt.

Literatur

1. B. BAULE: „Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs", Bd. II: Ausgleichs- und Näherungsrechnung. Verlag S. Hirzel, Leipzig 1948.
2. K. P. JAKOWLEW: „Mathematische Auswertung von Meßergebnissen". Deutsche Ausgabe: Verlag Technik, Berlin 1952.
3. F. KOHLRAUSCH: „Praktische Physik", Bd. I. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1953.
4. C. RUNGE und H. KÖNIG: „Numerisches Rechnen". Verlag J. Springer, Berlin 1924.
5. W. H. WESTPHAL: „Physikalisches Praktikum". Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig 1952.

ERSTER TEIL

MECHANIK

Aufgabe 1

Gebrauch der Nonien

Der Nonius. Mit Nonius (linearer oder Kreisnonius) bezeichnet man einen Zusatz zum gewöhnlichen Maßstab, der es gestattet, die Genauigkeit der Messung mit dem gegebenen Maßstab um das 10- bis 20fache zu erhöhen.

Die Technik des unmittelbaren Messens von Längen und Winkeln hat bis zum heutigen Tage einen hohen Grad der Vollkommenheit erreicht. Es sind eine Reihe spezieller Anordnungen konstruiert worden, sogenannte *Komparatoren,* die es gestatten, eine Länge mit der Genauigkeit bis zu 1 μ (1 μ $= 10^{-4}$ cm) zu messen. Die meisten von ihnen beruhen auf der Anwendung des Mikroskops und einiger anderer optischer Vorrichtungen. Dabei werden fast immer die Ablesevorrichtungen mit Nonien oder Mikrometern versehen. In vielen Fällen wird eine solche relative Genauigkeit der Längenmessung gefordert, daß eine absolute Genauigkeit von einem zehntel oder sogar einem hundertstel Millimeter[1]) und für Winkel von Minuten oder Bruchteilen von Minuten ausreicht. In solchen Fällen kann man zur Messung gewöhnlicher Maßstäbe Winkelmesser benutzen, die mit Nonien versehen sind. Als Beispiel solcher Anordnungen sind zu nennen: *Schublehre, Bussole, Kippregel.*

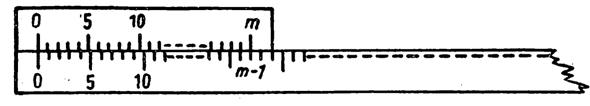


Abb. 1

Der lineare Nonius ist ein kleines Lineal, das entlang einem Maßstab gleitet. Dieses Lineal ist mit einer kleinen Skala versehen, die in m gleiche Teile eingeteilt ist (Abb. 1). Die ganze Länge aller dieser m Teile ist gleich $m - 1$ Teilen der kleinsten Teilung des Maßstabes selbst, d. h.

$$mx = (m - 1)\, y,$$

wobei x die Länge der Noniusteilung und y die Länge der kleinsten Teilung des Maßstabes bedeutet, die im allgemeinen jeden beliebigen Wert haben kann. Daraus folgt

$$x = y - \frac{y}{m}$$

---

[1]) Auf ein zehntel Millimeter genau kann man zwar mit dem unbewaffneten Auge ablesen, doch wird das fehlerfreie Schätzen solcher Größen nur möglich durch langes Training und Gewohnheit.

und die Differenz der Längen der Skala und des Nonius, die man als *die Genauigkeit des Nonius* bezeichnet:

$$\Delta x = y - x = \frac{y}{m}. \tag{1}$$

Diese Größe bestimmt auch, wie wir gleich sehen werden, den maximalen Fehler des Nonius.

Wir betrachten nun den Prozeß der Messung mit Hilfe des linearen Nonius. L sei der zu messende Abschnitt (Abb. 2). Wir bringen den Nullstrich der

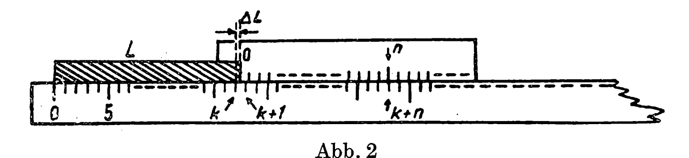


Abb. 2

Teilung des Maßstabes mit seinem Anfang zur Deckung. Liegt dabei sein Ende zwischen dem k-ten und $(k+1)$-ten Teilstrich dieses Maßstabes, so kann man schreiben:

$$L = ky + \Delta L,$$

wobei ΔL den unbekannten Bruchteil hinter dem k-ten Teilstrich des Maßstabes bedeutet.

Wir legen nun an das Ende des Abschnittes L unseren Nonius so, daß der Nullpunkt des Nonius mit dem Ende des Abschnittes übereinstimmt. Da die Teilung des Nonius nicht mit der Teilung des Maßstabs übereinstimmt, findet man auf ihm bestimmt einen solchen Teilstrich n, der einem entsprechenden $(k+n)$-ten Teilstrich des Maßstabes am nächsten kommt. Wie aus der Abb. 2 ersichtlich ist, ist

$$\Delta L = ny - nx = n(y - x) = n \cdot \Delta x$$

und folglich die ganze Länge gleich

$$L = ky + n \cdot \Delta x$$

oder, übereinstimmend mit (1),

$$L = ky + n\frac{y}{m}, \tag{2}$$

was man auch folgendermaßen formulieren kann: *Die Länge des Abschnittes, der mit Hilfe eines Nonius gemessen wird, ist gleich der Anzahl der ganzen Teile des Maßstabes plus der Genauigkeit des Nonius, multipliziert mit der Zahl des Teilstriches des Nonius, der mit irgendeinem Teilstrich des Maßstabes zusammenfällt.*

Der Fehler, der bei einer solchen Methode der Ablesung auftreten kann, ist bedingt durch das ungenaue Zusammenfallen des n-ten Teilstriches des Nonius mit dem $(k+n)$-ten Teilstrich des Maßstabes. Seine Größe ist offensichtlich nicht größer als $\frac{1}{2}\Delta x$, weil bei größerer Nichtübereinstimmung einer der

Nachbarteilstriche (rechts oder links) ein kleineres Nichtübereinstimmen zeigen würde als $\frac{1}{2}\Delta x$, und wir würden an ihm die Ablesung durchführen. Deshalb kann man sagen, daß *der Fehler des Nonius gleich seiner halben Genauigkeit ist.*

Die Länge der Teile des Maßstabes und die Zahl der Teile des Nonius und folglich die Genauigkeit des Nonius sind sehr verschiedenartig. Die folgende Tabelle zeigt die am häufigsten anzutreffenden Kombinationen:

y in mm	1	1	1	0,5
m	10	20	50	25
Δx in mm	0,1	0,05	0,02	0,02

Der Kreisnonius unterscheidet sich im Prinzip nicht vom linearen. Er stellt ein nicht zu großes gebogenes Lineal dar, das entlang einem Kreis

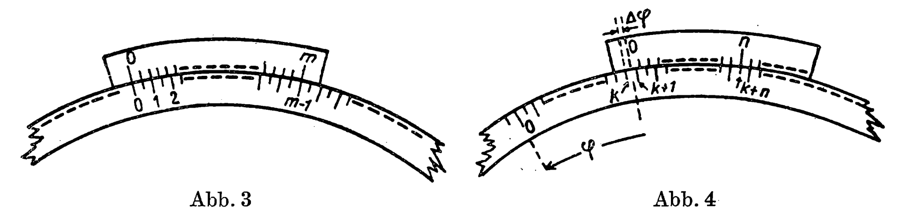


Abb. 3 Abb. 4

(Limbus) gleitet, der in Grade oder noch kleinere Teile geteilt ist (Abb. 3). Das Lineal ist ebenfalls in m Teile geteilt, deren ganze Länge gleich $(m-1)$ Teilen des Limbus entspricht, d. h.

$$m\alpha = (m-1)\,\beta,$$

wobei α und β die Größen der Teilung des Nonius (α) und der kleinsten Teilung des Limbus (β), ausgedrückt in Graden oder Minuten, bedeuten.

Die Genauigkeit des Kreisnonius wird durch eine der Formel (1) völlig analoge ausgedrückt:

$$\Delta\alpha = \frac{\beta}{m}.$$

Die vom Nullpunkt des Limbus abgelesenen Winkel (Abb. 4) berechnen sich offensichtlich nach der Formel

$$\varphi = k\beta + n\Delta\alpha.$$

Oft bestehen die Kreisnonien an den Geräten, an denen die Winkel nach beiden Seiten hin (in Uhrzeigerrichtung und entgegengesetzt) abgelesen werden müssen, aus zwei vollkommen gleichen Skalen, die zu beiden Seiten

des gemeinsamen Nullpunktes angeordnet sind. Es ist leicht einzusehen, daß man bei der Ablesung stets die Skala benutzen muß, deren wachsendes n in Richtung der Ablesung liegt.

Aus der Zahl der am häufigsten anzutreffenden Kreisnonien führen wir folgende an:

β	1°	1°	30′	15′	15′	10′
m	12	30	30	15	30	20
$\Delta\alpha$	5′	2′	1′	1′	30″	30″

Genauere Nonien werden nur bei besonderen Präzisionsinstrumenten, speziell astronomischen, verwendet. Manchmal, wenn auch selten, werden Nonien verwendet, die den zehnten Teil eines Grades anzeigen.

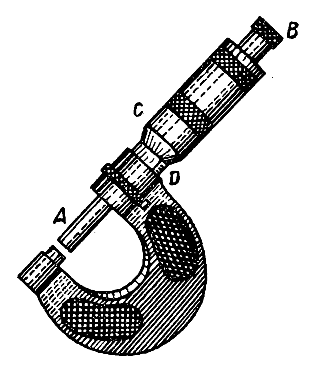


Abb. 5

In vielen Fällen sind die Nonien beider Arten zur Erleichterung der Ablesung mit festen Lupen ausgerüstet. Fehlen diese, so empfiehlt es sich, für die Ablesung gewöhnliche Lupen zu benutzen.

Die Mikrometerschraube. Die Mikrometerschraube (Abb. 5) dient zur Messung des Durchmessers von Drähten nicht zu großer Dicke, von Platten usw. Sie sieht aus wie ein Schraubstock, in den mit Hilfe einer Schraube das zu messende Objekt eingespannt wird. Die Ganghöhe beträgt im allgemeinen 1 mm oder 0,5 mm. Auf dem Schraubenstiel A ist die Trommel C befestigt, die mit einer in 50 oder 25 Teile geteilten Skala versehen ist. Bei zugedrehter Schraube steht der Nullpunkt der Trommelteilung gegenüber dem Nullpunkt der linearen Teilung D.

Der zu messende Gegenstand wird zwischen die Schraube und den gegenüberliegenden Anschlag gebracht und die Schraube so lange gedreht, bis sie den zu messenden Gegenstand berührt. Auf der einen Skala werden die Millimeter und auf der Trommel die hundertstel Millimeter abgelesen.

Als Hauptfehlerquelle erscheint das ungleichmäßige Andrücken der Schraube an den zu messenden Gegenstand. Zur Beseitigung dieser Unzulänglichkeit sind die modernen Mikrometerschrauben mit besonderen Vorrichtungen versehen, die einen zu starken Druck nicht zulassen. Die Wirkungsweise derartiger Vorrichtungen beruht auf der Reibung, die zwischen dem Schraubenstiel A und dem Griff B, durch den die Schraube gedreht wird, auftritt.

Übung 1

Die Messung der Dicke einer Metallplatte mit einem Dickenmesser und einer Mikrometerschraube

Zubehör: 1. Dickenmesser, 2. Mikrometerschraube, 3. Metallplatte.

Beschreibung des Dickenmessers. Die Anordnung (Abb. 6) besteht aus einem massiven Bügel ACB, der an dem Fuß K befestigt ist. Durch die Öffnungen am Ende der Bügelzweige gehen zwei Stäbe DE und FG. Der kürzere von ihnen, FG, ist unbeweglich befestigt und der längere, DE, kann in seiner ganzen Länge bewegt werden. Die nach innen aufeinander weisenden Enden der Stäbe tragen kleine Kugeln. Die Achsen beider Stäbe liegen in einer Geraden. Der Stab DE trägt auf der oberen ebenen Seite eine Millimeterteilung. Über diesem Maßstab hat die Halterung A einen quadratischen Ausschnitt, auf dessen abgeschrägtem Rand, der am Maßstab anliegt, ein Nonius eingeritzt ist. Wenn sich die beiden Kugeln berühren, muß der Nullpunkt des Nonius mit dem Nullpunkt des Maßstabes übereinstimmen.

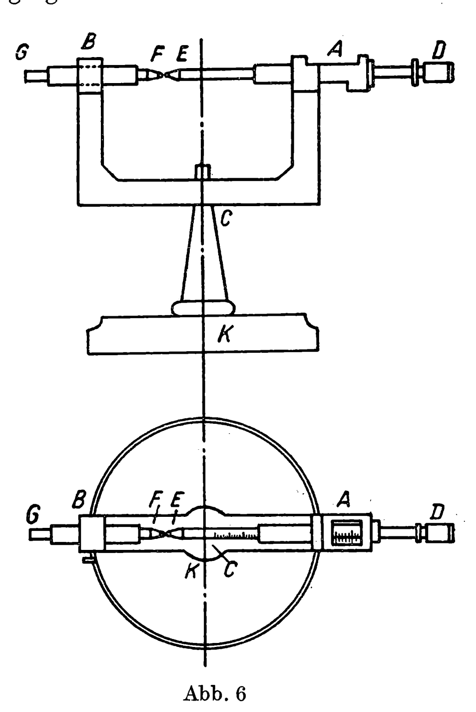


Abb. 6

Bevor man an die Messung mit Hilfe des Nonius herantritt, muß man, wie auch bei jedem anderen Meßgerät, die Grenzen seiner Genauigkeit feststellen. Die Bestimmung der Genauigkeit geschieht nach den Regeln, die in der Einleitung aufgeführt wurden.

Die Messung. Man faßt den Stab DE am Kopf D an und dreht ihn so weit heraus, daß die zu messende Platte zwischen die Kugeln paßt. Man hält die Platte vertikal zur Stabachse, so daß die Mitte der Platte die Kugel F berührt, nähert den Stab DE, bis die zweite Kugel die Platte berührt, und liest am Nonius ab. Auf die gleiche Weise wird die Dicke der Platte in der Nähe jeder der vier Ecken gemessen und dann aus allen Ergebnissen das Mittel gebildet.

Man wiederholt die Dickenmessung der Platte mit Hilfe einer Mikrometerschraube.

Übung 2

Die Bestimmung des Volumens eines Rohres und der Dichte seines Materials mit Hilfe einer Schublehre

Zubehör: 1. Schublehre, 2. das zu messende Rohr, 3. Lupe.

Beschreibung des Gerätes. Die Schublehre (Abb. 7) besteht aus einem in Millimeter geteilten Maßstab LM, längs dem sich der Schenkel CB verschieben läßt. Die Schraube C dient zum Festklemmen des Schenkels. Sein Rahmen enthält an der Seite des Maßstabes einen Ausschnitt, auf dessen abgeschrägtem Rand, der am Maßstab anliegt, ein Nonius eingeritzt ist. Wenn die Schenkel bis zum Anschlag aneinandergeschoben sind, fällt der Nullpunkt des Nonius mit dem Nullpunkt des Maßstabes zusammen. Der unbewegliche Schenkel LA, der an dem Anfangspunkt des Maßstabes befestigt ist, dient als Stützpunkt für den zu messenden Körper. Die Teile FF beider Schenkel dienen zur Messung der inneren Maße der Körper.

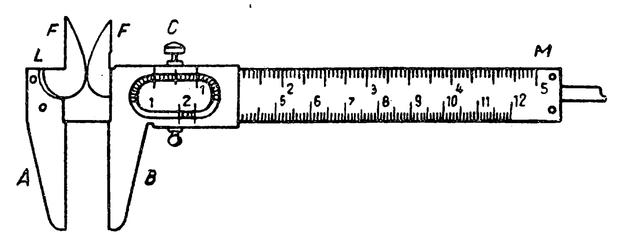


Abb. 7

Die Messung. Für die Bestimmung des Volumens eines Rohres muß man seine geometrischen Ausmaße — seine Länge und seinen inneren und äußeren Durchmesser — bestimmen. Für die Bestimmung der Dichte des Rohres muß man außer dem Volumen auch noch seine Masse kennen.

Die Bestimmung des Volumens. Die Messung der Länge geschieht auf folgende Weise: Man schiebt die Schenkel der Schublehre weit genug auseinander, legt das Rohr der Länge nach, möglichst nahe am Maßstab, zwischen die Schenkel, führt den Schenkel B so weit heran, daß das Rohr stramm sitzt, und liest ab. Da sich der Schenkel B und folglich auch der Nullpunkt des Nonius um die Länge des Rohres verschoben haben, liest man auf dem Maßstab die ganze Zahl von Millimetern bis zum Nullpunkt des Nonius ab und schaut, welcher Teilstrich des Nonius mit irgendeinem Teilstrich des Maßstabes zusammenfällt. Die Messung wird einige Male wiederholt, wobei man jedesmal das Rohr um seine Achse um einen bestimmten Winkel dreht (etwa 45°). Aus allen erhaltenen Resultaten wird das arithmetische Mittel gebildet.

Dann wird die Messung des äußeren Durchmessers des Rohres durchgeführt. Man führt die gleiche Anzahl von Messungen an dem einen und dem anderen Ende des Rohres an zwei senkrecht zueinander liegenden Durchmessern aus, wobei man beim Heranführen des Schenkels das Rohr senkrecht zum Maßstab hält. Aus allen Ergebnissen nimmt man das Mittel.

Bei der Ausmessung des inneren Durchmessers des Rohres werden die Teile *FF* der Schenkel der Schublehre im Rohr so weit auseinandergeschoben, daß sie an der inneren Wand des Rohres anliegen. Man liest ab, dann mißt man einen anderen senkrecht zum ersten liegenden inneren Durchmesser des Rohres. Zwei gleiche Messungen führt man auch an dem anderen Ende durch und bildet aus allen Messungen das Mittel.

Wenn die Schublehre keine besondere Vorrichtung für die Messung des inneren Durchmessers des Rohres besitzt, so muß man die Breite der Schenkel beachten. Diese Breite wird gewöhnlich auf der Schublehre angegeben.

Aus den Meßergebnissen wird nach elementaren geometrischen Formeln das Volumen des Rohres errechnet.

Bestimmung der Dichte des Rohrmaterials. Man wägt das Rohr (auf einer einfachen Waage) mit der Genauigkeit bis 0,1 g, findet so seine Masse und errechnet aus dieser und dem bekannten Volumen die Dichte des Rohrmaterials.

Übung 3

Die Messung von Winkeln

Zubehör: Ein winkelmessendes Instrument.

Die Winkelmessung gehört zusammen mit der Längenmessung zu den verbreitetsten Messungen nicht nur im physikalischen Experiment (hauptsächlich auf dem Gebiete der Optik), sondern auch in einer ganzen Reihe von anderen Grenzgebieten (Astronomie, Geodäsie, Mineralogie usw.). Die zu diesen Messungen dienenden Geräte bestehen gewöhnlich aus zwei Hauptteilen: dem *Limbus,* auf dem die Richtungen zweier Radien, die den gesuchten Winkel einschließen, abgelesen werden, und der *Visiereinrichtung* (Fernrohr usw.), mit der die Richtungen dieser Radien festgelegt werden.

Die Visiereinrichtung läßt sich um eine Achse drehen, die durch das Zentrum des Limbus geht, und seine Richtung läßt sich mit Hilfe eines an ihr befestigten Zeigers auf der Skala des Limbus ablesen. Der gesuchte Winkel wird als die Differenz zweier Ablesungen gefunden, die den Stellungen der Visiereinrichtung entsprechen. Manchmal trifft man den Limbus und den Zeiger in umgekehrter Anordnung an: Der mit der Visiereinrichtung verbundene Limbus wird gedreht, und seine Stellung wird an einem unbeweglichen Zeiger abgelesen.

Um die Stellung der Visiereinrichtung auf der Skala des Limbus genau ablesen zu können, verwendet man einen Kreisnonius.

Besonders wichtig ist bei diesen Geräten eine genaue Zentrierung, d. h. das Zusammenfallen der Drehachse der Visiereinrichtung mit dem Zentrum des Limbus. Ist die benötigte Zentrierung nicht vorhanden, so entsprechen die am Limbus abgelesenen Winkel nicht ihren wahren Werten. Die Richtigkeit dieser Behauptung geht aus der Abb. 8 hervor, auf der zwei Stellungen zweier Radien dargestellt sind, die die gleichen Winkel miteinander bilden, jedoch fällt in dem einen Fall der Schnittpunkt C dieser Radien genau mit dem Zentrum des Limbus zusammen, und in dem anderen liegt er exzentrisch (Punkt C'). Aus der Abbildung ersieht man, daß die Ablesung des Winkels

$A'C'B'$ einen größeren als den wahren Wert und die Ablesung seines Scheitelwinkels $A''C'B''$ einen kleineren ergibt. Dieser Umstand kann dazu benutzt werden, den Einfluß der Exzentrizität vollständig auszuschalten, die in einem gewissen Grade bei jedem Gerät vorhanden ist. Dazu verbindet man mit der Ablesevorrichtung nicht einen, sondern zwei Nonien, die an den beiden Enden des gleichen Durchmessers sitzen. Auf diese Weise gibt uns der eine Nonius einen größeren Wert an, der durch den Bogen $A'B'$ gegeben ist, und der andere einen kleineren, der durch den Bogen $A''B''$ gegeben ist. Der Mittelwert aus beiden Ablesungen liefert uns ein Resultat, das unabhängig von der Exzentrizität des Gerätes ist.

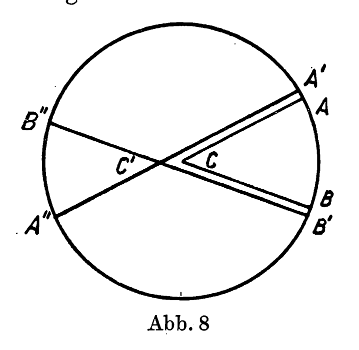


Abb. 8

Die Details der Konstruktion der winkelmessenden Instrumente sind überaus verschieden und hängen von dem speziellen Verwendungszweck ab. In dieser Übung beschreiben wir zwei **geodätische Geräte**, die zur Ausmessung horizontaler und vertikaler Winkel im Freien dienen: die sogenannte **Bussole** und den **Kippregel**. Es sind an ihnen kleine Änderungen vorgenommen worden, um sie den Zimmerausmaßen anzupassen. Mit den **physikalischen Geräten**, die zur Winkelmessung dienen, wird der Lernende in dem Teil „Optik" bekannt gemacht.

Beschreibung der Geräte. Die Bussole (Abb. 9) besteht aus einem horizontalen Limbus L, der auf einem dreibeinigen Stativ S ruht und dessen Lage durch die Schrauben C verändert werden kann. Auf dem Limbus sitzt eine Dosenlibelle u, mit deren Hilfe durch Verstellung der Fußschrauben C der Limbus in die horizontale Lage gebracht wird. Um die Achse, die durch das Zentrum des Limbus geht, ist eine sogenannte *Alhidade* — eine Leiste, an deren Enden die *Diopter* d_1 und d_2 befestigt sind — drehbar angeordnet. d_1 und d_2 sind vertikale, mit je einem länglichen Spalt versehene Leisten. Über einen dieser Spalte, den breiteren von beiden (den sogenannten objektivseitigen), ist ein vertikaler Faden gespannt. Die Fläche, die durch den Faden und die Mitte des schmalen (augenseitigen) Spaltes geht, ist die Visierfläche.

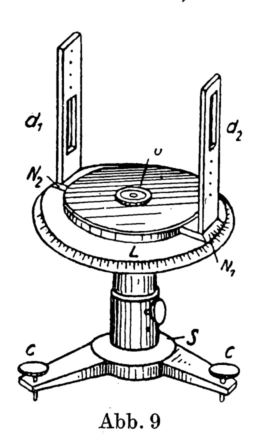


Abb. 9

Einige Geräte besitzen anstatt des augenseitigen Spaltes eine Reihe kleiner Durchbohrungen, die genau auf einer vertikalen Geraden liegen. Die Alhidade besitzt zwei Nonien N_1 und N_2, mit deren Hilfe man ihre Stellung ablesen kann.

Der **Kippregel** (Abb. 10) besteht aus dem Fernrohr T (siehe auch Aufgabe 72), das um die horizontale Achse OO', die durch das Zentrum des Limbus geht, drehbar angeordnet ist. Der Limbus ist mit dem Fernrohr verbunden und dreht sich gemeinsam mit ihm. Die Achse, an der das Fernrohr befestigt

ist, kann mit der Schraube F in dem Ring a festgeklemmt werden. An a ist ein langer Hebel B befestigt, dessen Ende gegen die Mikrometerschraube m drückt. Durch Drehen der Schraube kann man langsam und sehr gleichmäßig den Neigungswinkel des Fernrohrs verändern. Die beiden unbeweglichen Nonien N_1 und N_2 ermöglichen es, diesen Winkel am Limbus abzulesen. Die Ablesung erfolgt mit Hilfe der Lupen l_1 und l_2.

Das ganze Gerät kann um die vertikale Achse gedreht werden, die durch das Zentrum des Dreibeinstativs S geht. Damit kann das Fernrohr in jede beliebige Richtung eingestellt werden. Durch die Schraube K kann eine bestimmte Stellung fixiert werden.

Um die Ablesungen der Winkel genau in der Vertikalen ausführen zu können, ist das Gerät mit der Dosenlibelle u versehen und wird durch die Fußschrauben C so eingestellt, daß die Blase der Libelle genau die Mitte einnimmt. Die Achse OO' liegt dabei streng horizontal und der Limbus L vertikal.

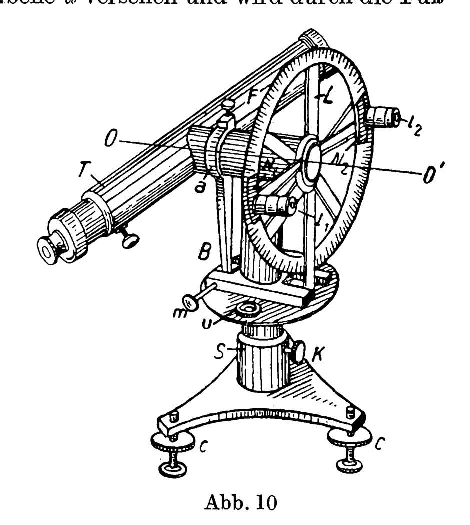


Abb. 10

Das vollendetste Gerät zur Winkelmessung ist der Theodolit. Wie auch der Kippregel besitzt der Theodolit ein Fernrohr, das man um zwei senkrecht zueinander liegende Richtungen — horizontal und vertikal — bewegen kann. Jedoch hat der Theodolit im Gegensatz zum Kippregel außer dem vertikalen Limbus, der die Messung von Winkeln in der vertikalen Ebene ermöglicht, auch einen horizontalen Limbus, mit dem man Winkel in der horizontalen Ebene ausmessen kann. Deshalb sind im Theodoliten sowohl Kippregel als auch Bussole vereinigt. Dadurch wird der Theodolit zu einem universellen Gerät.

Die Messung. Hat man das Gerät horizontal gestellt, so richtet man das Fernrohr (oder die Alhidade) auf eines der rechtwinkligen Zeichen, die auf die Wände des Raumes geklebt sind. Dabei soll das Fadenkreuz des Fernrohres (oder der Visierfaden der Alhidade) mit dem Scheitelpunkt des Winkels zusammenfallen. (Beim Ausrichten der Alhidade muß sich das Auge unmittelbar hinter dem augenseitigen Spalt befinden.) Nach der Ablesung beider Nonien wird die Einstellung verändert, neu ausgerichtet und die Ablesung wiederholt. Es werden mindestens fünf solcher Messungen durchgeführt. Wenn dabei die einzelnen Ablesungen stark streuen, müssen sie öfter wiederholt werden. Es wird das Mittel aus den einzelnen Messungen für jeden der Nonien gebildet.

Dann geht man zur Ablesung des zweiten, dritten und weiterer Zeichen über, die mit dem ersten im Falle der Bussole auf einer Horizontalen oder, im Falle des Kippregels, auf einer Vertikalen liegen.

Danach berechnet man die Differenzen der Ablesungen jeder Richtung für jeden der beiden Nonien und nimmt endlich das Mittel aus den erhaltenen Wertepaaren der Winkel zwischen diesen Richtungen.

Aufgabe 2

Die Bestimmung der Dicke einer Platte und des Krümmungsradius einer Linse mit dem Sphärometer

Beschreibung eines Sphärometers. Ein Sphärometer dient zur genauen Messung der Dicke von Platten und für die Bestimmung des Krümmungsradius sphärischer Oberflächen (z. B. optischer Linsen). Es besteht (Abb. 11) aus einem metallischen Dreifuß AA, durch das vertikal eine stählerne Mikrometerschraube B geht, deren Ganghöhe genau bestimmt ist und gewöhnlich 1 mm oder 0,5 mm beträgt. Die Schraube ist unten entweder zugespitzt oder trägt eine Kugel. Oben trägt sie die Scheibe D, die an der Peripherie in 250, 500 oder 1000 Teile geteilt ist. An einer Seite des Dreifußes ist ein Maßstab C vertikal befestigt, dessen Teilung es gestattet, die Anzahl der vollen Umdrehungen abzulesen. Auf der Scheibe D wird der Bruchteil der Umdrehung entsprechend dem mit dem Maßstab zusammenfallenden Teilstrich abgelesen. Die Schraube wird an dem Kopf E gedreht. Die Füße des Sphärometers a_1, a_2, a_3 (das dritte ist auf der Abbildung nicht zu sehen) sind unten zugespitzt und bilden die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Das ganze Gerät steht auf einer plangeschliffenen Glasplatte und wird, wenn es für Messungen nicht benutzt wird, zum Schutz vor Staub und Verschmutzung mit einer Glasglocke zugedeckt.

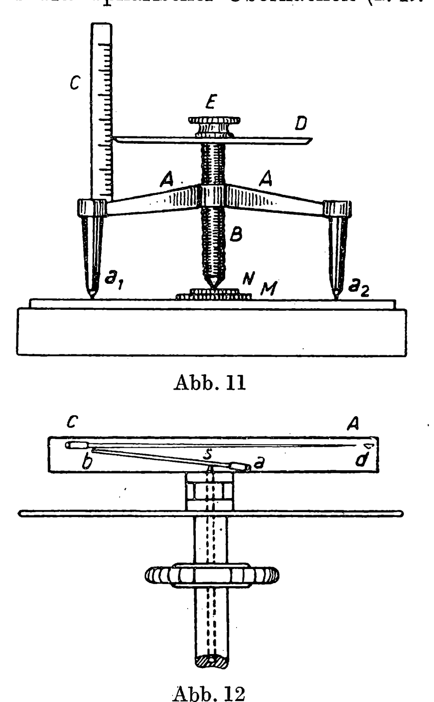


Abb. 11

Abb. 12

Bei der Messung mit dem Sphärometer ist es am schwersten, den Moment genau abzupassen, in dem die Spitze der Mikrometerschraube die Unterlage berührt. Dazu benutzt man sehr oft die Erscheinung der Interferenz des Lichtes (siehe weiter unten, Übung 1). Manchmal wird auch folgende besondere Vorrichtung benutzt: Die Mikrometerschraube (Abb. 12) wird in der Achse durchbohrt und in die Bohrung ein Stahlstift gesteckt. Es muß genügend Luft für seine Bewegung vorhanden sein. Der Stift endet unten in

einer Spitze und oben in einer scharfen Kante S, die bei der Berührung des Stiftes mit einem darunterliegenden Gegenstand gegen den kurzen Arm eines empfindlichen Hebels ab drückt. Der Hebel ab drückt auf den Vorsprung eines zweiten Hebels CA und hebt damit dessen freies Ende A an. Damit erhält man eine Möglichkeit, sehr genau einzustellen, wenn man das Ende des Hebels A bis zu der Höhe der Kante der kleinen Schneide d bringt.

Übung 1

Die Messung der Dicke einer Platte

Zubehör: 1. Sphärometer, 2. schwarzer Planspiegel, 3. die zu messende Glasplatte und ein kleiner Planspiegel als Hilfsplatte.

Die Messung. 1. Auf den schwarzen Spiegel wird der kleine Planspiegel M gelegt (Abb. 11) und ein wenig angedrückt, damit zwischen ihm und dem Spiegel nach Möglichkeit nur eine sehr dünne Luftschicht vorhanden ist.

2. Bei einer bestimmten Stellung des Auges des Beobachters ist ein System von farbigen Streifen zu sehen, das durch Interferenz der Lichtstrahlen entsteht. Diese Lichtstrahlen werden an der unteren und an der oberen Oberfläche, die die beschriebene dünne Luftschicht begrenzen, reflektiert.

3. Das Sphärometer wird auf dem schwarzen Spiegel so gestellt, daß das Ende der Schraube über der Mitte des Planspiegels M zu stehen kommt. (Die Schraube muß prophylaktisch so weit herausgedreht werden, daß sie den Planspiegel nicht berührt.)

4. Dann wird die Schraube langsam und gleichmäßig so weit gedreht, daß die Spitze der Schraube den Planspiegel M berührt. Das erkennt man an der Veränderung der Interferenzstreifen. Man muß in dem Moment die Schraube anhalten, in dem die Streifen gerade sich zu verändern beginnen.

5. In dieser Stellung wird die Zahl der Umdrehungen der Schraube und die Zahl der Teilstriche abgelesen. Daraufhin wird die Schraube etwas herausgedreht, erneut mit dem Planspiegel M in Berührung gebracht und wieder eine Ablesung durchgeführt. Man wiederholt diesen Vorgang mehrmals und bildet den Mittelwert aus allen Ablesungen.

6. Man dreht die Schraube genügend weit heraus und legt, ohne die Platten zu berühren, die zu messende Platte N so darunter, daß die Spitze der Schraube über ihrer Mitte steht.

7. Die Schraube wird mit der zu messenden Platte wie früher in Berührung gebracht und die Einstellung abgelesen. Man wiederholt diesen Vorgang mehrmals und bildet den Mittelwert.

8. Zieht man von diesen Ablesungen die vorhergehenden ab (die Ablesungen der Nullstellung), so erhält man den Wert für die Dicke der Platte N in ihrer Mitte.

Auf die gleiche Weise wird ihre Dicke an vier weiteren Punkten gemessen, die in der Nähe der vier Ecken der Platte liegen. Die erhaltenen Resultate zeigen, ob die gemessene Platte planparallel oder prismatisch ist. Im letzteren Falle berechnet man die mittlere Dicke der Platte N.

Nach Beendigung der Messung wird das Sphärometer auf die Unterlage gestellt und mit der Glasglocke zugedeckt.

Übung 2

Die Bestimmung des Krümmungsradius einer Linse

Zubehör: 1. Sphärometer, 2. Planspiegel, 3. plankonvexe Linse, 4. Maßstab mit Millimeterteilung.

Die Messung. 1. Man stellt das Sphärometer auf den Planspiegel und dreht die Schraube so weit herein, daß das Ende des Hebels A (Abb. 12) sich auf gleicher Höhe mit der Kante der Schneide d befindet. Bei dieser Stellung wird der Wert auf dem Maßstab und der Scheibe D abgelesen. Das Ergebnis wird aufgeschrieben, die Schraube herausgedreht und eine neue Messung begonnen. Der arithmetische Mittelwert aus drei bis fünf einzelnen Ablesungen ergibt die mittlere Höhe h_0, die der Nullstellung der Schraube entspricht.

2. Darauf wird die Schraube genügend weit herausgedreht (nicht weniger als $6 \cdots 8$ Umdrehungen), das Sphärometer auf die zu untersuchende Linse gestellt und ungefähr in ihrer Mitte die Schraube bis zur Berührung hereingedreht. Die Berührung erkennt man nach der oben beschriebenen Methode. Dabei werden wieder drei bis fünf einzelne Ablesungen durchgeführt. Deren Mittel ergibt den Wert h_1. Dann schiebt man das Sphärometer etwas zur Seite und erhält für diese Stellung ebenso den Mittelwert h_2 aus den einzelnen Beobachtungen. Auf diese Weise mißt man mindestens für drei solche Stellungen des Sphärometers. Der Mittelwert aus den Ergebnissen dieser drei Messungen ergibt die Schraubeneinstellung h, die der Höhe des Kugelsegments entspricht, dessen Grundfläche durch die Spitzen der Füße des Sphärometers geht. Hieraus findet man die Höhe des Segments $H = h - h_0$.

Endlich stellen wir das Sphärometer auf ein Blatt Papier, drücken leicht auf das ganze Gerät und messen mit einer Schublehre die Strecken zwischen den Eindrücken der drei Füße des Sphärometers.

Die Ausrechnung. Aus der letzten Messung wird der Radius des Kugelsegments auf der Linse berechnet, der durch die Füße des Sphärometers ausgeschnitten wird. Man benutzt folgende Formel:

$$r = \frac{a\,b\,c}{4\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}},$$

wo a, b und c die Strecken zwischen den Füßen des Sphärometers und p die halbe Summe dieser Abstände bezeichnen. Kennt man r und H, so läßt sich der Krümmungsradius der Linse nach der Formel

$$R = \frac{r^2}{2H} + \frac{H}{2}$$

berechnen.

Nach Beendigung aller Messungen muß die Schraube des Sphärometers etwas herausgedreht und das Gerät mit der Glasglocke bedeckt werden.

Aufgabe 3

Die Prüfung der Fallgesetze mit der ATWOODschen Fallmaschine

Zubehör: 1. ATWOODsche Fallmaschine (dazu gehört eine ringförmige Plattform, eine rechteckige Plattform, Elektromagnet, Hauptgewichte und ein Satz von Zusatzgewichten), 2. Stoppuhr, 3. Stromschalter.

Grundlagen. Die Maschine besteht aus einer senkrecht an der Wand angebrachten metallischen Leiste A (Abb. 13), die eine in Zentimeter geteilte Skala trägt. Am oberen Ende der Leiste ist eine leichte Aluminiumrolle B angebracht, die nur geringe Reibung besitzt. Über die Rolle ist ein dünner Faden geworfen, an dem die Gewichte C und C' hängen, die die gleiche Masse m besitzen. Das Gewicht C' enthält im Inneren eine Eisenplatte und kann deshalb durch den Elektromagneten M gehalten werden. Die Masse der Gewichte C und C' kann durch kleine Zusatzgewichte (Übergewichte) D und E vergrößert werden. Wenn auf das Gewicht C eines von diesen Zusatzgewichten der Masse m_1 gelegt wird, so fängt das ganze System an, sich gleichmäßig beschleunigt zu bewegen.

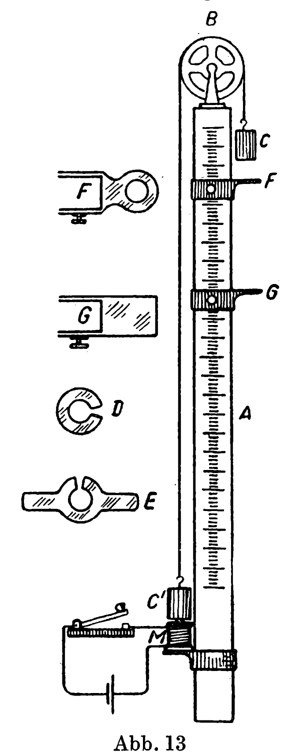


Abb. 13

Die Größe der Beschleunigung kann man aus folgenden Überlegungen bestimmen: Auf jedes Gewicht wirken zwei Kräfte — die Schwerkraft und die Spannkraft des Fadens, unter deren Einfluß sich die Gewichte in Bewegung setzen (man vernachlässigt dabei die Reibungskräfte und setzt den Faden als gewichtslos voraus). Wenn man annimmt, daß der Faden nicht dehnbar ist, so wird die Beschleunigung des rechten und des linken Gewichtes dem Betrage nach gleich und dem Vorzeichen nach entgegengesetzt sein. Wenn man außerdem annimmt, daß die Rolle gewichtslos ist, so ist die Spannung des Fadens sowohl rechts als auch links gleich. Auf Grund des zweiten NEWTONschen Gesetzes kann man schreiben:

$$(m + m_1)\,a = (m + m_1)\,g - T$$

und

$$-ma = mg - T,$$

wobei a die Beschleunigung des Systems, T die Fadenspannung und g die Schwerebeschleunigung ist. Die Lösung dieser Gleichungen gibt uns die Größe der Fadenspannung und die Größe der Beschleunigung an:

$$a = g\,\frac{m_1}{2m + m_1}, \tag{1}$$

$$T = gm\,\frac{2m + 2m_1}{2m + m_1} = gm\left(\frac{1 + \frac{m_1}{m}}{1 + \frac{m_1}{2m}}\right). \tag{2}$$

Eine genauere Bestimmung der Beschleunigung des Systems erfordert die Berücksichtigung des Gewichtes der Rolle. Die Fadenspannung ist in diesem Falle rechts und links von der Rolle verschieden. Die vorhin angeführten Gleichungen müssen noch durch eine Beziehung zwischen den Drehmomenten vervollständigt werden, die durch die Gesetze der Drehbewegung der Rolle bestimmt wird. Wenn wir, wie früher, den Faden als gewichtslos und nicht dehnbar annehmen, erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$(m + m_1)\, a_1 = (m + m_1)\, g - T_2,$$
$$-m\, a_1 = mg - T_1,$$
$$J\varepsilon = \alpha m_0 r^2 \varepsilon = (T_2 - T_1)\, r.$$

Hierbei ist J, das gleich $\alpha m_0 r^2$ ist, das Trägheitsmoment der Rolle, m_0 die Masse und r der Radius der Rolle, ε die Winkelbeschleunigung und α ein Koeffizient, der von der Massenverteilung der Rolle abhängt. Wenn ein Gleiten des Fadens über die Rolle ausgeschlossen wird, ist die Winkel- und die Linearbeschleunigung verknüpft durch die Gleichung

$$a_1 = \varepsilon r.$$

Die Lösung des oben angeführten Gleichungssystems ergibt die Beschleunigung

$$a_1 = g\,\frac{m_1}{2m + m_1 + \alpha m_0}$$

und die Größen der Fadenspannungen T_1 und T_2.

Die Reibungskraft verkleinert noch die Größe der Beschleunigung.

Wie aus den oben angeführten Formeln hervorgeht, bewegt sich das System mit einer Beschleunigung, die kleiner ist als die Beschleunigung des freien Falles. Durch Vergrößerung des Übergewichtes m_1 kann man die Beschleunigung des Systems vergrößern. Wenn man das Gewicht m_1 während der Zeit der Bewegung herunternimmt, so erfolgt die Weiterbewegung des Systems mit konstanter Geschwindigkeit, und zwar mit der, die das System im Moment des Abnehmens des Übergewichtes besitzt. Die Leiste A (Abb. 13) trägt zwei verschiebbare Plattformen: G ist eine rechteckige und F eine ringförmige (zum Abnehmen des Übergewichtes von der Form E): Beide Plattformen können mit Schrauben an jeder beliebigen Stelle der Leiste fixiert werden.

Die Messung der Zeitabstände erfolgt mit einer Stoppuhr. Die Atwoodsche Fallmaschine gestattet es, die Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung und das zweite Newtonsche Gesetz zu prüfen. Das ist das Ziel dieser Aufgabe, wenn auch die Prüfung wegen der Anwesenheit von Reibungskräften nur Näherungscharakter trägt.

Die Messung. Die Prüfung des Weggesetzes: $S = {}^1/_2\, at^2$. Auf das Gewicht C wird das Zusatzgewicht D (eins, zwei usw.) gelegt, der Stromkreis des Elektromagneten geschlossen und das System in den Anfangszustand gebracht, d. h., das Gewicht C_1 befindet sich unten und wird durch den Elektromagneten gehalten. Dann wird die rechteckige Plattform so eingestellt, daß eine bestimmte Entfernung S zwischen dem unteren Ende des Gewichts C und der Plattform besteht. Danach wird der Stromkreis des Elektromagneten unter-

brochen (durch Drücken einer Taste) und gleichzeitig die Stoppuhr ausgelöst. Sie wird in dem Augenblick gestoppt, wo das Gewicht C auf die Plattform aufschlägt. Damit erhält man die Zeitdauer t der Bewegung.

Man verrückt die Stellung der Plattform auf der Leiste und erhält für verschiedene Entfernungen S die Zeiten t, indem man als Mittelwert den kleinsten Wert aus den drei Messungen bei der gleichen Entfernung S nimmt.

Bei ein und demselben Übergewicht wird die Beschleunigung des Systems stets die gleiche sein. Deshalb muß (angenähert) die Beziehung gelten:

$$a = \frac{2S_1}{t_1^2} = \frac{2S_2}{t_2^2} = \cdots = \frac{2S_n}{t_n^2}.$$

Die Prüfung des Geschwindigkeitsgesetzes: $v = a \cdot t$. Für die Prüfung dieser Beziehung wird auf das Gewicht C ein Übergewicht E gelegt und das System durch den Elektromagneten in Ruhe gehalten. Etwas unterhalb des Gewichts C wird die ringförmige Plattform gebracht und noch tiefer — die rechteckige. Man unterbricht den Stromkreis und löst gleichzeitig die Stoppuhr aus. Man mißt die Zeit t_1 vom Anfangsmoment der Bewegung bis zum Abnehmen des Übergewichtes durch die ringförmige Plattform. Ebenfalls mißt man die Zeit t_1' vom Moment des Abnehmens des Übergewichtes bis zum Moment des Aufschlagens des Gewichts auf die rechteckige Plattform. Kennt man die Entfernung zwischen den Plattformen und die Höhe des Gewichts C, so kann man die Geschwindigkeit v_1 der gleichförmigen Bewegung des Gewichts bestimmen. Für die Zeitdauer t_1 muß man als Mittelwert den kleinsten Wert von den drei einzelnen Messungen nehmen.

Beim Vergrößern des Abstands zwischen dem hängenden Gewicht und der ringförmigen Plattform wächst auch die Geschwindigkeit der gleichmäßigen Bewegung. Bei ein und demselben Übergewicht ist die Beschleunigung des Systems die gleiche, deshalb gilt (angenähert):

$$a = \frac{v_1}{t_1} = \frac{v_2}{t_2} = \cdots = \frac{v_n}{t_n}.$$

Die Prüfung des zweiten NEWTONschen Gesetzes: $f = M \cdot a$. Wenn man die Zusatzgewichte von dem Gewicht C herunternimmt und auf das Gewicht C' legt, so erfährt die Masse des gesamten Systems keine Änderung, doch ändert sich die resultierende äußere Kraft, die an dem System angreift, und damit auch die Beschleunigung der Bewegung des Systems. Für zwei verschiedene Fälle erhalten wir:

$$f_1 = M a_1, \qquad f_2 = M a_2,$$

$$S_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2, \qquad S_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2.$$

Durch Division dieser Ausdrücke erhalten wir entsprechend:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{und} \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1 t_1^2}{a_2 t_2^2},$$

das ergibt:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{S_1}{S_2} \frac{t_2^2}{t_1^2}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich prüfen. Die Prüfung wird genauso ausgeführt wie in der Übung 1.

Zuerst werden auf das Gewicht C' Zusatzgewichte mit der Masse z. B. von 1 g und auf das Gewicht C von 3 g gelegt. Das ergibt $f_1 = 2p$. Man bestimmt bei solcher Verteilung der Übergewichte einige Werte von S_1 und t_1 (bei verschiedenen Stellungen der rechteckigen Plattform). Danach legt man alle 4 g auf das Gewicht C, das ergibt $f_2 = 4p$ (die Masse des gesamten Systems bleibt dabei unverändert), und bestimmt erneut einige Werte von S_2 und t_2. Alle Ausdrücke des Typs $\frac{S_1 t_2^2}{S_2 t_1^2}$ müssen untereinander annähernd gleich und in diesem speziellen Fall fast $1/2$ sein. Das bildet die Prüfung des zweiten NEWTONschen Gesetzes.

Aufgabe 4

Die Bestimmung der Schwerebeschleunigung mit Hilfe eines Pendels

Grundlagen. Jeder Körper, der an einem Punkt höher als sein Schwerpunkt aufgehängt ist, kann Schwingungen ausführen und stellt ein *physikalisches Pendel* dar. Die Schwingungsdauer der einfachen Schwingung eines solchen Pendels wird mit genügender Genauigkeit durch die Formel[1])

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \tag{1}$$

ausgedrückt. Hierbei ist g die Schwerebeschleunigung, α der Winkel der Auslenkung des Pendels von der Vertikalen und l die *reduzierte Pendellänge*, d. h. die Länge eines mathematischen Pendels, das die gleiche Schwingungsdauer besitzt wie das vorliegende physikalische Pendel. Diese Größe wird durch die Beziehung

$$l = \frac{K}{M a} \tag{2}$$

bestimmt, wobei K das Trägheitsmoment des physikalischen Pendels bezüglich der Achse durch den Aufhängepunkt, M die Masse des Pendels und a der Abstand zwischen der Drehachse und dem Schwerpunkt des Pendels bedeuten.

Aus dem Ausdruck (1) für die Schwingungsdauer ist ersichtlich, daß die Frage nach der Bestimmung der Beschleunigung g mit Hilfe des Pendels auf die Bestimmung der Schwingungsdauer T, der reduzierten Länge l und der Amplitude α zurückgeführt wird. Die erste Größe wird entweder bestimmt durch unmittelbares Messen der Zeitdauer einer bestimmten Anzahl (100 bis 200) von Schwingungen des Pendels mit der Stoppuhr und nachfolgender Teilung der Zeitdauer durch die Anzahl der Schwingungen, oder besser nach

---

[1]) In dieser Formel wird die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude berücksichtigt, d. h., sie ist auch für solche Auslenkungen des Pendels anwendbar, bei denen die Schwingungen nicht mehr als streng harmonisch betrachtet werden können.

der Koinzidenzmethode, die weiter unten beschrieben wird. Die Größe l läßt sich entweder ausrechnen, wenn die Ausmaße und die Masse des Pendels bekannt sind, oder unmittelbar bestimmen, wenn man ein sogenanntes *Reversionspendel* benutzt.

Übung 1

Die Bestimmung von g mit Hilfe eines Sekundenpendels

Zubehör: 1. Uhr mit Sekundenpendel, 2. Stoppuhr, 3. Eisenkugel mit Öse, 4. Aufhängevorrichtung, 5. Maßstab mit zwei Spiegelskalen an den Enden, 6. Schublehre, 7. Lampe, 8. Faden (dünner Draht), 9. Fernrohr, 10. Elektromagnet mit Schalter.

Beschreibung des Gerätes. Das hier benutzte Pendel besteht aus einer Eisenkugel A (Abb. 14), die mit einem Haken versehen und an einem dünnen Draht an der Aufhängevorrichtung L vor der Uhr mit dem Sekundenpendel aufgehängt ist. Die Aufhängevorrichtung besteht aus einer stählernen Schneide p, die an der Deckplatte des Uhrengehäuses befestigt ist. Die Kante der Schneide steht horizontal. Auf der Plattform oberhalb der Schneide befindet sich eine Stange a, die mit einer Durchbohrung zur Befestigung des Drahtes versehen ist. Sie läßt sich drehen (um den Draht aufzuwickeln) und wird durch die Schraube S in bestimmter Stellung festgehalten. Vor das Pendel wird in einer Entfernung von etwa 1,5 m ein Fernrohr so aufgestellt, daß seine Achse senkrecht zur Schwingungsebene des Pendels liegt.

Um die Kugel aufzuhängen, nimmt man einen genügend langen Draht (etwa 110 cm), macht an einem Ende eine Schlaufe für den Haken der Kugel, indem man das Schlaufenende mindestens 10mal verdrillt (sonst löst sich die Schlaufe). Die andere Seite des Drahtes wird durch das Loch in der Stange a gesteckt und durch Verdrillen oder Verknoten befestigt. Dann wird der Draht so weit auf die Stange gewickelt, bis der Abstand zwischen dem Aufhängepunkt (Schneidenkante) und der Mitte der Kugel etwa 101 bis 102 cm beträgt.

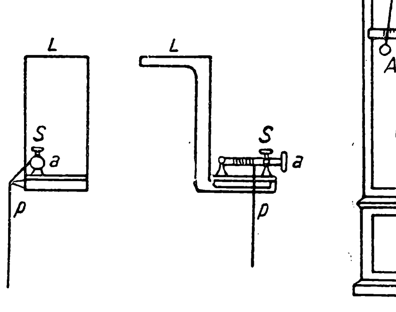


Abb. 14

In der Schwingungsebene des Pendels steht ein Elektromagnet, der durch Anziehung der Kugel die Anfangsauslenkung bestimmt. Durch Öffnen des Schalters wird der Stromkreis unterbrochen, und das freigegebene Pendel fängt an zu schwingen.

Die Messung. Die Messung der Pendellänge. Um die Pendellänge auszumessen, wird hinter dem Pendel die Spiegelskala aufgehängt und die

Stellung der Schneidenkante, die als Schwingungsachse dient, abgelesen. Dazu blickt man so auf die Schneidenkante, daß sie und ihr Spiegelbild in einer Geraden liegen. Die Stellung des Aufhängepunktes wird auf der Skala auf Millimeter genau abgelesen. Ebenso erfolgt die Ablesung der Stellung des unteren Randes der Kugel. Letzteres kann man mit Hilfe des Fernrohrs, indem man es in gleiche Höhe mit dem unteren Rande der Kugel bringt. Aus diesen Ablesungen kann man leicht die Pendellänge bestimmen, da der (gegenseitige) Abstand der Nullpunkte der beiden Spiegelskalen voneinander gegeben ist.

Um den Radius der Kugel zu bestimmen, mißt man mit der Schublehre an drei senkrecht zueinander liegenden Durchmessern und nimmt den halben Mittelwert.

Die Messung der Schwingungsdauer des Pendels. Man nimmt die Stoppuhr in die Hand, schaut durch das Fernrohr und paßt den Moment ab, wenn der Pendeldraht und eine auf das Uhrenpendel aufgeklebte Marke das Gesichtsfeld des Fernrohrs koinzident passieren. In diesem Moment wird die Stoppuhr ausgelöst. Nach einiger Zeit werden die zuerst auseinanderlaufenden Pendel sich wieder einander nähern und endlich erneut koinzidieren und das Gesichtsfeld gleichzeitig in einer Richtung passieren. In diesem Augenblick wird die Zeit gestoppt. Auf solche Weise findet man das Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Koinzidenzen (n sec). In dieser Zeit hat das Sekundenpendel n einfache Schwingungen und das zu untersuchende Pendel, das nach Voraussetzung langsamer schwingt, $n-2$ einfache Schwingungen ausgeführt. Deshalb kann man schreiben:

$$t \cdot (n-2) = n,$$

wobei t die gesuchte Schwingungsdauer ist. Aus dieser Formel erhält man:

$$t = \frac{n}{n-2}.$$

Der Versuch wird dreimal wiederholt.

Man verkürzt das Pendel so viel, daß es schneller als das Sekundenpendel schwingt (Abstand zwischen Aufhängepunkt und Kugelmitte etwa 98 cm), mißt seine Länge und führt erneut drei Versuche durch, aus denen man analog findet:

$$t = \frac{n}{n+2}.$$

Die Messung der Amplitude der Schwingung. Die Messung der Amplitude der Schwingung α wird an einer besonderen Skala ausgeführt, die an der Tür des Uhrengehäuses angebracht ist. Da die Amplitude während der Ausführung des Versuches nur unwesentlich abnimmt, kann man annehmen, daß die Amplitude der Schwingung während des ganzen Versuches gleich dem arithmetischen Mittel aus der Anfangs- und der Endamplitude ist.

Die Ausrechnung. Ist die Drahtlänge des Pendels und der Radius der Kugel bekannt, so kann man, wenn man den STEINERschen Satz benutzt, das

Trägheitsmoment des Pendels in bezug auf den Aufhängepunkt berechnen. Für den Fall einer Kugel am Faden lautet er:

$$K = M\left(a^2 + \frac{2}{5}r^2\right),$$

wobei K, M und a die gleichen Größen sind, die auch in die Formel (2) eingehen und r der Radius der Kugel ist. Für die Berechnung von a nimmt man erstens an, daß die Masse des gesamten Pendels gleich der Masse der Kugel ist, d. h., man vernachlässigt die Masse des Fadens, der zur Aufhängung dient, und zweitens, daß der Schwerpunkt des Pendels mit dem Schwerpunkt der Kugel zusammenfällt, d. h., man setzt die Pendellänge gleich der Länge des Fadens plus Radius der Kugel. Wenn man berücksichtigt, daß die Schwingungen des Pendels in Luft vor sich gehen, ist es notwendig, eine Korrektur einzuführen, die durch den Auftrieb verursacht wird. In diesem Fall muß man die Masse des Pendels (der Kugel) messen.

Tatsächlich finden wir, wenn wir wie früher die Masse der Kugel mit M und die Masse der durch sie verdrängten Luft mit m bezeichnen, daß die wahre Schwerebeschleunigung g' größer sein muß als die gefundene, und zwar im Verhältnis $\frac{M}{M-m}$, so daß

$$g' = g\,\frac{M}{M-m}$$

ist. Die Größe M wird durch Wägung und m aus der Formel

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \delta$$

bestimmt, wobei δ die Dichte der Luft ist. Man kann sie gleich 0,0012 g/cm annehmen.

Übung 2

Die Bestimmung von *g* mit dem Reversionspendel

Zubehör: 1. Reversionspendel, 2. Stoppuhr.

Die Anwendung des Reversionspendels zur Bestimmung der Schwerebeschleunigung g beruht auf der Eigenschaft der Vertauschbarkeit des *Schwingungsmittelpunktes* mit dem Aufhängepunkt. Diese Eigenschaft besteht darin, daß man bei jedem physikalischen und folglich auch bei dem Reversionspendel stets zwei Punkte finden kann, bei denen das Pendel, an diesem oder jenem Punkt aufgehängt, die gleiche Schwingungsdauer besitzt. Der Abstand zwischen diesen Punkten ist gleich der reduzierten Länge l des gegebenen Pendels.

Wenn die Amplitude der Schwingung des Pendels klein ist, so wird die Zeit einer einfachen Schwingung, d. h. die Schwingungsdauer, durch die Formel ausgedrückt:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{K}{Mga}},$$

wobei g die Schwerebeschleunigung ist. Nach dem STEINERschen Satz ist

$$K = K_0 + M a^2,$$

worin K_0 das Trägheitsmoment des Pendels in bezug auf die Achse darstellt, die durch den Schwerpunkt und parallel der Schwingungsachse verläuft, und die Größen K, M und a die gleichen sind wie in Formel (2). Aus den beiden letzten Formeln erhalten wir:

$$T = \pi \sqrt{\frac{K_0 + M a^2}{M g a}}. \tag{3}$$

Nehmen wir an, daß wir bei dem gegebenen Reversionspendel die beiden Stellungen der Schwingungsachse gefunden haben, für die die Schwingungsdauer T gleich ist, dann können wir auf Grund der Beziehung (3) schreiben:

$$T = \pi \sqrt{\frac{K_0 + M a_1^2}{M g a_1}} = \pi \sqrt{\frac{K_0 + M a_2^2}{M g a_2}}.$$

Hier bezeichnen a_1 und a_2 die Abstände zwischen dem Schwerpunkt des Reversionspendels und den beiden Achsen. Daraus folgt:

$$\left(\frac{T}{\pi}\right)^2 g\,(a_1 - a_2) = a_1^2 - a_2^2.$$

Wenn a_1 ungleich a_2 ist, d. h., wenn die Schwingungsachsen in verschiedenen Entfernungen vom Schwerpunkt liegen, dann können wir durch $(a_1 - a_2)$ dividieren und erhalten

$$g = \frac{\pi^2 (a_1 + a_2)}{T^2}. \tag{4}$$

Die Größe $a_1 + a_2$, die gleich dem Abstand zwischen den Schwingungsachsen des Pendels mit gleicher Schwingungsdauer ist, ist nichts anderes als die reduzierte Länge l des vorliegenden Reversionspendels. Diese Formel zeigt, daß bei der Bestimmung von g mit dem Reversionspendel die Hauptaufgabe darin besteht, auf dem Pendel zwei relativ zum Schwerpunkt asymmetrische Stellungen der Schwingachsen zu finden, für die bei Schwingungen um diese Achsen die Schwingungsdauer T die gleiche bleibt. Dann gibt uns die Entfernung zwischen den Achsen die Größe $a_1 + a_2$.

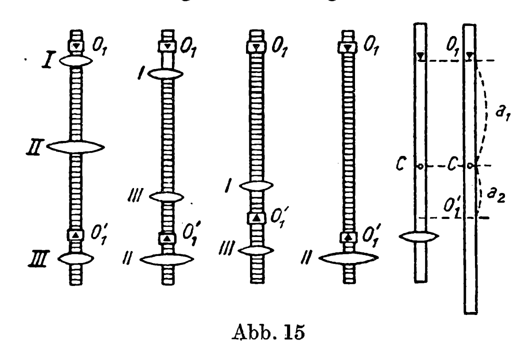


Abb. 15

Die Reversionspendel haben je nach den an sie gestellten Forderungen ganz verschiedene Formen. Eines der Pendel ist in Abb. 15 dargestellt. Es besteht aus einem Metallstab von etwas über 1 m Länge, dessen Oberfläche eine Millimeterteilung trägt. Man kann an jeder beliebigen Stelle des Stabes die verschiebbaren schweren linsenförmigen Gewichte, I, II, III

und die Aufhängeschneiden O_1 und O_1' befestigen. Die verschiedenen Kombinationen der Linsen und ihrer Stellungen auf dem Stabe ergeben die verschiedenen Typen des Reversionspendels. Bei einigen Konstruktionen des Reversionspendels lassen sich die Aufhängeschneiden nicht verschieben. Dann können nur die schweren Gewichte (Linsenform) verschoben werden.

Die Messung. Die Schwingungsdauer wird mit einer Stoppuhr bestimmt. Man mißt mehrmals (wenigstens 2- bis 3mal) die Zeit von 100 vollen Schwingungen und findet durch Ausrechnen die Zeit einer einfachen Schwingung. Durch Verschieben der Linsen oder Schneiden erreicht man das Zusammenfallen der Schwingungsdauer des Pendels bei seinem Schwingen um beide Schneiden. Man mißt die Entfernung zwischen den Schneiden und errechnet nach der Formel (4) die Schwerebeschleunigung. Bei den Messungen ist es unzulässig, größere Schwingungsamplituden zu benutzen als 6 bis 8°.

Aufgabe 5

Genaue Wägung

Zubehör: 1. Analysenwaage, 2. Gewichtsatz, 3. zu wägender Körper.

Beschreibung der Waage. Hier ist die Rede von einer Analysenwaage, d. h. einer Waage, die bei genauen chemischen Analysen verwendet wird. Diese Waage ist von einem Glaskasten umgeben, der sie vor Staub und Luftströmungen schützt (siehe Abb. 16). Zum Bedienen der Waage lassen sich die Wände des Kastens hochschieben. Die Waage selbst besteht aus einem gleicharmigen Schenkel BB, dem sogenannten Waagebalken, dessen Stützpunkt aus einer gehärteten Stahlschneide a besteht, die in der Mitte des Waagebalkens senkrecht zu seiner Fläche eingesetzt ist. Die Schneide liegt auf einem polierten Achatplättchen (Kissen) auf, das am oberen Ende der Säule A befestigt ist. An den beiden Enden des Waagebalkens befinden sich im gleichen Abstand von der mittleren Schneide Vorrichtungen, die zur Aufhängung der Schalen CC dienen. Im allgemeinen sind

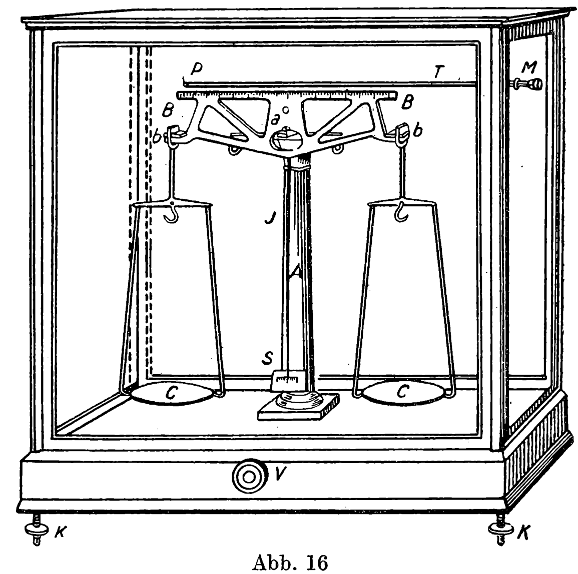


Abb. 16

es zwei Schneiden bb. Die Kanten der mittleren und der äußeren Schneiden müssen parallel zueinander verlaufen. Wenn auf den Waagschalen keine Gewichte liegen, muß der Waagebalken horizontal oder fast horizontal stehen. Zur Ermittlung der Stellung des Waagebalkens dient ein langer Zeiger J, der in der Mitte des Waagebalkens senkrecht zu der Linie, die die äußeren Schneiden verbindet, befestigt ist. Das Zeigerende bewegt sich vor der Skala S, die sich am unteren Ende der Säule A befindet. Bei horizontaler Stellung des Waagebalkens muß der Zeiger auf die Mitte der Skalenteilung weisen.

Die wesentlichste Größe, die eine Waage charakterisiert, ist ihre *Empfindlichkeit.* Als Empfindlichkeit einer Waage bezeichnet man das Verhältnis vom Tangens des Winkels der Zeigerauslenkung zum Zusatzgewicht p, das eine solche Auslenkung hervorruft, oder ein dieser Größe proportionales Verhältnis der Zahl der Teilstriche, um die sich der Zeiger auf der Skala S verschiebt, zu demselben Zusatzgewicht p (gewöhnlich ist $p = 1$ mg). Sie wird durch die Formel

$$\omega = \frac{L \cos\alpha}{(2P + p)\, L \sin\alpha + K h}$$

ausgedrückt, wobei L die Länge der Arme des Waagebalkens, K sein Gewicht, h den Abstand zwischen dem Schwerpunkt des Waagebalkens und der unteren Kante der mittleren Schneide, P die Belastung der Waage und α den Winkel zwischen den Armen des Waagebalkens und der Horizontalen bedeuten. Aus der Formel geht hervor, daß die Empfindlichkeit im allgemeinen von der Belastung abhängt. Liegen jedoch die Kanten aller drei Schneiden in einer Ebene, und kann man die Durchbiegung der Arme vernachlässigen, so ist die Empfindlichkeit ω eine Konstante und wird durch die Formel

$$\omega = \frac{L}{K h}$$

ausgedrückt. Bei einer fertigen Waage können wir nur die Größe h verändern d. h. den Schwerpunkt des Waagebalkens nach oben oder unten verschieben, und damit die Empfindlichkeit der Waage ändern. Das wird durch besondere, für verschiedene Waagen unterschiedliche Vorrichtungen erreicht. Sie bestehen im allgemeinen aus Gewichten, die in vertikaler Richtung verschoben werden.

Um nicht bei Wägungen Gewichte unter 10 mg verwenden zu müssen, die wegen ihrer Kleinheit unbequem zu handhaben sind, benutzt man einen sogenannten *Reiter,* d. h. einen zu einem Haken gebogenen dünnen Draht, der ein Gewicht von 10 mg besitzt. Der Reiter wird auf einem der Arme des Waagebalkens, der in gleiche Teile eingeteilt ist, gesetzt. Gewöhnlich ist jeder Arm des Waagebalkens in 10 gleiche Teile geteilt. Wenn der Reiter auf den ersten, zweiten, dritten usw. Teilstrich, von der Mitte des Waagebalkens aus gezählt, gesetzt wird, so bewirkt er das gleiche wie ein auf die Waagschale gelegtes Gewicht von 1, 2, 3 usw. Milligramm. Das Auflegen und Abnehmen des Reiters geschieht, ohne den Kasten zu öffnen, durch eine besondere Vorrichtung. Sie besteht aus einem Messingstab T (Abb. 16), der durch eine Seitenwand des Kastens geführt ist und parallel zum Waagebalken ver-

schoben werden kann. Der Stab ist um seine Achse drehbar und besitzt an dem Ende außerhalb des Kastens einen Kopf M und innerhalb einen Haken P, der in die Öse des Reiters geschoben wird, wenn er abgehoben werden soll.

Wenn die Waage nicht benutzt wird, muß sie arretiert werden. Das läßt sich mit einer besonderen Anordnung innerhalb der Säule der Waage durchführen, mit deren Hilfe der Waagebalken und die Schalen etwas angehoben werden. Dadurch werden die Schneiden von dem Druck auf die Unterlagen befreit und eine unnötige Abnutzung vermieden. Die Vorrichtungen für die Arretierung unterscheiden sich bei den verschiedenen Waagen. Im allgemeinen geschieht die Arretierung und das Freigeben des Waagebalkens durch Drehen des Knopfes V, der sich an dem unteren Teil der Waage befindet.

Jede Waage ist für eine bestimmte Höchstbelastung berechnet. Diese ist auf der Waage angegeben und darf in keinem Falle überschritten werden, wenn eine Verbiegung des Waagebalkens vermieden werden soll. Deshalb ist jeder Waage ein entsprechender Gewichtsatz in einem Holzkästchen beigegeben.

Die Aufstellung einer Waage. Die Säule der Waage muß vertikal stehen. Das wird durch ein hinter der Säule hängendes Lot geprüft. Der Faden des Lotes muß sich in der Mitte eines kleinen Ringes befinden, durch den das Lot geführt ist. Man erreicht dies durch ein entsprechendes Drehen der Standschrauben K (Abb. 16). Wenn die Säule der Waage vertikal gestellt ist, muß das Ende des Zeigers J des Waagebalkens bei Nichtbelastung und entarretierter Waage ungefähr auf die Mitte der Skala S weisen. Ist dieses nicht erfüllt, d. h., weicht das Zeigerende um mehr als 2 bis 3 Skalenteile von der Mitte ab, so läßt sich das dadurch ausgleichen, daß man kleine Messinggewichte an den Enden des Waagebalkens BB etwas verschiebt. Diese Handhabung erfordert große Behutsamkeit und Übung.

Regeln für den Umgang mit Waagen:

1. Solange die Waage nicht arretiert ist, dürfen weder Gewichte auf die Waagschalen gelegt oder heruntergenommen (man darf sogar die Waagschalen nicht berühren) noch der Reiter auf dem Waagebalken verschoben werden.

2. Die Gewichte müssen so auf die Waagschalen gelegt werden, daß der Schwerpunkt aller auf eine Waagschale gelegten Gewichte nach Möglichkeit über der Mitte der Schale liegt.

3. Man darf die Gewichte nicht mit der Hand anfassen, sondern muß dazu eine Pinzette benutzen. Die kleinen Gewichte der flachen Form (Bruchteile eines Grammes) werden an den umgebogenen Ecken mit der Pinzette gefaßt.

4. Die heruntergenommenen Gewichte müssen sofort in das Kästchen gelegt werden, jedes auf den dafür bestimmten Platz.

5. Der Waagebalken darf nicht vollständig entarretiert werden, solange die Waagschalen noch wenig abgeglichen sind. Er wird nur so weit angehoben, daß man beurteilen kann, welche der Schalen leichter ist, d. h. nach welcher Seite der Zeiger ausschlägt. Dann wird sofort wieder arretiert und die Ge-

wichte vermehrt oder vermindert. (Bei einem geringen Unterschied zwischen dem zu wägenden Körper und den Gewichten fängt der Waagebalken an zu pendeln.)

6. Das Freigeben und Arretieren des Waagebalkens muß stets langsam und stetig erfolgen. Wenn die Waage pendelt, muß man zu dem Zeitpunkt vorsichtig arretieren, wenn der Zeiger die Gleichgewichtsstellung passiert, sonst erhält der Waagebalken Stöße.

7. Wenn die Waagschalen pendeln, müssen sie vorher durch ein Blatt Papier, mit dem man gegen ihren Rand drückt, beruhigt werden. Erst dann kann die vollständige Entarretierung erfolgen.

8. Beim Beobachten des Pendelns der Waage müssen die Türen des Gehäuses unbedingt geschlossen sein.

9. Wenn es sich nach dem Freigeben des Waagebalkens herausstellt, daß die Amplitude der Schwingungen zu klein ist (es genügt eine Amplitude von 3 bis 4 Skalenteilen nach jeder Seite von der Mitte der Skala), so öffnet man eine Tür etwas und fächelt leicht vor der Waage. Dann erteilt gewöhnlich der Luftstrom dem Waagebalken eine genügend große Amplitude.

10. Man darf die Gewichte nicht lange auf den Schalen belassen, besonders wenn die Waage entarretiert ist. Wenn die Wägung beendet ist, muß die Waage arretiert, die Gewichte heruntergenommen und die Türen geschlossen werden.

Die Messung. Für die Durchführung einer genauen Wägung ist es notwendig: 1. den Nullpunkt der Waage zu bestimmen, 2. ihre Empfindlichkeit zu bestimmen, 3. die Wägung selbst durchzuführen und 4. die durch den scheinbaren Gewichtsverlust des Körpers in Luft bedingten Korrekturen anzubringen.

Die Bestimmung des Nullpunktes einer Waage. Vor jeder Wägung muß man die Gleichgewichtslage der unbelasteten Waage bestimmen, d. h. den Skalenteil e_0 der Skala, auf den sich der Zeiger bei Abwesenheit der Reibung einstellen würde. Diesen Skalenteil bezeichnet man als *den Nullpunkt* der Waage. Um den Einfluß der Reibung auszuschalten, wird der Nullpunkt bei schwingender Waage bestimmt.

Beim Schwingen des Waagebalkens führt der Zeiger eine Pendelbewegung aus. Wir nehmen an, daß der Zeiger beim Pendeln nach links den Strich a_1 der Skala erreicht (wenn wir von dem äußeren linken Strich aus zählen) und bei dem nächsten Pendeln nach rechts den Strich a_2. Wenn der Zeiger den gleichen Pendelausschlag nach beiden Seiten von der Gleichgewichtsstellung besitzen würde, dann würde die Gleichgewichtsstellung selbst sich als halbe Summe der Größen a_1 und a_2 ergeben. In Wirklichkeit werden die Ausschläge mit der Zeit kleiner: Der erste Ausschlag nach links ist größer als der nächste nach rechts und dieser wiederum größer als der nächste nach links usw. Deshalb würde die halbe Summe der Größen a_1 und a_2 nicht den wahren Nullpunkt der Waage ergeben.

Wir nehmen nun drei aufeinanderfolgende Ausschläge des Zeigers, a_1, a_2 und a_3, von denen zwei, a_1 und a_3, nach der linken und eine, a_2, nach der rechten Seite schwingen. Wenn wir die halbe Summe der Größen a_1 und a_3 nehmen, so erhalten wir eine Zahl, die, relativ zu a_2, die Bedingung der

Gleichheit der Ausschläge nach beiden Seiten von der Gleichgewichtsstellung mehr erfüllt als die einzelnen Größen a_1 und a_3. Folglich wird der durch

$$\frac{\frac{a_1 + a_3}{2} + a_2}{2}$$

berechnete Nullpunkt der wahren Stellung näher kommen.

Weil die Änderung der Amplitude nicht der Zeit proportional, sondern nach einem Exponentialgesetz erfolgt, erhält man z. B. bei fünf aufeinanderfolgenden Schwingungen, a_1, a_2, a_3, a_4 und a_5, von denen drei a_1, a_3, a_5, nach der einen Seite und zwei, a_2, a_4, nach der anderen schwingen, wenn man die Ausschläge nach jeder Seite mittelt, offensichtlich eine Größe, die der Bedingung der Gleichheit der Ausschläge nach beiden Seiten von der Gleichgewichtsstellung noch mehr entspricht. Der Nullpunkt e_0 der Waage, der zu

$$e_0 = \frac{\frac{a_1 + a_3 + a_5}{3} + \frac{a_2 + a_4}{2}}{2}$$

berechnet wird, liegt der wahren Gleichgewichtsstellung noch näher.

Werden die Ausschläge a nicht von dem äußersten linken, sondern von dem mittleren Teilstrich der Skala aus gezählt, so versteht es sich von selbst, daß den nach verschiedenen Seiten durchgeführten Ablesungen auch verschiedene Vorzeichen zugeschrieben werden. Im allgemeinen werden die Ablesungen negativ gezählt, die zu Ausschlägen nach der linken Seite gehören.

Gewöhnlich beschränkt man sich bei der Bestimmung des Nullpunktes der Waage auf die Beobachtung von fünf aufeinanderfolgenden Ausschlägen. Man schreibt daher die Ablesungen der Ausschläge nach der linken Seite in eine linke Spalte und die nach der rechten in eine rechte. Man nimmt immer einen Ausschlag mehr von der Seite, bei welcher man die Beobachtung der Schwingungen anfängt. Wenn nach dem Entarretieren die Ausschläge der Schwingungen sehr klein sind, so werden sie dadurch vergrößert, daß man über einer der Schalen schwach mit einem Blatt Papier fächelt. Danach läßt man einige Schwingungen der Waage unbeobachtet und fängt dann mit der Ablesung an. Man schätzt die Anzahl der Teilstriche bei der Schwingung des Zeigers mit dem Auge bis auf den zehnten Teil der Teilung.

Man darf sich mit *einer* Bestimmung des Nullpunktes der Waage nicht begnügen, sondern muß mindestens noch zwei weitere durchführen und den Mittelwert aus allen diesen Bestimmungen als den Nullpunkt der Waage annehmen. Ist der Nullpunkt der Waage bekannt, so kann man an die Bestimmung ihrer Empfindlichkeit gehen.

Die Bestimmung der Empfindlichkeit der Waage. Wenn wir auf eine Schale (rechts) der unbelasteten Waage 1 mg legen, was wir durch Aufhängen des Reiters auf den ersten Teilstrich des Waagebalkens erreichen (bei arretierter Waage), und nun aus Schwingungen die Gleichgewichtsstellung oder die Einstellung der Waage so bestimmen, wie wir eben den Nullpunkt der Waage bestimmt haben, so erhalten wir nicht den vorhergehenden Wert, sondern einen anderen, z. B. e, der uns die Verschiebung der Gleichgewichts-

stellung um $(e - e_0)$ Skalenteile angibt. Die absolute Größe dieser Verschiebung drückt die Empfindlichkeit der unbelasteten Waage bei dem Übergewicht 1 mg aus. Sind somit der Nullpunkt und die Empfindlichkeit der Waage bestimmt, kann man an die Wägung herangehen.

Die Wägung. Man kann stets mit der Methode des aufeinanderfolgenden Auflegens von Gewichten zwei Zahlen a und $(a + 1)$ Gramm finden, zwischen denen das Gewicht des zu wägenden Körpers liegt, wenn es nicht mit einer ganzen Zahl von Grammen ausgedrückt werden kann. Danach legt man Zehntelgramm und Zentigramm auf. Wenn sich das Gewicht des Körpers nicht mit einer ganzen Zahl von Zentigrammen ausdrücken läßt, geht man zur Belastung mit Milligramm über, indem man den Reiter benutzt. Verschiebt man ihn auf dem Waagebalken von Teilstrich zu Teilstrich, so kann man zwei solche aufeinanderfolgende Teilstriche finden, daß bei dem einen das Gesamtgewicht immer noch kleiner und bei dem anderen schon größer ist als das Gewicht des Körpers.

Man muß hierbei bemerken, daß bei einem großen Unterschied zwischen dem Gewicht des Körpers und den aufgelegten Gewichten das Überwiegen der einen Schale sehr leicht beobachtet werden kann: Der Waagebalken neigt sich bei Entarretierung sofort nach einer Seite und schwingt nicht. Bei einem kleinen Unterschied im Gewicht führt der Balken Pendelschwingungen aus. Kann man dabei nicht genau erkennen, ob der Ausschlag des Zeigers nach der einen Seite vom gefundenen Nullpunkt größer ist als nach der anderen, so ist es nötig, aus den Schwingungen den Punkt des Gleichgewichts der Waage zu bestimmen, d. h. den Skalenteil, auf den sich der Zeiger ohne Reibung beim Auspendeln des Waagebalkens einstellen würde. Die Bestimmung des Gleichgewichtspunktes geschieht genauso wie die Bestimmung des Nullpunktes der Waage. Schon bei der Verwendung des Reiters muß man sich unbedingt der Bestimmung des Gleichgewichtspunktes zuwenden. Je nachdem, ob der gefundene Gleichgewichtspunkt rechts oder links vom Nullpunkt der Waage liegt, können wir sagen, welche der Waagschalen überwiegt.

Wir nehmen an, daß wir zwei solche Stellungen des Reiters gefunden haben, die sich um einen ganzen Teilstrich des Waagebalkens, d. h. um 1 mg Belastung unterscheiden; für sie sind die entsprechenden Gleichgewichtspunkte e_1 und e_2, wobei der Punkt e_1 rechts und der Punkt e_2 links vom Nullpunkt der Waage liegt (Abb. 17). Wenn der zu wägende Körper auf der linken Waagschale liegt, ist offensichtlich die der Stellung des Zeigers e_1 entsprechende Belastung kleiner und die die Auslenkung e_2 erzeugende Belastung größer als das Gewicht des Körpers. Wenn die Größe des Gewichtes bei der Gleichgewichtsstellung e_1 P Milligramm beträgt, so muß man offensichtlich auf die rechte Waagschale noch irgendeine Anzahl von Gewichten legen, die einen Bruchteil p eines Milligramms ausmachen, um die Waage auf den Nullpunkt e_0 zu bringen.

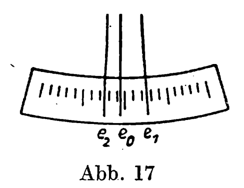


Abb. 17

Wir nehmen an, daß bei kleinen Winkeln die Auslenkung des Zeigers vom Nullpunkt der Belastung proportional ist, die diese Auslenkung erzeugt. Diese

Annahme gestattet es, die Größe p auszurechnen. Die Stellung e_1 entspricht dem Gewicht von P Milligramm, die Stellung e_2 dem von $P + 1$ mg; folglich entspricht die Auslenkung $e_1 - e_2$ dem Gewicht von 1 mg. Die Größe $e_1 - e_2$ ist offensichtlich die *Empfindlichkeit der belasteten Waage*. Wir müssen das Zusatzgewicht p berechnen, welches den Waagebalken und den damit verbundenen Zeiger aus der Stellung e_1 in die Stellung e_0 bringt, d. h., um das Stück $e_1 - e_0$ verschiebt. Wenn 1 mg die Auslenkung $e_1 - e_2$ erzeugt, so erzeugen p mg die Auslenkung $e_1 - e_0$; daraus erhält man

$$\frac{1}{p} = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_0}, \quad p = \frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_2} \text{ mg}$$

und damit die Masse des Körpers

$$Q = P + p.$$

Auf diese Weise werden mit genauen Waagen Wägungen bis zu einem zehntel Milligramm durchgeführt.

Wenn die Empfindlichkeit der Waage bei jeder Belastung konstant bliebe, brauchten wir zur Bestimmung auf Milligramm und Zehntelmilligramm nicht die eben benutzte Methode zur Bestimmung der Gleichgewichtsstellungen rechts und links vom Nullpunkt. Es würde genügen, irgendeine Gleichgewichtsstellung zu bestimmen und die für diese Stellung notwendigen Milligramm zu berechnen. Da jedoch die Empfindlichkeit sich mit der Belastung ändert, ist die vor der Wägung bestimmte Empfindlichkeit der unbelasteten Waage nur eine Hilfe dafür, wieviel Milligramm man ungefähr hinzufügen muß, um die beiden Gleichgewichtsstellungen schneller zu erhalten.

Wenn die Waage keinen Reiter besitzt, so kann man Wägungen mit der Genauigkeit bis zu Bruchteilen von Milligramm auf folgende Weise vornehmen: Wir legen auf die rechte Schale so viel Gewichte, daß sich die Waage fast im Gleichgewicht befindet, d. h., daß sich bei Entarretierung des Waagebalkens der Zeiger nicht wesentlich von dem mittleren Teilstrich der Skala entfernt. Wir lassen zu, daß die rechte Schale noch etwas leichter ist als die linke und bestimmen die Gleichgewichtsstellung genauso, wie wir den Nullpunkt bestimmt haben. Wir bezeichnen die so gefundene Gleichgewichtsstellung wie früher mit e_1 und die Nullpunktstellung mit e_0. Jetzt legen wir auf die rechte Schale 1 cg hinzu und bestimmen erneut die Gleichgewichtsstellung, die wir mit e_2 bezeichnen. Man muß es so einrichten, daß e_1 und e_2 auf verschiedenen Seiten vom Nullpunkt e_0 liegen, d. h., es soll sein: $e_1 > e_0 > e_2$. Offensichtlich ist $(e_1 - e_2)$ die Empfindlichkeit der Waage bei 1 cg Übergewicht. Wir nehmen wieder an, daß die Auslenkung des Zeigers proportional dem Übergewicht erfolgt und berechnen nach der gleichen Formel wie im vorhergehenden Falle die Größe des Übergewichts in Milligramm, die die Waage aus der Stellung e_1 in den Nullpunkt e_0 gebracht hätte. Man muß sich nur vergegenwärtigen, daß die Größe $(e_1 - e_2)$ in diesem Falle die Empfindlichkeit für 1 cg bedeutet. Deshalb muß man sie bei dem Übergang zu Milligramm mit dem Faktor 10 multiplizieren.

Nach der Wägung ist es notwendig, den Nullpunkt der Waage erneut zu bestimmen und bei der Ausrechnung von p den Mittelwert zu benutzen.

Die Wägung muß auf der rechten und auf der linken Waagschale durchgeführt werden (siehe weiter unten: Die Methode der Doppelwägung).

Die durch den scheinbaren Gewichtsverlust des Körpers in Luft bedingten Korrekturen. Bei der Wägung in Luft verliert der Körper an Gewicht scheinbar so viel, wie die von ihm verdrängte Luft wiegt. Um das wahre Gewicht des Körpers zu erhalten, geht man folgendermaßen vor:

V sei das Volumen des zu wägenden Körpers in cm³, v das Volumen der Gewichte, λ das Gewicht von 1 cm³ Luft in Gramm (bei der Temperatur und dem Atmosphärendruck, die gerade zur Zeit der Wägung herrschen). Bei der Wägung in Luft verliert der Körper scheinbar $V\lambda$ Gramm und die Gewichtsstücke [g]. Ist P das wahre Gewicht des Körpers und p das wahre Gewicht der Gewichte, das auf ihnen durch Zahlen angegeben ist, dann gilt bei Gleichgewicht in Luft

$$P - V\lambda = p - v\lambda$$

oder

$$P = p + (V - v)\lambda.$$

Ist D das wahre Gewicht von 1 cm³ des zu wägenden Körpers (zahlenmäßig gleich der Dichte) und d die gleiche Größe für die Gewichte, dann haben wir

$$VD = P \quad \text{und} \quad vd = p.$$

Setzen wir nun diese Werte V und v in die vorhergehenden Gleichungen ein, so erhalten wir

$$P = p + \left(\frac{P}{D} - \frac{p}{d}\right)\lambda.$$

Daraus errechnet sich P zu

$$P = p\,\frac{1 - \frac{\lambda}{d}}{1 - \frac{\lambda}{D}}.$$

Teilen wir den Zähler durch den Nenner nach den Regeln der Division von Polynomen, dann erhalten wir

$$\frac{1 - \frac{\lambda}{d}}{1 - \frac{\lambda}{D}} = 1 - \frac{\lambda}{d} + \frac{\lambda}{D} - \frac{\lambda^2}{d \cdot D} + \frac{\lambda^2}{D^2} - \cdots.$$

Da die Größen $\frac{\lambda}{d}$ und $\frac{\lambda}{D}$ immer sehr klein sind, können wir alle Glieder, angefangen mit $\frac{\lambda^2}{dD}$ und die weiteren vernachlässigen. Dann erhält die letzte Gleichung die Form

$$P = p\left(1 - \frac{\lambda}{d} + \frac{\lambda}{D}\right). \tag{1}$$

Die Größe λ hängt ab von dem Druck, der Temperatur und der Feuchtigkeit der Luft, doch wird sie gewöhnlich konstant und gleich 0,0012 g/cm³ angenom-

men. Diese Genauigkeit reicht in den meisten Fällen aus. Die Gewichte sind gewöhnlich aus Messing hergestellt und dafür ist

$$d = 8{,}4 \text{ g/cm}^3.$$

Setzen wir für d und λ ihre Zahlenwerte in die Gleichung (1) ein, so erhalten wir

$$P = p + p \cdot 0{,}0012 \left(\frac{1}{D} - 0{,}12\right),$$

wobei p das nicht korrigierte Gewicht des Körpers bedeutet, d. h. das unmittelbar aus der Wägung erhaltene, und P sein wahres Gewicht, d. h. sein auf Vakuum bezogenes Gewicht.

Besondere Wägemethoden. Alles oben Gesagte bezieht sich auf die einfache Wägung, d. h. auf eine Wägung, die nur dann einen genauen Wert liefert, wenn die Arme des Waagebalkens gleich sind. Ist die Länge der Arme verschieden, so wird das Gewicht der Gewichte auf der einen Waagschale nicht dem Gewicht des zu wägenden Körpers auf der anderen Waagschale entsprechen. In diesem Falle werden andere Wägemethoden verwendet, die im einzelnen der einfachen Wägung gleichen. Man kennt drei solche Methoden: 1. die Methode der Doppelwägung, 2. die Tariermethode und 3. die Methode der ständigen Belastung.

Die Methode der Doppelwägung (Gauss). Bei dieser Methode wird das erhaltene Resultat der Wägung in keiner Weise von der Ungleichheit der Waagearme beeinflußt.

Wir bezeichnen die Länge des rechten und des linken Waagearmes entsprechend mit l_1 und l_2, legen den zu wägenden Körper auf die linke Schale und äquilibrieren sein Gewicht auf der rechten Schale mit der größtmöglichen Genauigkeit durch das Gewicht p_1. Dabei führen wir die Wägung nach allen oben aufgeführten Regeln durch. Weil die Waagearme ungleich sind, ist das Gewicht des Körpers P nicht gleich p_1. Wenden wir den Satz von den Drehmomenten auf den Aufhängepunkt der Waagschalen an, so erhalten wir in diesem Falle

$$P l_2 = p_1 l_1.$$

Wir führen eine zweite Wägung durch, wobei wir den Körper P auf die rechte und die Gewichte auf die linke Schale legen. Dabei wird für die Äquilibrierung des Körpers P das Gewicht p_2 benötigt. Nach dem Satz von den Drehmomenten erhalten wir in diesem Falle

$$P l_1 = p_2 l_2.$$

Aus den letzten Gleichungen finden wir

$$P = \sqrt{p_1 p_2};$$

das Gewicht des Körpers ist also gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt beider Gewichte. Aus denselben Gleichungen kann man auch die Längen der Waagearme berechnen:

$$\frac{l_1}{l_2} = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}.$$

Da sich jedoch die Größen p_1 und p_2 sehr wenig voneinander unterscheiden, kann man mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes folgendes schreiben:

$$P = \frac{p_1 + p_2}{2}, \tag{2}$$

$$\frac{l_1}{l_2} = 1 + \frac{p_2 - p_1}{2p_1}. \tag{3}$$

Diese Methode muß man bei der Eichung von Gewichten verwenden.

Die Tariermethode (BORDA). Auf die rechte Waagschale wird der zu wägende Körper gelegt und auf die linke die Tara (mit Tara bezeichnet man einen Gegenstand, der das gleiche Gewicht besitzt wie der zu wägende Körper; als Tara benutzt man häufig Schrot) und fügt zu dieser Tara zur völligen Abgleichung Stücke von Blattzinn. Dabei braucht die aus dem Schwingen des Waagebalkens ermittelte Gleichgewichtsstellung nicht mit dem vor der Wägung ermittelten Nullpunkt der Waage übereinzustimmen. Danach wird der Körper von der Waage genommen und an seine Stelle so viel Gewichte gelegt, bis die Tara äquilibriert ist, was man wieder aus den Schwingungen der Waage bestimmt. Bei dieser Methode der Wägung wird der Einfluß der Ungleichheit der Waagearme auf das Ergebnis der Wägung eliminiert. Die Genauigkeit der Wägung ist durch die Empfindlichkeit der Waage begrenzt.

Die Methode der ständigen Belastung (MENDELEJEW). Bei dieser Methode wird auf die linke Waagschale das Höchstgewicht gelegt, das an der jeweiligen Waage angegeben ist, und auf die rechte Schale die dem Gewicht genau entsprechende Tara. Die Gleichheit muß besonders genau erfüllt sein.

Wenn man einen Körper zu wiegen hat, so wird er auf die linke Schale gelegt und außerdem noch so viel Gewichte, bis die auf der rechten Schale liegende Tara äquilibriert ist. Das Gewicht des Körpers und der Gewichte ist gleich dem Gewicht, das vorher auf der Schale lag. Daraus folgt, daß das Gewicht des Körpers gleich der Differenz zwischen dem anfänglichen Gewicht und dem zur Äquilibrierung benötigten ist. Außer der gleichbleibenden Empfindlichkeit[1]) besitzt diese Methode noch folgende Vorteile: Sie erfordert jedesmal nur eine Wägung, folglich verkürzt sie die Meßzeit und verkleinert den Fehler, der durch mehrmaliges Wägen auftreten kann.

Aufgabe 6

Die Bestimmung der Dichte fester Körper mit einem Pyknometer und durch hydrostatische Wägung

Grundlagen. Mit der *Dichte* bezeichnet man den Quotienten aus Masse und Volumen. Deshalb wird die Bestimmung der Dichte auf die Bestimmung der Masse eines Körpers und seines Volumens zurückgeführt. Die Bestimmung

[1]) Die Belastung der Waage ist immer konstant, folglich bleibt auch die Empfindlichkeit der Waage konstant.

der Masse eines Körpers kann durch Wägung[1]) geschehen, d. h. durch Vergleich mit der Masse von Gewichten bekannter Größe. Die unmittelbare Messung des Volumens eines Körpers ist schwierig, wenn dieser eine komplizierte Form hat. Deshalb geht man folgendermaßen vor: Man wägt den Körper im Wasser und bestimmt mit Hilfe des ARCHIMEDESschen Prinzips die durch den Körper verdrängte Masse des Wassers. Ist die Dichte des Wassers bekannt, kann man durch Rechnung das Volumen erhalten. Die Dichte entnimmt man für die entsprechende Temperatur Tabellenwerten.

Mit dem Begriff Dichte eines Körpers darf man den Begriff spezifisches Gewicht eines Körpers nicht verwechseln. Mit dem *spezifischen Gewicht* bezeichnet man das Gewicht der Volumeneinheit eines Körpers. Es ist leicht einzusehen, daß das spezifische Gewicht d und die Dichte ϱ eines beliebigen Körpers durch die Beziehung

$$d = \varrho g$$

verknüpft sind, wobei g die Schwerebeschleunigung darstellt, d. h., zwischen dem spezifischen Gewicht und der Dichte besteht die gleiche Beziehung wie zwischen Gewicht und Masse eines Körpers. Drückt man die Zahlenwerte des spezifischen Gewichtes durch p/cm³ und die Dichte durch g/cm³ aus, dann ist der Zahlenwert für das spezifische Gewicht eines Körpers gleich dem Zahlenwert für seine Dichte[2]).

Übung 1

Die Bestimmung der Dichte fester Körper mit Hilfe eines Pyknometers

Zubehör: 1. Analysenwaage, 2. Gewichtssatz, 3. Pyknometer, 4. Kalkspat oder ein anderer fester Körper, 5. Gefäß mit destilliertem Wasser von Zimmertemperatur, 6. Thermometer, 7. Filterpapier.

Beschreibung der Geräte. Die Waage ist in Aufgabe 5 beschrieben worden. Über die Beschreibung des Pyknometers siehe Aufgabe 7 (von den in dieser Aufgabe angeführten Pyknometertypen werden für die Bestimmung der Dichte fester Körper der erste und dritte Typ verwendet).

Die Messung. 1. Man bestimmt die Masse m (ohne Korrektur für den scheinbaren Gewichtsverlust in Luft) von einer möglichst großen Anzahl von Stückchen des zu untersuchenden festen Körpers (Kalkspat). Man überzeugt sich vorher davon, daß die Stückchen alle so klein sind, daß sie durch den Hals des Pyknometers gehen.

2. Man füllt das Pyknometer mit destilliertem Wasser von Zimmertemperatur und bestimmt die Masse M des Pyknometers mit dem Wasser.

3. Man schüttet die Stückchen des festen Körpers in das Pyknometer, entfernt das überschüssige Wasser (mit dem Filterpapier) und bestimmt die Masse M_0 des Pyknometers mit dem restlichen Wasser und dem

[1]) Natürlich nur in dem Fall, wenn die Wägung im Vakuum durchgeführt wird oder wenn eine entsprechende Korrektur vorgenommen wird, die dem scheinbaren Gewichtsverlust des Körpers in Luft Rechnung trägt.

[2]) Anm. d. Übers.: p = Pond.

festen Körper. Dabei muß man besonders darauf achten, daß keine Luftbläschen an den Stückchen haftenbleiben. Da nämlich die Stückchen selbst klein sind, kann sonst das Resultat wesentlich verfälscht werden.

Die Wägung erfolgt nach allen Regeln der genauen Wägung (siehe Aufgabe 5).

Die Auswertung. Die unkorrigierte Dichte, d. h. die ohne Beachtung des scheinbaren Gewichtsverlustes bei der Wägung in Luft bestimmte Dichte, ist

$$\varrho_1 = \frac{m}{M - M_0 + m}\,\delta,$$

wobei δ die Dichte des Wassers bei der zur Zeit des Versuches herrschenden Temperatur ist (wird aus der Tabelle entnommen).

Um die korrigierte Dichte zu erhalten, führen wir folgende Überlegung durch: Ist v das Gesamtvolumen der Stückchen des zu untersuchenden Körpers, ϱ ihre wahre Dichte, λ die Dichte der Luft, die gleich 0,0012 g/cm^3 angenommen wird, und Δ die Dichte der Gewichte, so ist $v\varrho$ die wahre Masse der Stückchen des zu untersuchenden Körpers, $v\delta$ die wahre Masse des durch sie verdrängten Wassers, $v\lambda$ die Masse der Luft, die durch die Stückchen und das Wasser verdrängt wird, $\frac{m}{\Delta}\lambda$ die Masse der Luft, die durch die Gewichte verdrängt wird, die den Stückchen das Gleichgewicht halten, und $\frac{M - M_0 + m}{\Delta}\lambda$ die Masse der Luft, die durch die Gewichte, die dem Wasser das Gleichgewicht halten, verdrängt wird. Daraus erhalten wir

$$v\varrho - v\lambda = m - \frac{m}{\Delta}\lambda$$

oder

$$v(\varrho - \lambda) = m\left(1 - \frac{\lambda}{\Delta}\right). \tag{1}$$

Für das Wasser erhalten wir entsprechend

$$v(\delta - \lambda) = (M - M_0 + m)\left(1 - \frac{\lambda}{\Delta}\right). \tag{2}$$

Dividieren wir die Gleichungen (1) und (2) durcheinander, so erhalten wir

$$\frac{\varrho - \lambda}{\delta - \lambda} = \frac{m}{M - M_0 + m}$$

und daraus

$$\varrho = \frac{m}{M - M_0 + m}(\delta - \lambda) + \lambda. \tag{3}$$

Übung 2

Die Bestimmung der Dichte des festen Körpers durch hydrostatische Wägung

Zubehör: 1. Analysenwaage, 2. Gewichtssatz, 3. Tischchen zur Waage, 4. fester Körper, dessen Dichte bestimmt werden soll, 5. Glaszylinder, 6. dünner Draht.

Die Waage ist in Aufgabe 5 beschrieben.

Die Messung. Man wägt den zu untersuchenden Körper in Luft auf 1 mg genau (siehe Aufgabe 5). Dann hängt man ihn an einen dünnen Draht ent-

sprechender Länge an den Haken der linken Waagschale und äquilibriert wieder. Wir bezeichnen den unkorrigierten Wert der Masse des zu untersuchenden Körpers mit m und seine Masse zusammen mit dem Draht mit m_1.

Außerdem stellt man das dreibeinige Tischchen über die Waagschale (siehe Abb. 19), darauf ein Glas mit einer genügenden Menge destillierten Wassers und taucht bei arretierter Waage den zu untersuchenden Körper hinein. Dabei achtet man erstens darauf, daß der Körper nicht die Glaswand und den Boden berührt und zweitens, daß nur der einfache (um die kapillare Wirkung herabzusetzen) unverdrillte Draht durch die Oberfläche des Wassers geht und endlich darauf, daß auf der Oberfläche des Körpers keine Luftbläschen haften. Man nimmt einen Teil der Gewichte von der anderen Waagschale und äquilibriert die Waage. Die scheinbare Masse des Körpers mit dem Draht sei in Wasser eingetaucht m_2, dann ist die Masse des durch den Körper verdrängten Wassers

$$W = m_1 - m_2$$

und die unkorrigierte Dichte des Körpers ist gleich

$$\varrho_1 = \frac{m}{W}\,\delta .$$

Die Berechnung. Die erhaltene Dichte muß korrigiert werden, weil bei der Berechnung der scheinbare Gewichtsverlust des Körpers und des Wassers in Luft nicht berücksichtigt wurde. Wenn bei der zur Zeit der Wägung herrschenden Temperatur t^0 die Dichte des Wassers ϱ und die Dichte der Luft λ ist, dann muß man offensichtlich für den korrigierten Wert der Dichte ϱ des Körpers schreiben:

$$\varrho = \frac{m + V\lambda}{W + V\lambda}\,\delta, \tag{4}$$

wobei V das Volumen des Körpers bedeutet, das gleich dem Volumen des durch ihn verdrängten Wassers ist. Die Größe dieses Volumens wird aus der Gleichung $W = V(\delta - \lambda)$ bestimmt. Damit erhält man für die korrigierte Dichte ϱ des Körpers:

$$\varrho = \frac{m + \dfrac{W\lambda}{\delta - \lambda}}{W + \dfrac{W\lambda}{\delta - \lambda}}\,\delta = \frac{m}{W}(\delta - \lambda) + \lambda . \tag{5}$$

Der durch den Gewichtsverlust des Drahtes im Wasser auftretende Fehler kann wegen seiner Kleinheit vernachlässigt werden.

Aufgabe 7

Die Bestimmung der Dichte von Flüssigkeiten mit dem Pyknometer und durch hydrostatische Wägung

Übung 1

Die Bestimmung der Dichte von Flüssigkeiten mit Hilfe des Pyknometers

Zubehör: 1. Analysenwaage, 2. Gewichtssatz, 3. Pyknometer, 4. Gefäß mit der zu untersuchenden Flüssigkeit, 5. Gefäß mit destilliertem Wasser, 6. Gefäß mit Wasser von Zimmertemperatur, 7. Thermometer, 8. Filterpapier.

Die Beschreibung der Waage erfolgte in Aufgabe 5.

Beschreibung der Anordnung. Das *Pyknometer* stellt im Prinzip ein Gefäß von ganz bestimmtem, unveränderlichem Volumen dar. Füllt man es nacheinander mit der zu untersuchenden Flüssigkeit und mit Wasser auf und wägt beides, so kann man die Dichte der Flüssigkeit bestimmen. Ist der unkorrigierte Wert der Masse des Pyknometers mit der Flüssigkeit P, seine Masse mit Wasser Q und die Masse des Pyknometers selbst p, dann ist die Masse der im Pyknometer enthaltenen Flüssigkeit $P - p$ und die Masse des Wassers $Q - p$. Die Dichte (unkorrigiert) ist infolge der Gleichheit der Volumina gleich

$$\varrho_1 = \frac{P-p}{Q-p}\,\delta. \tag{1}$$

Die Pyknometer, die fast ausschließlich aus Glas (wegen seiner geringen chemischen Aktivität) gefertigt werden, haben sehr verschiedene Formen; einige davon sind in Abb. 18 dargestellt.

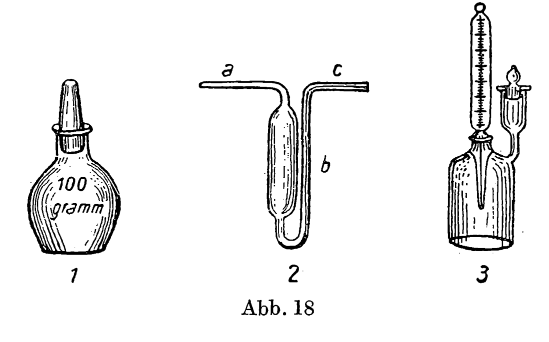


Abb. 18

Besonders einfach ist das Pyknometer der ersten Form, das bis zum oberen Rand des Halses mit Hilfe einer Pipette aufgefüllt wird. Hierauf wird der Hals mit einem eingeschliffenen Glasstopfen verschlossen, der eine dünne Durchbohrung besitzt, durch die die überschüssige Flüssigkeit von selbst ausfließt. Beim Einfüllen muß man darauf achten, daß im Pyknometer keine Luftbläschen zurückbleiben. Das erreicht man dadurch, daß man die Flüssigkeit im Pyknometer an den Wänden herablaufen läßt. Danach muß das Pyknometer von außen mit Filterpapier sorgfältig abgetrocknet werden, wobei man besonders darauf achten muß, daß der Raum zwischen dem Rand des Halses und dem Glasstopfen von Flüssigkeit befreit wird. Die Möglichkeit der Verdampfung der Flüssigkeit aus dem offenen Ende der Kapillare erscheint bis zu einem gewissen Grade als ein

Nachteil dieser Form des Pyknometers. Um dies zu beseitigen, wird manchmal ungefähr in der Mitte des Stopfens eine Markierung angebracht, auf deren Höhe die Flüssigkeit gebracht werden soll. Das läßt sich jedoch nur schwer erreichen.

Viel bequemer ist das Pyknometer der zweiten Form, weil es sich sehr einfach füllen läßt. Die Flüssigkeit wird durch das dünne Ende des Rohres *a* bis zur Markierung *c* des Rohres *b* eingesaugt. Wenn zuviel Flüssigkeit eingefüllt worden ist, wird der Überschuß durch Anlegen eines Stückchen Filterpapiers an die Öffnung *a* entfernt; war zu wenig im Pyknometer, so bringt man mit einem Glasstab einen Tropfen Flüssigkeit heran, den die Kapillarkräfte selbst hereinsaugen.

Diesen beiden Pyknometertypen haftet der gleiche Mangel an, nämlich, daß ihr Volumen infolge der Ausdehnung des Glases von der Temperatur abhängt. Der dabei auftretende Fehler kann dadurch beseitigt werden, daß man das Pyknometer vor der Wägung einige Zeit (10 bis 20 Minuten je nach Größe des Volumens) in ein Glas mit Wasser von Zimmertemperatur stellt und es danach je nach Volumenänderung auffüllt oder die Flüssigkeitsmenge vermindert.

Am vollkommensten ist das Pyknometer der dritten Form. Das Vorhandensein eines Stopfens, der den engen Hals des Gefäßes abschließt, und eines Thermometers, das die Volumenänderung zu berücksichtigen gestattet, behebt die Mängel, die den ersten beiden Typen anhaften.

Die Messung. 1. Man bestimmt den unkorrigierten Wert der Masse p des außen und innen vollständig trockenen Pyknometers (die Trocknung geschieht entweder in einem heißen Luftstrahl oder durch Erwärmen des Pyknometers im Trockenschrank).

2. Man bestimmt die Masse Q des mit destilliertem Wasser gefüllten Pyknometers.

3. Man bestimmt die Masse P des mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllten Pyknometers.

Die Wägung wird nach allen Regeln der genauen Wägung (siehe Aufgabe 5) durchgeführt, wobei es genügt, nur auf einer Waagschale zu wiegen.

Die Auswertung. Die oben angeführte Formel (1), angewendet auf die erhaltenen Werte, gibt uns die sogenannte *unkorrigierte Dichte* der Flüssigkeit an, weil sie den scheinbaren Gewichtsverlust in Luft nicht berücksichtigt.

Wir wollen eine genaue Formel ableiten, die diesen Umstand berücksichtigt. Bezeichnen wir das innere Volumen des Pyknometers (sein Fassungsvermögen) bei der Versuchstemperatur mit v, die Dichte des Wassers bei der gleichen Temperatur mit δ (wird aus der Tabelle entnommen), die wahre Dichte der zu untersuchenden Flüssigkeit mit ϱ, die Dichte der Luft, die gleich 0,0012 g/cm³ angenommen wird, mit λ und die Dichte der Gewichte mit $\varDelta$, dann ist $v\varrho$ die wahre Masse der im Pyknometer enthaltenen Flüssigkeit, $v\delta$ die wahre Masse des Wassers von gleichem Volumen, $v\lambda$ die Masse der durch die Flüssigkeit und das Wasser verdrängten Luft und $\frac{P-p}{\varDelta}\lambda$ $\left(\text{oder } \frac{Q-p}{\varDelta}\lambda\right)$

die Masse der durch die Gewichte, die die Flüssigkeit äquilibrieren, verdrängten Luft. Auf Grund des vorhandenen Gleichgewichtes erhalten wir

$$v\varrho - v\lambda = P - p - \frac{P-p}{\Delta}\lambda$$

oder

$$v(\varrho - \lambda) = (P-p)\left(1 - \frac{\lambda}{\Delta}\right). \qquad (2)$$

Für das Wasser entsprechend

$$v(\delta - \lambda) = (Q-p)\left(1 - \frac{\lambda}{\Delta}\right). \qquad (3)$$

Dividieren wir die Gleichungen (2) und (3) durcheinander, so erhalten wir

$$\frac{\varrho-\lambda}{\delta-\lambda} = \frac{P-p}{Q-p},$$

woraus

$$\varrho = \varrho_1\left(1 - \frac{\lambda}{\delta}\right) + \lambda \qquad (4)$$

folgt.

Übung 2

Die Bestimmung der Dichte von Flüssigkeiten durch hydrostatische Wägung

Zubehör: 1. Analysenwaage, 2. Gewichtssatz, 3. abgeschmolzener Glaskörper mit etwas Quecksilber im Inneren, 4. metallisches Dreibein, 5. zwei Bechergläser, 6. Gefäß mit zu untersuchender Flüssigkeit, 7. dünner Draht.

Die Beschreibung der Waage erfolgte in Aufgabe 5.

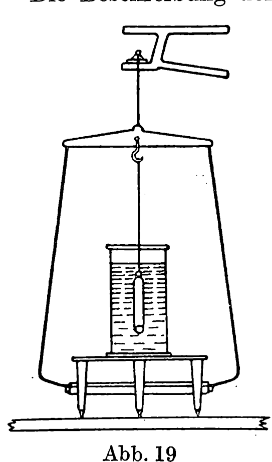


Abb. 19

Die Messung. 1. Man hängt den Glaskörper mit Hilfe des dünnen Drahtes an den Haken einer der Waagschalen (Abb. 19) und äquilibriert die Waage durch auf die andere Waagschale gelegte Gewichte bis auf 1 mg genau.

2. Man stellt über die Waagschale auf das Dreibein ein Glas mit destilliertem Wasser und taucht den Glaskörper so hinein, daß er weder den Boden noch die Glaswand berührt. Man achtet darauf, daß ihm keine Luftbläschen, besonders in der Öse, anhaften und daß durch die Oberfläche des Wassers nur der unverdrillte Draht geht. Man äquilibriert die Waage und erhält dann den unkorrigierten Wert der Masse des verdrängten Wassers p.

3. Man nimmt nun an Stelle des Wassers die zu untersuchende Flüssigkeit, taucht den Glaskörper hinein, nachdem man ihn vorher sorgfältig mit Filterpapier abgetrocknet hat, und bringt die Waage wieder ins Gleichgewicht. Wir erhalten den unkorrigierten Wert der Masse der verdrängten Flüssigkeit q. Daraus finden wir ihre unkorrigierte Dichte

$$\frac{q}{p}\delta.$$

Die Ausrechnung. Wir bezeichnen das Volumen des Glaskörpers mit v, die Dichte des Wassers während des Versuches mit δ (seine Temperatur muß notiert werden) und die Dichte der Luft mit λ. Das Volumen des Glaskörpers, das gleich dem Volumen des verdrängten Wassers ist, wird aus der Gleichung bestimmt:

$$p = v(\delta - \lambda).$$

Der korrigierte Wert der Dichte ergibt sich zu

$$\varrho = \frac{q + v\lambda}{p + v\lambda}\,\delta.$$

Setzt man darin den Wert für v ein, so erhält man für die korrigierte Dichte der Flüssigkeit:

$$\varrho = \frac{q}{p}(\delta - \lambda) + \lambda. \qquad (5)$$

Die Größe δ wird aus der Tabelle entnommen, λ kann man gleich 0,0012 g/cm³ annehmen. Der durch den Gewichtsverlust des Drahtes im Wasser auftretende Fehler kann infolge seiner Kleinheit vernachlässigt werden.

Wenn der Ausdehnungskoeffizient der Flüssigkeit bekannt ist, kann man ihre Dichte auch für 0° C berechnen.

Aufgabe 8

Die Bestimmung der Dichte eines Gases mit der Ausströmungsmethode[1])

Zubehör: 1. Effusiometer, 2. Chlorkalziumrohr, 3. Stoppuhr.

Kurze Theorie. Die Wirkungsweise eines Effusiometers, d. h. eines Gerätes zur relativen Messung der Dichte von Gasen, beruht auf der Messung der Ausströmungsgeschwindigkeiten der Gase aus einer kleinen Öffnung. Wir wollen das uns hier Interessierende der Strömungslehre kurz darlegen.

Wir nehmen an, daß die Wand AB (Abb. 20) den Raum links, in dem sich ein Gas mit dem Druck p_1 befindet, von dem Raum rechts trennt, in dem der Gasdruck p_2 herrscht, wobei $p_1 > p_2$ sein soll. Die Wand besitzt eine Öffnung CD mit der Fläche σ, durch die das Gas aus dem linken Raum in den rechten in Form eines zylindrischen Strahles $CDFE$ strömt, dessen Druck allmählich von p_1 auf p_2 absinkt.

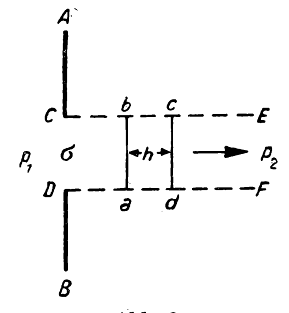


Abb. 20

Wir greifen ein Element dieses Strahles heraus, der durch zwei senkrecht zum Strahl stehende Flächen ab und cd begrenzt wird, die den Abstand h voneinander haben. Sein Volumen ist offensichtlich gleich σh und die Masse $\sigma h D$, wobei D die

[1]) Anm. d. Übers.: Bunsen-Methode.

Dichte des ausströmenden Gases bedeutet. Wir bezeichnen nun den von links auf das Element wirkenden Druck mit p und den von rechts wirkenden mit $p + dp$, wobei dp offensichtlich negativ ist. Die Differenz dieser Drucke, die von links nach rechts wirkt, erteilt dem Element eine Geschwindigkeit in der gleichen Richtung.

Wir nehmen an, das Element habe sich um h verschoben. Die Zunahme der kinetischen Energie muß gleich der Arbeit der Kräfte sein, die diese Zunahme bewirken, d. h.

$$d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = -\sigma h d p \text{ [1]}$$

oder

$$\frac{1}{2} m d(v^2) = \frac{1}{2} \sigma h D d(v^2) = -\sigma h d p,$$

woraus folgt

$$d(v^2) = -\frac{2dp}{D},$$

$$\int_{v_1}^{v_2} d(v^2) = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{2dp}{D}.$$

Setzt man die Anfangsgeschwindigkeit $v_1 = 0$ und bezeichnet die Maximalgeschwindigkeit mit v, so erhält man

$$v^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{D}. \tag{1}$$

Die Beziehung (1) liegt der Effusiometeranordnung zugrunde.

Bevor wir zur Beschreibung der Anordnung selbst übergehen, müssen wir bemerken, daß unsere Ableitung einige Ungenauigkeiten enthält. Erstens haben wir angenommen, daß die Dichte des ausströmenden Gases dauernd konstant bleibt, während sich in Wirklichkeit beim Austritt in den Raum mit niedrigerem Druck das Volumen des Elementes $abcd$ vergrößert und folglich die Dichte des Gases kleiner wird. Zweitens haben wir angenommen, daß das Gas in der Form eines zylindrischen Strahles ausströmt, was, allgemein gesprochen, genauso unrichtig ist. Drittens endlich haben wir die Reibung vollständig vernachlässigt, die zwischen dem sich bewegenden Strahl und dem Rand der Wand AB oder dem Gas, das den rechten Raum füllt, auftritt. Jedoch zeigt der Versuch, daß bei genügend kleinen Geschwindigkeiten des Strahles und damit auch bei genügend kleiner Druckdifferenz alle diese Ungenauigkeiten keinen wesentlichen Wert ausmachen.

Die Beschreibung der Anordnung. Die Anordnung besteht aus einem unten offenen Glasrohr A (Abb. 21), an dessen oberem Ende ein Dreiweghahn c angeschmolzen ist. In das obere Ansatzrohr b des Hahnes ist eine Platinfolie eingeschmolzen, die in der Mitte eine mikroskopisch kleine Öffnung besitzt. Das seitliche Ansatzrohr a des Hahnes dient zum Einlassen des zu unter-

---

[1]) Unter Druck versteht man die Kraft, die auf die Flächeneinheit wirkt; deshalb ist die Kraft $f = \sigma p$.

suchenden Gases in das Rohr A. Das Rohr wird von der Klemme d gehaltert, die sich an einem vertikalen Stab nach oben und unten verschieben läßt. Dieser Stab ist an dem eisernen zylindrischen Gefäß B befestigt. Das Gefäß B ist mit Quecksilber gefüllt, in das das untere Ende des Rohres A stets eingetaucht bleibt. In dem oberen verbreiterten Teil des Zylinders sind zwei Fenster E eingeschnitten und mit zwei Glasplatten, die einen horizontalen Strich als Markierung tragen, abgeschlossen. Im Innern des Rohres A schwimmt auf dem Quecksilber ein Glasschwimmer D, der drei Markierungen besitzt (eine oben und zwei unten).

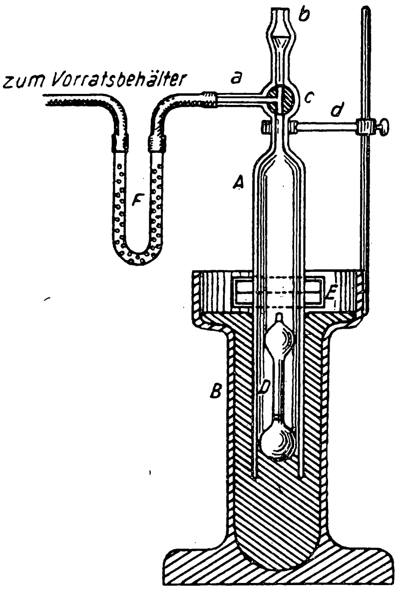


Abb. 21

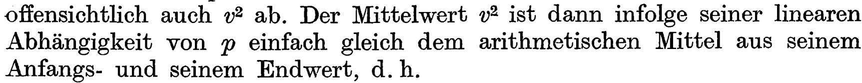
Wenn das mit dem zu untersuchenden Gas gefüllte Rohr A bei geschlossenem Hahn c in das Quecksilber getaucht wird, so wird das Gas zusammengedrückt und verdrängt das Quecksilber aus dem Gefäß B. Der Druck im Innern des Rohres A wird dabei erhöht und ist gleich

$$H = H_0 + p,$$

wobei H_0 der Atmosphärendruck und p der Druck der verdrängten Quecksilbersäule ist. Wenn danach das Rohr A mit Hilfe des Hahnes c mit der Atmosphäre durch die Öffnung in die Platinfolie verbunden wird, beginnt das Gas langsam auszuströmen. Dabei ist seine Geschwindigkeit, gegeben durch die Formel (1), gleich

$$v^2 = \frac{2p}{D}.$$

Da mit dem allmählichen Ausströmen des Gases auch p abnimmt, nimmt offensichtlich auch v^2 ab. Der Mittelwert v^2 ist dann infolge seiner linearen Abhängigkeit von p einfach gleich dem arithmetischen Mittel aus seinem Anfangs- und seinem Endwert, d. h.



$$\overline{v^2} = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} = \frac{p_1 + p_2}{D}.$$

Wenn nun das Rohr mit einem anderen Gas gefüllt wird und man erzeugt die gleiche Differenz zwischen dem Anfangs- und dem Enddruck, so erhält man für die mittlere Ausströmungsgeschwindigkeit

$$\overline{v_1^2} = \frac{p_1 + p_2}{D_1}$$

oder

$$\frac{\overline{v^2}}{\overline{v_1^2}} = \frac{D_1}{D}.$$

Die unmittelbare Bestimmung der Geschwindigkeiten v und v_1 ist recht schwierig. Weil aber in unserem Falle die ausströmenden Volumina gleich sein müssen, sind die Ausströmungszeiten dieser Gasvolumina den mittleren Ausströmungsgeschwindigkeiten umgekehrt proportional, d. h.

$$\frac{\bar{v}}{\bar{v}_1} = \frac{t_1}{t},$$

und folglich

$$\frac{D}{D_1} = \frac{t^2}{t_1^2}. \tag{2}$$

Aus dieser Formel geht hervor, daß man aus der Messung der Ausströmungszeiten gleicher Volumina verschiedener Gase ihre Dichte relativ zu dem bekannten von ihnen, z. B. Luft, bestimmen kann, wenn die gleichen Druckbedingungen vorherrschen.

Die Messung. 1. Um das Rohr A mit dem zu untersuchenden Gas (z. B. Leuchtgas) zu füllen, verbindet man das Ansatzrohr a durch einen Gummischlauch mit dem Vorratsbehälter, der das Gas enthält. Das Leuchtgas wird der Gasleitung entnommen, die Luft einfach der Atmosphäre. Weil die meisten Gase mehr oder weniger Wasserdampf enthalten, der das Ergebnis wesentlich verfälschen könnte, muß man zur Beseitigung des Dampfes zwischen den Vorratsbehälter und das Rohr ein mit Kalziumchlorid gefülltes Glasrohr schalten, damit der im durchströmenden Gas enthaltene Wasserdampf adsorbiert wird.

2. Man verbindet mit Hilfe des Hahnes das Rohr A durch das Ansatzrohr b mit der Atmosphäre und taucht es so weit wie möglich in das Quecksilber ein, um nach Möglichkeit die von vorhergehenden Versuchen zurückgebliebenen Gasreste vollständig zu entfernen. Danach verbindet man durch Drehen des Hahnes das Rohr A mit dem Vorratsbehälter und füllt das Rohr durch allmähliches Heben mit dem zu untersuchenden Gas. (Dabei muß man darauf achten, daß der untere Rand des Rohres nicht aus dem Quecksilber herausgehoben wird, weil sonst in das Innere des Rohres Luft eintritt.)

3. Man schließt den Hahn durch eine Drehung um 180° so, daß der Raum von A für sich abgeschlossen ist, senkt das Rohr erneut so tief, daß das obere Ende des Schwimmers 1 bis 1,5 cm tiefer steht als die Fläche, die durch die an dem Glasfenster angebrachten Markierungen geht.

4. Man nimmt die Stoppuhr in die Hand und stellt das Auge so ein, daß die Markierungen beider Fenster zusammenfallen, verbindet durch Drehen des Hahnes erneut das Rohr A mit der Atmosphäre durch die Öffnung in dem Ansatzrohr b und drückt in dem Moment auf die Stoppuhr, wenn die obere Markierung des Schwimmers die Beobachtungsfläche passiert. Der Druck ist in diesem Moment genau festgelegt und stets der gleiche.

5. Man wartet, bis die erste der unteren Markierungen erscheint, die als Vorbote der untersten anzusehen ist, stellt erneut das Auge in dieselbe Ebene ein und stoppt die Uhr in dem Moment des Durchganges der zweiten Markierung durch die Ebene. Auch in diesem Moment ist der Druck fixiert.

6. Weil es unmöglich ist, bei einmaliger Säuberung das Rohr vom Restgas vollständig zu befreien, sind die ersten Ablesungen der Ausströmungszeit un-

richtig, doch nimmt bei mehrmaliger Wiederholung des Versuches die relative Menge des Restgases ab. Das führt zu einer systematischen Änderung der Ablesungen. Nach einigen Wiederholungen des Versuches (etwa 3 bis 5) ist der Anteil des Restgases unmeßbar klein und die Änderung der Ablesungen hört auf. Dann nehmen wir nicht weniger als fünf Ablesungen vor und bestimmen daraus die mittlere Ausströmungszeit des Gases.

Die Ausrechnung. Man führt die Messung der Ausströmungszeit von Leuchtgas und von Luft durch und bestimmt die Dichte des Leuchtgases D_1 relativ zur Dichte der Luft, indem man in der Formel (2) $D = 1$ setzt. Um die absolute Dichte des Gases zu bestimmen, muß man an Stelle von $D = 1$ die absolute Dichte der Luft, die dem herrschenden Barometerstand entspricht, in die Formel (2) einsetzen. Man entnimmt sie der Tabelle. (Beschreibung des Barometers siehe Aufgabe 18.)

Aufgabe 9

Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus der Dehnung und der Biegung

Einführung. Die elastischen Eigenschaften fester Körper. In der Elastizitätstheorie versteht man unter dem Ausdruck *Deformation* jede Veränderung der relativen Lage der Teilchen eines festen Körpers zueinander, die unter dem Einfluß äußerer Kräfte auftritt. Wenn der äußere Kraftaufwand gering ist, so verschwindet, allgemein gesagt, mit dem Aufhören seiner Wirkung die Deformation. Wenn er jedoch groß ist, so verschwindet nach dem Aufhören seiner Wirkung die Deformation nicht vollständig; es bleibt eine sogenannte *Restdeformation* zurück. Wenn die erste Spur von Restdeformation auftritt, so spricht man davon, daß die *Elastizitätsgrenze* erreicht ist. Körper werden *elastisch* genannt (z. B. Stahl, Kautschuk usw.), wenn die Elastizitätsgrenze erst bei starken äußeren Kräften, und *unelastisch* (z. B. Blei), wenn die Elastizitätsgrenze schon beim Einwirken sehr kleiner Kräfte erreicht wird.

Von den vielen verschiedenen Deformationen müssen zwei besonders hervorgehoben werden: Die Deformation der Dehnung (Zusammenziehung) und die Deformation der Scherung. Alle anderen Arten der Deformation besitzen einen mehr oder weniger komplizierten Charakter. Im Falle genügend kleiner Deformationen kann man jede beliebige Deformation als Summe einiger Dehnungen und Scherungen ansehen.

Im Grenzfall kleiner Deformationen unterliegen alle Deformationen folgenden Gesetzen:

Bis zur Elastizitätsgrenze ist die Deformation der Größe der äußeren Kraft proportional;

Die Änderung des Vorzeichens der äußeren Kraft ruft nur eine Änderung des Vorzeichens der Deformation hervor, ohne ihren absoluten Wert zu ändern;

Wirken mehrere äußere Kräfte ein, so ist die allgemeine Deformation gleich der Summe der Teildeformationen.

Folglich können wir schreiben:

$$\Delta = cP, \tag{1}$$

wobei Δ die Deformation, c der Proportionalitätsfaktor und P die äußere Kraft bedeuten.

Betrachten wir nun die Deformationen, die in den Aufgaben dieses Buches vorkommen:

Die Dehnung. Unter dem Einfluß eines Gewichtes P dehnt (oder verkürzt) sich ein Draht oder Stab der Länge L und des Querschnittes S um die Größe ΔL. Nach dem HOOKEschen Gesetz erhalten wir

$$\Delta L = \alpha \frac{PL}{S},$$

wobei α der Elastizitätskoeffizient für die Dilatation (Kompression) oder der Koeffizient der Längsdehnung (-verkürzung) ist. Der Elastizitätsmodul bei der Dehnung oder der YOUNG-Modul ist gleich



$$E = \frac{1}{\alpha} = \frac{PL}{S\Delta L}. \tag{2}$$

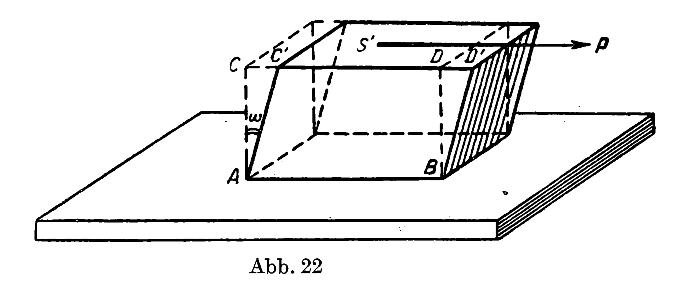


Abb. 22

Unter dem Einfluß einer Belastung erhält der Draht zusammen mit der Dehnung eine Querkontraktion. Wenn der Durchmesser des Drahtes sich um die Größe Δd ändert, so ist

$$\Delta d = \beta \frac{Pd}{S},$$

wobei β den Koeffizienten der Querkontraktion darstellt. Das Verhältnis des Koeffizienten der Querkontraktion zum Koeffizienten der Längsdilatation trägt die Bezeichnung POISSONsche Zahl:

$$\sigma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\Delta d}{d} : \frac{\Delta L}{L}. \tag{3}$$

Theoretisch beträgt die Poissonsche Zahl für alle isotropen Körper ungefähr 0,25.

Die Scherung (oder der Schub). Unter dem Einfluß einer tangentialen Kraft P wird das rechteckige Parallelepiped $ABDC$ (Abb. 22) in ein Parallelepiped $ABD'C'$ verwandelt. Die Tangentialkraft P greift gleichmäßig an der

gesamten oberen Fläche S' an. Auf Grund des ersten Gesetzes für kleine Deformationen ist der Scherungswinkel gleich

$$w = k\frac{P}{S'},$$

wobei k der Scherungskoeffizient und die Größe $\frac{P}{S'}$ die auf die Flächeneinheit bezogene Tangentialkraft ist. Der Schubmodul ist gleich

$$N = \frac{1}{k} = \frac{P}{S'w}. \tag{4}$$

Zwischen dem Elastizitätsmodul E, dem Schubmodul N und der Poissonschen Zahl σ besteht die Beziehung

$$N = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \tag{5}$$

die eine große Rolle in der Elastizitätslehre spielt.

Die Biegung. Wird ein gerader elastischer Stab an dem einen Ende unbeweglich in eine Wand eingelassen und ist das andere Ende durch ein Gewicht P belastet, so senkt sich dieses Ende, d. h., der Stab biegt sich durch. Es ist leicht einzusehen, daß bei einer solchen Biegung die oberen Schichten des Stabes eine Dilatation und die unteren eine Kompression erfahren. Dabei bleibt die Länge einer bestimmten mittleren Schicht, *neutrale Faser* genannt, konstant und wird nur verbogen.

Die Größe der Biegung λ, die das freie Ende des Stabes erfährt, wird mit *Biegungspfeil* bezeichnet. Der Biegungspfeil ist um so größer, je größer die Belastung ist, und außerdem muß sie von der Form und den Ausmaßen des Stabes und von seinem Elastizitätsmodul abhängen. Um die Größe des Biegungspfeiles auszurechnen, betrachten wir irgendeinen Querschnitt eines rechteckigen Stabes der Länge L, der Höhe b und der Breite a.

Den Querschnitt legen wir durch den Stab im Abstand x von seinem freien Ende. Auf der Abb. 23 ist ein Element dieses Stabes der Länge dx dargestellt, der sich unmittelbar an den betrachteten Querschnitt anschließt. I bezeichnet die Richtung dieses Querschnittes vor der Biegung und II die Stellung des gleichen Schnittes nach der Biegung hinsichtlich der Nachbarstellung, die mit III bezeichnet ist. Vor der Biegung steht I parallel zu III; nach der Biegung geht I über in die Stellung II, weil der Querschnitt sich um eine Achse dreht, die durch die neutrale Faser OO geht. (Das geschieht deshalb, weil die Teile dx oberhalb der Faser sich verlängern und unterhalb verkürzen.) Wir wollen die Verlängerung dl berechnen, die eine bestimmte willkürlich herausgegriffene Schicht der Höhe dy erleidet, die sich im Abstand y von der neutralen Faser befindet. Aus der Abb. 23 ist ersichtlich, daß

$$\frac{dl}{\sigma} = \frac{y}{\frac{b}{2}},$$

woraus man

$$dl = \frac{2\sigma y}{b}$$

erhält.

Um diese Verlängerung dl hervorzurufen, bedarf es einer gewissen Kraft dF. Sie ist nach dem HOOKEschen Gesetz gleich

$$dF = \frac{E\,ds\,dl}{dx},$$

wobei E der Elastizitätsmodul des Stabmaterials und ds die Fläche der gedehnten Schicht ist. Setzen wir in diesen Ausdruck den schon gefundenen Wert für dl ein und ebenso auch den Wert $ds = a \cdot dy$, was klar aus der Abb. 23 folgt, so erhalten wir

$$dF = \frac{2Ea\sigma y}{dx \cdot b} \cdot dy.$$

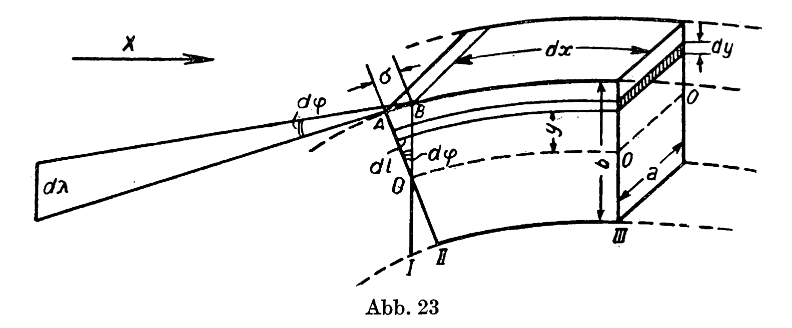


Abb. 23

Um das Drehmoment auszurechnen, das auf den gesamten Querschnitt des Stabes einwirkt, muß man das Moment aller Kräfte dF ausrechnen und sie aufsummieren. Das Drehmoment einer einzelnen Schicht ist

$$dM = y \cdot dF = \frac{2Ea\sigma}{dxb}\, y^2 dy,$$

und folglich ist das durch die elastischen Kräfte hervorgerufene gesamte Drehmoment gleich

$$M = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{2Ea\sigma}{dxb} \cdot y^2 \cdot dy = \frac{Ea\sigma b^2}{6dx}.$$

Da im Gleichgewichtsfall das durch die elastischen Kräfte erzeugte Drehmoment gleich dem durch die äußeren Kräfte hervorgerufenen Drehmoment sein muß, kann man also schreiben:

$$M = \frac{Ea\sigma b^2}{6dx} = Px, \tag{6}$$

wobei P das am freien Ende des Stabes aufgehängte Gesamtgewicht und x der Abstand des Aufhängepunktes von dem betrachteten Querschnitt bedeuten.

Als Maß der Biegung im betrachteten Querschnitt erscheint der Winkel $d\varphi$, der durch die beiden Richtungen I und II des Querschnittes gebildet wird (Abb. 23). Man sieht leicht ein, daß

$$d\varphi = \frac{\sigma}{\frac{b}{2}} = \frac{2\sigma}{b}.$$

Wir zeichnen in den Punkten A und B die Senkrechten zu den Richtungen der Schnitte I und II ein und verlängern sie bis zum freien Ende des Stabes. Wir geben ihnen also die Länge x. Es ist klar, daß diese beiden Strecken einen Winkel miteinander bilden, der gleich $d\varphi$ ist. Der Abstand $d\lambda$ zwischen den Enden beider Strecken ist das Element des Biegungspfeiles, das infolge des eben betrachteten Querschnittes entsteht. Aus der Abb. 23 ist klar ersichtlich, daß $d\lambda = x \cdot d\varphi$. Setzen wir in diese Gleichung den schon gefundenen Wert für $d\varphi$ ein und ebenso den Wert

$$\sigma = \frac{6Pxdx}{Eab^2}$$

aus der Gleichung (6), so finden wir

$$d\lambda = \frac{2\sigma x}{b} = \frac{12Px^2}{Eab^3}dx. \tag{7}$$

Der gesamte Biegungspfeil wird durch das Integral

$$\lambda = \int_0^L \frac{12P}{Eab^3}x^2 dx = \frac{4PL^3}{Eab^3} \tag{8}$$

dargestellt.

Das ist der Biegungspfeil eines Stabes, der an einem Ende unbeweglich befestigt ist und an dem freien Ende eine Last trägt. Liegt der Stab an beiden Enden frei auf festen Stützen und ist er in der Mitte durch das Gewicht P belastet (siehe Abb. 26), so findet man den Biegungspfeil ebenfalls aus der Gleichung (7), doch muß man statt der Größe P den Wert $\frac{P}{2}$ einsetzen und nicht von 0 bis L, sondern von 0 bis $\frac{L}{2}$ integrieren. Tatsächlich übt in diesem Falle der Biegung jede der Stützen auf den Stab eine Gegenkraft aus, die gleich $\frac{P}{2}$ ist, wenn der mittlere Teil horizontal bleibt. Deshalb benimmt sich der an beiden Enden gestützte Stab genauso wie ein in der Mitte befestigter, auf den an beiden Enden im Abstand $\frac{L}{2}$ von seiner Mitte die Kraft $\frac{P}{2}$ nach oben wirkt. Folglich ist hierbei die Größe des Biegungspfeiles gleich

$$\lambda = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{12\frac{P}{2}x^2}{Eab^3}dx = \frac{PL^3}{4Eab^3},$$

woraus

$$E = \frac{PL^3}{4ab^3\lambda} \tag{9}$$

folgt.

Die Drillung. Wenn der Draht oder Stab, der an dem einen Ende befestigt ist, dadurch verdrillt wird, daß an sein anderes Ende ein Kräftepaar PP angelegt wird, das ein Drehmoment M erzeugt, so ist der Winkel der Drillung nach dem ersten HOOKEschen Gesetz gleich

$$\varphi = cM,$$

wobei c ein Koeffizient ist, der von dem Material des Drahtes abhängt. Der *Torsionsmodul* f ist gleich

$$f = \frac{1}{c} = \frac{M}{\varphi}. \tag{10}$$

Zwischen dem Torsionsmodul und dem Schubmodul des Drahtmaterials läßt sich eine einfache Beziehung herleiten. Dafür betrachten wir einen Draht der Länge L mit dem Radius R und dem Schubmodul N (Abb. 24). Wir spannen den oberen Querschnitt unbeweglich ein und legen an den unteren ein Kräftepaar PP, das ein Drehmoment M erzeugt. Unter der Wirkung dieses Kräftepaares wird der untere Querschnitt des Drahtes um den Winkel φ verdrillt. Nun sei ds irgendein unendlich kleines Flächenelement des unteren Drahtquerschnittes, das den Abstand r von der Drahtachse OO_1 besitzt, und befinde sich vor der Drillung im Punkte A; nach der Drillung geht dieses Element in den Punkt B über und die Vertikale CA in eine Schraubenlinie CB. Es werden alle Elemente innerhalb und außerhalb dieses herausgegriffenen Zylinders verzerrt, weil das Drahtmaterial Deformationen der Scherung erleidet. Ist der Scherungswinkel w, dann ist leicht aus der Abb. 24 ersichtlich, daß

$$w = \frac{BA}{L} = \frac{r\varphi}{L}. \tag{11}$$

Wenn das Element ds um den Winkel w verschoben werden soll, muß daran, auf Grund der Formel (4), die Kraft

$$dp = N w ds$$

angelegt werden. Setzen wir darin den Wert

$$ds = r d\alpha dr$$

ein, der sich leicht aus der Abb. 24 ablesen läßt, und den Wert für w aus der Gleichung (11), so erhalten wir

$$dp = \frac{N r^2 \varphi \cdot dr \cdot d\alpha}{L}.$$

Das Moment dieser Kraft, bezogen auf die Drehachse, ist gleich

$$dm = dp \cdot r = \frac{N r^3 \varphi \cdot dr \cdot d\alpha}{L}.$$

Um das Kraftmoment (dM) zu finden, das auf den ganzen in Abb. 24 ein-

gezeichneten Ring wirkt, muß man alle Momente dm über α summieren:

$$dM = \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} \frac{N r^3 \varphi \cdot dr}{L} \cdot d\alpha .$$

Weil alle unter den Integralzeichen stehenden Größen außer $d\alpha$ nicht von α abhängen, ist

$$dM = \frac{2\pi N r^3 \varphi \cdot dr}{L} .$$

Um jedoch das gesamte Moment M zu erhalten, d. h. das auf die ganze Grundfläche wirkende Moment, muß man alle Momente dM über r aufsummieren. Wir erhalten dann

$$M = \int_0^R \frac{2\pi N \varphi}{L} \cdot r^3 \cdot dr = \frac{N \pi \varphi R^4}{2L} . \tag{12}$$

Nun ist auf Grund der Gleichung (10)

$$M = f\varphi .$$

Setzen wir den Wert M in den Ausdruck (12) ein, so erhalten wir endlich

$$f = \frac{N \pi R^4}{2L} . \tag{13}$$

Hierbei ist N der Schubmodul des Drahtmaterials und f der Torsionsmodul des betrachteten Abschnitts des Drahtes.

Aus den Formeln (2) und (4) sieht man, daß die *Dimensionen der Moduln E* und *N* gleich sind. Tatsächlich ist die Dimension des Elastizitätsmoduls E [siehe Formel (2)]

$$[E] = \left[\frac{PL}{S\Delta L}\right] = \frac{[P]}{[S]}$$

Abb. 24

und die Dimension des Schubmoduls N [siehe Formel (4)]

$$[N] = \left[\frac{P}{S'\omega}\right] = \frac{[P]}{[S]} .$$

Der Zahlenwert des Elastizitätsmoduls hängt dabei von den Einheiten ab, in denen die Kraft und die Fläche gemessen werden. Im CGS-System wird der Elastizitätsmodul in dyn/cm² angegeben und im praktischen System in kp/mm². Wenn man von dem Wert des Moduls im praktischen System zu dem Wert im CGS-System übergehen will, so muß man den Wert des Moduls im praktischen System mit $9{,}81 \cdot 10^7$ multiplizieren.

Übung 1

Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus der Dehnung mit einer Anordnung nach Lermantow

Zubehör: 1. Anordnung, 2. Maßstab, 3. Fernrohr, 4. Mikrometer.

Die Beschreibung der Anordnung. Die Anordnung besteht aus zwei Konsolen A und B (Abb. 25), die übereinander angebracht sind und zur Befestigung des zu untersuchenden Drahtes dienen. Bei der Belastung, die durch die Gewichte PP hervorgerufen wird, dehnt sich der Draht aus, und der Stab r, der den Spiegel M trägt und auf dem Zylinder d aufliegt, dreht sich um die Achse O.

Bei Verlängerung des Drahtes um Δl neigt sich der Spiegel um den Winkel α, und es gilt die Beziehung

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta l}{b},$$

wobei b die Länge des Stabes r ist. Die Änderung der Stellung des Spiegels kann man an der Skala S ablesen, deren Abbildung man im Spiegel mit dem Fernrohr R beobachtet. Das Fernrohr besitzt im Okular ein Fadenkreuz oder einen horizontalen Faden. Ist Δn die Differenz der Skalenteile bei der Drehung des Spiegels um den Winkel α, und D der Abstand zwischen Spiegel und Skala, so kann man schreiben:

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{\Delta n}{D}.$$

Abb. 25

Da Δl sehr klein ist, ist der Winkel α auch sehr klein, deshalb kann man $\operatorname{tg} 2\alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha$ setzen. Durch Vergleich der Formeln erhalten wir

$$\Delta l = \frac{\Delta n}{2D} b. \tag{14}$$

Die untere Konsole B trägt eine Arretierung f. Dreht man die Schraube c herein, so kann man den Draht von der Belastung befreien. Die für die Belastung des Drahtes notwendigen Gewichte werden von einem Regal heruntergenommen, das extra dafür an der oberen Konsole befestigt ist. Entlastet man den Draht, so werden die Gewichte auf das Regal zurückgelegt. Damit erreicht man eine stetige Belastung der oberen Konsole und somit eine konstante Durchbiegung derselben. Die Belastung des Drahtes und das Abnehmen der Gewichte muß stets bei arretierter Anordnung geschehen.

Die Messung. Die Länge des Drahtes l wird in entarretiertem Zustand mit dem Maßstab und der Durchmesser, der zur Bestimmung des Querschnittes benötigt wird, mit der Mikrometerschraube gemessen. Die Messung des Durchmessers muß mehrmals an verschiedenen Stellen des Drahtes durchgeführt werden. Aus den erhaltenen Werten wird das arithmetische Mittel gebildet.

Zuerst wird der Draht mit der Hälfte der zur Verfügung stehenden Gewichte belastet, in dem Fernrohr das Bild der Skala gesucht, das Rohr festgeklemmt und die Skala so aufgestellt, daß gerade ihre Mitte im Fernrohr erscheint. Dann mißt man mit dem Maßstab den Abstand D zwischen Spiegel und Skala. (Danach wird weder Skala noch Fernrohr verstellt.) Schließlich wird arretiert, die Gewichte heruntergenommen und nach Entarretierung der Nullpunkt auf der Skala festgelegt.

Nach und nach wird nun der Draht mit den Gewichten belastet (auf jedem von ihnen ist sein Wert angegeben), die im Fernrohr beobachteten Skalenteile abgelesen und festgestellt, um wieviel Skalenteile sich das Bild der Skala verschiebt. Das wird für alle Gewichte durchgeführt. Sie werden nacheinander von dem Regal genommen und bei der Rückwärtsmessung wieder auf das Regal zurückgelegt.

Wenn sich der Nullpunkt verschiebt, wird der Mittelwert aus zwei Ablesungen genommen. Das gleiche geschieht auch mit allen anderen Ablesungen, die bei gleicher Belastung ausgeführt wurden.

Es ist notwendig, eine graphische Darstellung der Änderung der Länge des Drahtes mit der Größe der Belastung anzufertigen und sich von der Linearität des HOOKEschen Gesetzes zu überzeugen.

Die ausgeführten Messungen geben die Möglichkeit, die Verlängerung Δl des Drahtes nach der Formel (14) (die Größe b ergibt sich als Konstante der Anordnung) und außerdem den Elastizitätsmodul nach der Formel (2) für jede Belastung zu bestimmen. Der wahre Wert für E ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der Einzelmessungen (E wird in kp/cm^2 angegeben).

Übung 2

Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus der Biegung

Zubehör: 1. Anordnung zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus der Biegung, dazu eine Anzahl von Stäben mit rechteckigem Querschnitt, 2. Mikroskop zur Messung vertikaler Abstände, 3. Schublehre, 4. Maßstab.

Die Beschreibung der Anordnung. Die Anordnung zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus der Biegung besteht aus einer massiven Grundplatte ss' (Abb. 26), die an den Enden zwei Stützen trägt. Auf den Stützen sind Stahlschneiden so befestigt, daß ihre Kanten parallel zueinander stehen.

Das zur Messung der vertikalen Abstände dienende Gerät besteht aus einer vertikalen ablesbaren Verstellung, die in einem mit Stellschrauben versehenen Dreibein steckt. Auf der Verstellung ist das Mikroskop, das mit einem Okularmikrometer ausgerüstet ist, in horizontaler Lage so befestigt, daß es sich leicht um die vertikale Achse drehen läßt. Bei groben Messungen und Messungen von Entfernungen, die nicht mehr mit dem Okularmikrometer

allein ausgeführt werden können, liest man an der Skala der Verstellung ab. Bei kleinen Entfernungen wird nur das Okularmikrometer benutzt.

Die Messung. Auf die Schneiden der Anordnung wird ein Stab aus dem zu untersuchenden Material so gelegt, daß die Mitte des Stabes C mit der Mitte des Abstandes zwischen A und B (Abb. 26) zusammenfällt. Im Punkte C wird eine Vorrichtung zur Aufnahme der Gewichte angebracht.

Das Mikroskop wird nun auf die Spitze des Stiftes, an dem die Vorrichtung hängt, gerichtet. Natürlich mußte das Mikroskop vorher mit Hilfe der Stellschrauben und einer Wasserlibelle horizontal gestellt worden sein. Man bestimmt den Wert eines Teilstriches des Mikrometers (siehe Aufgabe 72). Dazu läßt man den Nullpunkt der Mikrometerteilung mit der Spitze der Schneide zusammenfallen und liest die Stellung des Zeigers auf der Skala der Verstellung ab. Dann wird der letzte Teilstrich des Mikrometers auf die Spitze des Stiftes D eingestellt und erneut die Stellung des Zeigers auf der Skala abgelesen. Hieraus errechnet man den Wert eines Teilstriches des Mikrometers.

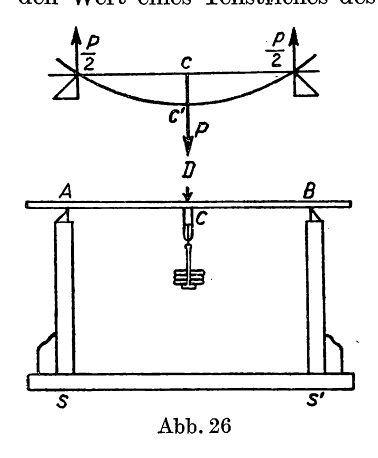


Abb. 26

Danach belastet man den Stab nacheinander mit den Gewichten von 1, 2 und 3 kp und liest jedesmal ab, um wieviel Teilstriche sich der Stab durchbiegt. Das gleiche wird in umgekehrter Reihenfolge durchgeführt, d. h., man entlastet allmählich den Stab und liest jedesmal seine Durchbiegung ab. Die Verschiebung (Biegung) CC' der Mitte des Stabes ist gerade sein Biegungspfeil. Ist der Wert eines Teilstriches des Mikrometers bekannt, so kann man den Biegungspfeil in Millimetern angeben.

Es ist notwendig, eine graphische Darstellung der Änderung des Biegungspfeiles mit sich ändernder Belastung anzufertigen und sich von der Linearität zu überzeugen (HOOKEsches Gesetz).

Endlich werden die Länge des Stabes L, d. h. der Abstand zwischen den Kanten der Schneiden, auf denen er aufliegt, und die Seiten a und b des rechteckigen Querschnittes des Stabes gemessen. Die Länge wird mit einem Maßstab auf 1 mm genau und die Breite und Höhe des Stabes mit dem Mikrometer (siehe Aufgabe 1) auf 0,01 mm genau gemessen. Aus den gemessenen Werten rechnet man mit Hilfe der Formel (9) den Elastizitätsmodul aus. Das Endresultat soll sowohl in kp/mm² als auch in dyn/cm² angegeben werden.

Die Messung des Elastizitätsmoduls aus der Biegung wird an drei Stäben von verschiedenem Durchmesser und aus verschiedenen Materialien durchgeführt.

Aufgabe 10

Die Bestimmung des Schubmoduls aus der Drillung

Zubehör: 1. Anordnung, 2. Stoppuhr.

Die Beschreibung der Anordnung und die Theorie dieser Methode. (Über die theoretische Einführung siehe Aufgabe 9.) Der Torsionsmodul f und der Schubmodul N, deren Beziehung zueinander im Falle eines zylindrischen Drahtes oder Stabes durch die Formel (13) der Aufgabe 9 angegeben worden ist, können durch Messung der Schwingungsdauer der *Drehschwingungen* eines Drahtes, der mit einem bestimmten Gewicht belastet ist, bestimmt werden. Für die Bestimmung des Schubmoduls dient folgende Anordnung: An einer an der Wand befestigten Konsole ist ein Draht aus dem zu untersuchenden Material eingespannt. An das untere Ende des Drahtes ist eine horizontale Latte PP_1 befestigt (Abb. 27), die mit gleichen Gewichten m, m_1 belastet wird. Sie werden in zwei Stellungen angehängt: entweder in die inneren Kerben a, a_1 oder in die weiter außen liegenden b, b_1. Der ganze untere Teil des Drahtes mit der Latte wird durch einen Kasten vor Stößen und Luftströmungen geschützt.

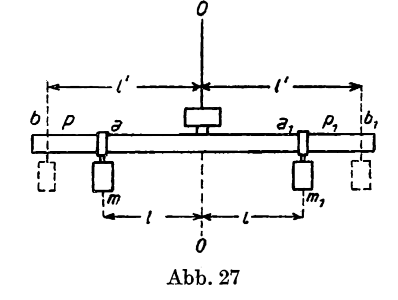


Abb. 27

Wenn man das System in Drehung versetzt und dann sich selbst überläßt, erhält man ein *Drehpendel*. Für die Bestimmung des Schubmoduls muß man die Schwingungsdauer des Pendels bei den zwei oben beschriebenen Stellungen der Gewichte messen.

Tatsächlich kann man, wenn der schwingende feste Körper eine Drehbewegung ausführt, auf ihn das Grundgesetz der Drehbewegung anwenden:

$$M = I\frac{d\omega}{dt},$$

wobei M das Drehmoment relativ zur Achse OO (Abb. 27), I das Trägheitsmoment des Körpers relativ zur selben Achse, und $\frac{d\omega}{dt}$ die Winkelbeschleunigung bedeuten. Setzen wir hier den Wert für M aus der Gleichung (10)[1]) der Aufgabe 9 und den Wert

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

ein, so erhalten wir

$$f\varphi = -I\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

[1]) Man muß dabei berücksichtigen, daß das Drehmoment stets so gerichtet ist, daß die Winkelauslenkung φ verringert wird. Deshalb müssen M und φ in Formel (10) verschiedene Vorzeichen tragen.

Aus dieser Gleichung entnimmt man, daß bei der hier betrachteten Bewegung die Beschleunigung $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ der Abweichung φ proportional, ihr jedoch entgegengesetzt gerichtet ist. Das ist aber gerade die wesentlichste Eigenschaft einer *harmonischen Schwingung.* Somit führt der Körper eine harmonische Bewegung aus. Seine Schwingungsdauer kann man finden, wenn man sich daran erinnert, daß der Proportionalitätsfaktor zwischen $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ und φ, in diesem Fall $\frac{f}{I}$, gleich $\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$ sein muß, d. h.

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{f}{I},$$

woraus man

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}$$

erhält. Hier ist T die Dauer einer vollen Schwingung des Pendels. Für die Dauer einer einfachen Schwingung erhalten wir

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{I}{f}}.$$

Um aus diesen Schwingungen f zu finden, muß man das unbekannte Trägheitsmoment I eliminieren. Dazu bestimmt man in dieser Aufgabe zwei Schwingungsdauern τ und τ_1 des Pendels, die den beiden eingekerbten Stellungen der Gewichte entsprechen, d. h. den beiden entsprechenden Trägheitsmomenten. Dabei erhalten wir

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{I}{f}} \quad \text{und} \quad \tau_1 = \pi\sqrt{\frac{I_1}{f}}, \tag{1}$$

daraus folgt

$$\frac{\tau^2}{\tau_1^2} = \frac{I}{I_1}. \tag{2}$$

Das Trägheitsmoment des Drehpendels läßt sich darstellen aus dem Trägheitsmoment der Gewichte $2ml^2$ + Trägheitsmoment j der Latte und des Drahtes, d. h.:

$$I = 2ml^2 + j \quad \text{und} \quad I_1 = 2ml_1^2 + j.$$

Um die Unbekannte j auszuschließen, subtrahieren wir I von I_1:

$$I_1 - I = 2m(l_1^2 - l^2).$$

Setzen wir hierin den Wert

$$I_1 = \frac{I\tau_1^2}{\tau^2}$$

aus der Gleichung (2) ein, so finden wir

$$I = \frac{2m\tau^2(l_1^2 - l^2)}{\tau_1^2 - \tau^2}. \tag{3}$$

Setzen wir endlich diesen Ausdruck in die erste der Gleichungen (1) ein, so finden wir für den Torsionsmodul f:

$$f = \frac{\pi^2 I}{\tau^2} = \frac{2 m \pi^2 (l_1^2 - l^2)}{\tau_1^2 - \tau^2}.$$

Kennen wir den Torsionsmodul, so läßt sich leicht der Schubmodul des Drahtmaterials aus der Gleichung (13) der Aufgabe 9 angeben, wie schon oben erwähnt wurde:

$$N = \frac{2 L f}{\pi R^4} = \frac{4 m \pi L (l_1^2 - l^2)}{(\tau_1^2 - \tau^2) R^4}. \tag{4}$$

Die Messung. Die Schwingungen des Systems beobachtet man, indem man die Bewegung eines Lichtfleckes auf einem Schirm verfolgt. Der Lichtfleck wird durch eine Lampe erzeugt, deren Strahlen über einen am Draht befestigten Spiegel auf den Schirm geworfen werden.

Um die einfache Schwingungsdauer bei irgendeiner Stellung der Gewichte auf der Latte zu messen, beobachtet man, wann der Lichtfleck über den Rand des Schirmes hinauspendelt und drückt in diesem Moment, mit Null beginnend, auf die Stoppuhr. Man zählt dann weiter „eins", „zwei", „drei" usw. bei jedem Durchgang des Fleckes durch den Rand des Schirmes. Bei dem Wert „zehn" wird die Uhr gestoppt. Wenn die Stoppuhr T Sekunden anzeigt, so ist die einfache Schwingungsdauer τ gleich $\frac{T}{10}$. Genauso wird die einfache Schwingungsdauer für die andere Stellung der Gewichte auf der Latte bestimmt.

Außer dem schon Angeführten ist es notwendig: 1. die Länge des Drahtes von der oberen Einspannung bis zur unteren zu messen; 2. mehrmals mit der Mikrometerschraube (siehe Aufgabe 1) den Radius des Drahtes zu messen und den Mittelwert zu bilden; 3. den Abstand zwischen den Kerben auf der Latte zu messen; 4. durch Wägung die Masse der Gewichte zu bestimmen (aus den erhaltenen Werten den mittleren zu nehmen).

Kennen wir alle diese Größen, so erlaubt uns die Formel (4), den Schubmodul des Drahtmaterials zu bestimmen. Die Größe dieses Schubmoduls soll sowohl in dyn/cm² als auch in kp/mm² angegeben werden.

Aufgabe 11

Die Bestimmung des Trägheitsmomentes und die Prüfung des Steinerschen Satzes mit der Methode der Drehschwingungen

Übung 1

Die Bestimmung des Trägheitsmomentes mit der Methode der trifilaren Aufhängung

Zubehör: 1. Trifilare Aufhängung, 2. Zeitmesser, 3. Schublehre, 4. Meßobjekt.

Die Theorie der Methode. Die trifilare Aufhängung (Abb. 28) ist hier dadurch verwirklicht, daß eine runde Plattform an drei symmetrisch an-

geordneten Fäden aufgehängt ist. Die Fäden sind am Rand dieser Plattform befestigt. An den oberen Enden sind die Fäden ebenfalls symmetrisch an einer Scheibe befestigt, deren Durchmesser etwas kleiner ist als der Durchmesser der Plattform. Die Plattform kann Drehbewegungen um die vertikale Achse, die senkrecht zu ihrer Fläche steht und durch ihre Mitte verläuft, ausführen. Der Schwerpunkt der Plattform verschiebt sich dabei auf der Drehachse. Die Schwingungsdauer wird durch die Größe des Trägheitsmomentes der Plattform bestimmt und ändert sich, wenn die Plattform mit irgendeinem Gegenstand belastet wird. Diese Tatsache wird gerade in dieser Übung ausgenutzt.

Wenn die Plattform der Masse m, die sich in einer Richtung dreht, um die Höhe h gehoben wird, so nimmt ihre potentielle Energie zu um

$$E_1 = mgh,$$

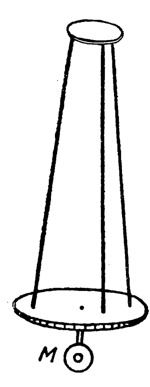


Abb. 28

wobei g die Schwerebeschleunigung bedeutet. Dreht sich die Plattform in der entgegengesetzten Richtung, so erreicht sie eine Gleichgewichtslage mit der kinetischen Energie, die gleich

$$E_2 = \frac{1}{2} I \omega_0^2$$

ist, wobei I das Trägheitsmoment der Plattform und ω_0 ihre Winkelgeschwindigkeit im Moment des Erreichens der Gleichgewichtslage bedeuten. Vernachlässigen wir die Arbeit der Reibungskräfte, so können wir auf Grund des Energieerhaltungssatzes schreiben:

$$\frac{1}{2} I \omega_0^2 = mgh. \tag{1}$$

Unter der Annahme, daß die Plattform harmonische Schwingungen ausführt, können wir die Abhängigkeit der Drehung der Plattform um den Winkel β von der Zeit in folgender Form schreiben:

$$\beta = \alpha \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

wobei α die Amplitude der Verdrehung, T die volle Schwingungsdauer und t die Zeit bedeuten. Die Winkelgeschwindigkeit ω, die gleich der ersten Ableitung von β nach der Zeit ist, wird ausgedrückt durch

$$\omega = \frac{d\beta}{dt} = \frac{2\pi\alpha}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Im Moment des Durchganges durch die Gleichgewichtslage ($t = 0$, $^1/_2\, T$, T, $^3/_2\, T$ usw.) ist der absolute Wert dieser Größe:

$$\omega_0 = \frac{2\pi\alpha}{T}. \tag{2}$$

Auf Grund der Gleichung (1) und (2) erhalten wir

$$mgh = \frac{1}{2} I \left(\frac{2\pi\alpha}{T}\right)^2. \tag{3}$$

Ist l die Länge der zur Aufhängung dienenden Fäden, R der Radius der Plattform und r der Radius der oberen Scheibe, so ist leicht einzusehen (siehe Abb. 29), daß

$$h = OO_1 = BC - BC_1 = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1}.$$

Und weil

$$(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = l^2 - (R - r)^2,$$
$$(BC_1)^2 = (BA_1)^2 - (A_1C_1)^2 = l^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha),$$

erhalten wir

$$h = \frac{2Rr(1 - \cos\alpha)}{BC + BC_1} = \frac{4Rr\sin^2\frac{\alpha}{2}}{BC + BC_1}.$$

Bei kleinen Winkeln der Auslenkung α kann man den Wert des Sinus dieses Winkels einfach durch den Wert von α ersetzen und die Größe des Nenners gleich $2l$ setzen. Beachten wir dieses, so haben wir

$$h = \frac{Rr\alpha^2}{2l}.$$

Dann ist auf Grund von (3)

$$mg\frac{Rr\alpha^2}{2l} = \frac{1}{2} I \left(\frac{2\pi\alpha}{T}\right)^2,$$

woraus folgt

$$I = \frac{mgRr}{4\pi^2 l} T^2. \tag{4}$$

Nach dieser Formel (4) kann man das Trägheitsmoment der Plattform selbst und des auf sie gelegten Körpers bestimmen, da alle Größen der rechten Seite der Formel unmittelbar gemessen werden können.

Abb. 29

Der für die Drehschwingungen notwendige Anfangsimpuls wird der Plattform durch die Drehung der oberen Scheibe erteilt. Das geschieht durch Ziehen an einer Schnur, die an einem kleinen mit der Scheibe verbundenen Hebel befestigt ist. Damit wird fast nur eine reine Drehschwingung erzeugt und keine sonstigen Schwingungen, die die Messung erschweren würden.

Um die Ablesung der Schwingungen zu erleichtern, ist unterhalb der Plattform an ihrer Achse ein Spiegel M angebracht (Abb. 28). Ein Lichtstrahl wird über den Spiegel auf eine Skala fokussiert, auf der man die Schwingungen der Plattform verfolgen kann.

Die Messung. Zuerst wird nach der Formel (4) das Trägheitsmoment I_0 der Plattform selbst bestimmt. Da die Größen l, R, r und die Masse der

Plattform m_0 als Konstante der Anordnung gegeben sind, wird nur die Zeit einer vollen Schwingungsdauer T_0 der Plattform bestimmt. Dazu wird der Plattform ein Drehimpuls erteilt (die Verschiebung des Lichtzeigers auf der Skala darf nicht mehr als 20 bis 30 cm betragen), und mit Hilfe eines Zeitmessers die Zeit einer bestimmten Anzahl (50 bis 100) voller Schwingungen gemessen. Damit erhält man die Möglichkeit, die Größe der Schwingungsdauer T_0 mit genügender Genauigkeit zu bestimmen.

Danach wird die Plattform mit dem zu untersuchenden Körper belastet, dessen Masse schon vorher durch Wägung bestimmt worden ist, und erneut die Schwingungsdauer T des gesamten Systems gemessen. Man benutzt die Formel (4) und berechnet das Trägheitsmoment I_1 des gesamten Systems. Dabei nimmt man an, daß seine Masse m gleich der Summe der Masse des Körpers und der Plattform ist. Die Größe des Trägheitsmomentes des Körpers I ergibt sich als Differenz: $I = I_1 - I_0$.

Mit Hilfe der trifilaren Aufhängung kann man auch den STEINERschen Satz (siehe Übung 2) prüfen, doch sind zwei völlig gleiche Körper notwendig. Zuerst bestimmt man das Trägheitsmoment eines Körpers, dann ordnet man beide Körper auf der Plattform symmetrisch an und bestimmt das Trägheitsmoment einer solchen Anordnung. Die Hälfte dieser Größe ergibt das Trägheitsmoment eines Körpers, der sich in einem festen Abstand von der Drehachse befindet. Kennt man die Entfernung, die Masse des Körpers und sein Trägheitsmoment, wenn er im Zentrum der Plattform liegt, so kann man den erwähnten Satz prüfen.

Die Körper müssen auf der Plattform streng symmetrisch angeordnet werden, so daß die Plattform keine schräge Lage erhält. Dazu sind auf der Plattform konzentrische Kreise in einem bestimmten Abstand voneinander markiert. Bei den Messungen dürfen keine Schwingungsamplituden erzeugt werden, die größer sind als 6 bis 8°.

Übung 2

Die Prüfung des STEINERschen Satzes mit einem Pendel

Zubehör: 1. Anordnung, 2. Stoppuhr, 3. Maßstab.

Der STEINERsche Satz behauptet: Das Trägheitsmoment eines Körpers, bezogen auf eine beliebige Drehachse, ist gleich dem Trägheitsmoment des Körpers, bezogen auf eine parallel zur ersten durch den Schwerpunkt des Körpers gehende Achse plus dem Produkt aus der Masse des Körpers und dem Quadrat des Abstandes zwischen dem Schwerpunkt des Körpers und der ersten Drehachse.

Wenn der Körper um irgendeinen Punkt eine fortschreitende rotationsfreie Bewegung ausführt, so ist das Trägheitsmoment des Körpers, bezogen auf diesen Punkt, gleich $m R^2$, wobei m die Masse des Körpers und R der Abstand zwischen diesem Punkt und dem Schwerpunkt des Körpers bedeuten. Wenn der Körper sich um den Punkt dreht, so ist sein Trägheitsmoment, bezogen auf die durch diesen Punkt gehende Achse, gleich $I_0 + m R^2$,

wobei I_0 das Trägheitsmoment, bezogen auf die durch den Schwerpunkt gehende Achse, ist.

Die Anordnung (Abb. 30) besteht aus einem leichten (Aluminium-) Rahmen AA, der durch einen Draht an einem Stativ so befestigt ist, daß der Rahmen Drehschwingungen um die vertikale Achse ausführen kann. An dem Rahmen sind in der horizontalen Ebene zwei massive kreisförmige Metallscheiben BB, die sich um ihre eigenen Achsen drehen oder durch die Spezialschrauben dd festgeklemmt werden können, symmetrisch befestigt.

Die Schwingungsdauer des Rahmens mit festgeklemmten und freien Scheiben ist verschieden (siehe Aufgabe 10), und zwar

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{f}} \quad \text{und} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{f}}, \tag{5}$$

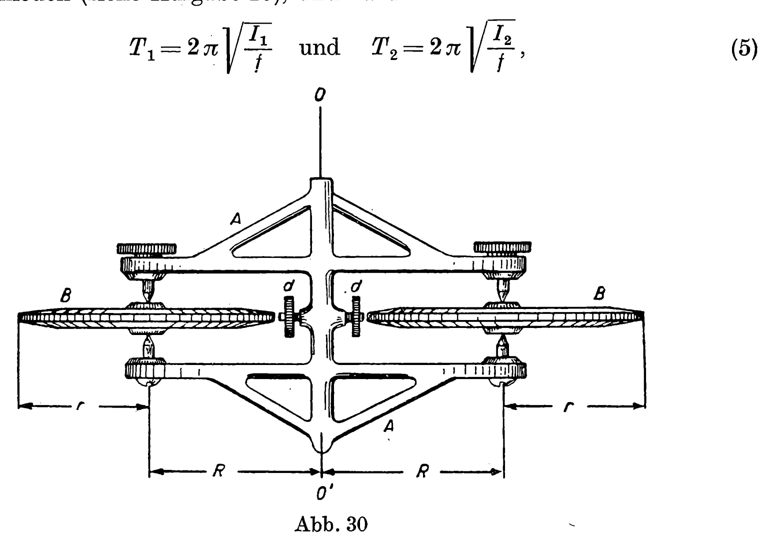


Abb. 30

wobei T_1 und T_2 die Schwingungsdauern des Rahmens im Falle der festgeklemmten und freien Scheiben, I_1 und I_2 die entsprechenden Trägheitsmomente und f der Torsionsmodul des für die Aufhängung des Rahmens dienenden Drahtes bedeuten. Aus der Gleichung (1) erhalten wir

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{I_1}{I_2}. \tag{6}$$

Das Verhältnis $\frac{I_1}{I_2}$ läßt sich leicht theoretisch bestimmen. Im Falle der freien Scheiben ist

$$I_1 = 2mR^2, \tag{7}$$

wobei m die Masse einer Scheibe und R der Abstand zwischen ihrer Mitte und der Drehachse bedeuten. Das Trägheitsmoment des Rahmens ist im Falle festgeklemmter Scheiben, in Übereinstimmung mit dem STEINERschen Satz,

$$I_2 = 2mR^2 + 2\cdot\frac{1}{2}mr^2, \tag{8}$$

wobei r der Radius der Scheiben ist. Vernachlässigt man das Trägheitsmoment des Aluminiumrahmens und benutzt man die Gleichungen (2), (3) und (4), so kann man schreiben:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{2R^2}{2R^2 + r^2}. \tag{9}$$

Die Beziehung (9) soll in dieser Aufgabe geprüft werden.

Die Messung. Zuerst werden die Größen R und r mit dem Maßstab bestimmt. Dann werden die vollen Schwingungsdauern des Rahmens mit den Scheiben im Falle freier und festgeklemmter Scheiben (T_1 und T_2) gemessen. Dazu wird der Rahmen um die Achse OO' um 10 bis 12° gedreht und mit einer Stoppuhr die Zeit von 20 bis 30 vollen Schwingungen bei freien und festgeklemmten Scheiben gemessen. Die Messung wird einige Male wiederholt. Endlich bildet man das Verhältnis $\frac{T_1^2}{T_2^2}$ und vergleicht es mit dem nach Formel (5) berechneten.

Aufgabe 12

Die Bestimmung der Dauer eines Zusammenstoßes zweier Kugeln bei elastischem Stoß mit Hilfe des ballistischen Galvanometers

Zubehör: 1. Stativ mit zwei an Drähten aufgehängten Stahlkugeln, Elektromagnet und Stoppmechanismus, 2. Galvanometer, 3. Stöpselrheostat bis 1000 Ω, 4. Kondensator 0,1 μF, 5. Batterie, 6. Fernrohr mit Skala, 7. Zweipolschalter, 8. Zwei Einpolschalter, 9. Schublehre, 10. Stoppuhr.

Kurze Theorie der Methode und Beschreibung der Anordnung. In dieser Aufgabe wird gemessen, wie lange sich zwei zusammenstoßende Kugeln in Berührung befinden.

Die Berührung fester Körper bei einem Stoß umfaßt, wenn auch eine kleine, so doch endliche Zeitspanne, und die Kräfte der Wirkung und Gegenwirkung sind zwar groß, aber ebenfalls endlich. Bei der Berührung werden beide Kugeln deformiert. Der Berührungspunkt geht in eine runde Fläche und die kinetische Energie der stoßenden Kugel in die Energie einer elastischen Deformation über. Es entstehen elastische Kräfte, die mit zunehmender Deformation größer werden und den höchsten Wert bei der stärksten Zusammendrückung der Kugeln erreichen. Danach geht der umgekehrte Prozeß vor sich: der Übergang der potentiellen Energie der Deformation in die kinetische Energie der Bewegung, bis die Kugeln sich erneut trennen. Die Zeit des Zusammenstoßes hängt ab von den Elastizitätskonstanten des Materials der Kugeln, ihrer relativen Geschwindigkeit im Anfangsmoment des Stoßes und von ihrem Radius.

Wenn man die Kugeln durch Schaltschnüre mit einem aufgeladenen Kondensator verbindet, so entlädt sich dieser während der Zeit des Zusammenstoßes der Kugeln, und man kann sie der Entladungszeit des Kondensators gleichsetzen. Die Methode der Kondensatorentladung zur Messung von kurzen Zeitintervallen wird in dieser Aufgabe verwendet.

Die Entladungszeit des Kondensators τ ist gegeben durch den Ausdruck

$$\tau = CR \ln \frac{q_0}{q}, \tag{1}$$

wobei C die Kapazität des Kondensators, R der Widerstand, über den die Entladung vor sich geht, q_0 die Ladung des Kondensators für $t = 0$ und q die für das betrachtete Zeitmoment $t = \tau$ bedeuten. Entwickeln wir $\ln \frac{q_0}{q}$ in eine Reihe nach der Formel

$$\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \cdots\right],$$

und nehmen wir an, daß $\frac{q_0}{q}$ sehr nahe an 1 ist, so erhalten wir

$$\tau = 2CR\frac{q_0 - q}{q_0 + q}. \tag{2}$$

Diese Formel (2) kann sehr leicht abgeleitet werden, wenn man von folgenden Überlegungen ausgeht: Wenn der Kondensator am Anfang bis zu einer Potentialdifferenz V_0 aufgeladen ist, so ist seine Ladung durch den Ausdruck $q_0 = C V_0$ gegeben. In der Zeit des Zusammenstoßes verkleinern sich die Werte von q_0 und V_0, so daß nach dem Zusammenstoß $q = C V$ gilt. Nun ist

$$\frac{q_0 - q}{\tau} = I, \tag{3}$$

wobei I die mittlere Stromstärke während der Zeit des Zusammenstoßes ist. Unterscheiden sich V_0 und V nur sehr wenig voneinander (das ist äquivalent mit $\frac{q_0}{q}$ sehr nahe an 1), und benutzen wir das Ohmsche Gesetz, so erhalten wir

$$I = \frac{\frac{1}{2}(V_0 + V)}{R} = \frac{\frac{1}{2}(q_0 + q)}{CR}, \tag{4}$$

und wenn wir (3) und (4) vergleichen:

$$\tau = 2CR\frac{q_0 - q}{q_0 + q}. \tag{5}$$

Um die Dauer des Zusammenstoßes nach der Formel (5) bestimmen zu können, müssen die Kapazität des Kondensators C, der Widerstand des Kreises R, über den die Entladung vor sich geht, und die Ladungen des Kondensators q_0 und q (bis zu und nach dem Zusammenstoß) bekannt sein.

Man muß hier anmerken, daß die Größe R groß sein muß, da sich nur dann die Größen V_0 und V wenig voneinander unterscheiden und sich die Änderung des Kontaktwiderstandes bei der Änderung der Berührungsfläche nicht bemerkbar macht. Jedoch darf R auch nicht zu groß gewählt werden, da dann die Differenz $q_0 - q$ klein ist, was den Meßfehler erhöhen würde. Für $C = 0{,}1\ \mu$F empfiehlt es sich, R nicht kleiner als $600\ \Omega$ zu wählen.

Für die Bestimmung der Ladungen q_0 und q des Kondensators benutzt man ein *ballistisches Galvanometer* (siehe die Aufgaben 46 und 47), dessen Rähmchen eine Drehung erfährt, die proportional der durch die Rähmchenspule

fließenden Ladung ist. Der Ausschlag des Lichtzeigers auf der Skala ist ebenfalls der Größe der Ladung proportional:

$$q_0 = \alpha n_0,$$

$$q = \alpha n_1,$$

wobei α ein Proportionalitätsfaktor, n_0 und n_1 die Anzahl der Skalenteile bedeuten. Setzen wir diese Werte in die Gleichung (5) ein, so erhalten wir

$$\tau = 2CR\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1}. \tag{6}$$

Das Schaltbild für die Messung der Dauer des Zusammenstoßes ist in Abb. 31 dargestellt. Beim Schließen des Schalters k_1 wird der Kondensator C durch die Batterie B aufgeladen. Dann wird der Schalter k_1 wieder geöffnet. Öffnet man den Schalter k_2, so wird der Elektromagnet M entmagnetisiert, und die Kugel m_1, die vorher vom Elektromagneten angezogen wurde, wird gelöst und stößt mit der frei hängenden Kugel m_2 zusammen. Während des Zusammenstoßes fließt ein Teil der Ladung des Kondensators über R und die beiden Kugeln ab. Die nach dem Zusammenstoß der Kugeln auf dem Kondensator verbliebene Ladung entlädt sich beim Schließen des Schalters k_3 über das Galvanometer G. Dabei wird der Galvanometerspiegel gedreht, und der Lichtzeiger wandert über die Skala. Der Schalter k_3 ist so gebaut, daß bei geöffneter Stellung das Galvanometer automatisch durch den Draht l kurzgeschlossen wird. Das bewirkt ein schnelles Abklingen der Schwingungen des Rähmchens.

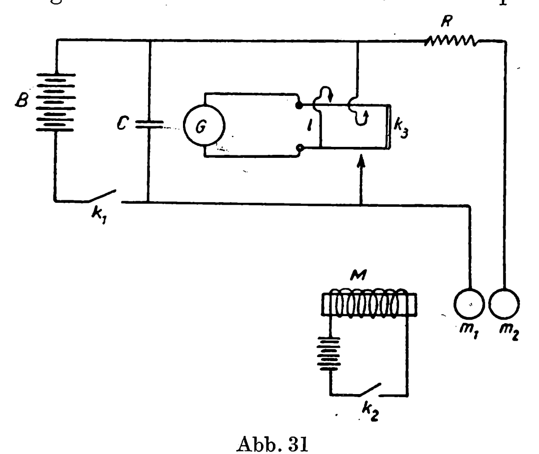


Abb. 31

Jede der beiden Kugeln ist an zwei Fäden aufgehängt. Je ein Faden davon ist leitend und bewirkt die Entladung des Kondensators über die Kugeln bei ihrer Berührung. Die Kugeln müssen beide tiefer hängen, als die Leiste mit dem Elektromagneten M und dem Stoppmechanismus S angebracht ist (Abb. 32). Der Stoppmechanismus dient dazu, die Möglichkeit eines wiederholten Zusammenstoßes der Kugeln auszuschließen.[1]) Ein Hebel des Stoppmechanismus gibt beim Stoß durch die Kugel m_2 nach und hält die Kugel nach dem Stoß in der ausgelenkten Stellung fest.

Abb. 32

[1]) Den Stoppmechanismus kann man auch durch einen Elektromagnet ersetzen.

Für die Dauer des Zusammenstoßes τ erhält man theoretisch den Ausdruck

$$\tau = \alpha v^{\beta}, \tag{7}$$

wobei v die relative Geschwindigkeit der Kugeln bedeutet. α und β sind zwei Konstante, die in dieser Aufgabe experimentell bestimmt werden.

Wenn man drei Zeiten des Zusammenstoßes (τ_1, τ_2 und τ_3) bei verschiedenen Geschwindigkeiten der Kugeln mißt, so erhält man

$$\tau_1 = \alpha v_1^{\beta}; \quad \tau_2 = \alpha v_2^{\beta}; \quad \tau_3 = \alpha v_3^{\beta}.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir durch Division $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\beta}$, woraus wir durch Logarithmieren

$$\beta = \lg \frac{\tau_1}{\tau_2} \Big/ \lg \frac{v_1}{v_2} \tag{8}$$

finden. Die Größen τ_1 und τ_2 werden nach der früher abgeleiteten Formel (6) mit den eingesetzten Galvanometerausschlägen berechnet.

Sehen wir die stoßende Kugel als Pendel an, so erhalten wir bei kleinen Amplituden für die Größe x seiner Auslenkung aus der Gleichgewichtslage den Ausdruck einer harmonischen Schwingung

$$x = a \sin \frac{2\pi}{T} t, \tag{9}$$

wobei a die Amplitude der Schwingung und T die Schwingungsdauer bedeuten. Die Geschwindigkeit der Bewegung der Kugel ändert sich ebenfalls harmonisch und erreicht ihr Maximum beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage (im Moment des Stoßes). Für diese Stellung erhalten wir, wenn wir (9) differenzieren und $t = 0$, $^1/_2\, T$, T, $^3/_2\, T$ usw. annehmen,

$$v = \left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{2\pi}{T} a.$$

Diese Beziehung erlaubt es, das Verhältnis der Geschwindigkeiten durch das Verhältnis der entsprechenden Amplituden zu ersetzen, welche unmittelbar gemessen werden können. Hieraus finden wir

$$\beta = \lg \frac{\tau_1}{\tau_2} \Big/ \lg \frac{a_1}{a_2}.$$

Ist die Konstante β gefunden, kann man, wenn man die Gleichung

$$\tau_3 = \alpha \left(\frac{2\pi}{T} a_3\right)^{\beta}$$

benutzt, auch die Konstante α bestimmen. Dazu ist es jedoch noch erforderlich, die Schwingungsdauer T der stoßenden Kugel zu messen.

Die Messung. Die Reihenfolge der Durchführung der Experimente ist folgende: Die Kugeln werden so eingerichtet, daß sie sich im ruhenden Zustand fast berühren (der Zwischenraum zwischen ihren Oberflächen betrage 5 mm). Man prüft die freie Bewegungsmöglichkeit der Kugeln und die Zuverlässigkeit des Stoppmechanismus. Man baut die Schaltung auf, schaltet die Galvano.

meterlampe ein und notiert die Stellung des Lichtzeigers auf der Skala (Nullstellung).

Weiterhin bestimmt man die Größe des Ausschlages, die dem Fließen der Gesamtladung q_0 des aufgeladenen Kondensators entspricht. Dazu schließt man den Schalter k_1, öffnet ihn wieder und schließt dann den Schalter k_3. Man schreibt auf, um wieviel Teilstriche sich der Zeiger von der Nullstellung entfernt hat. Die Auslenkung möge n_0 Teilstriche betragen. Dabei müssen die Kugeln jedoch ruhig hängen und dürfen sich nicht berühren.

Hierauf bestimmt man die Anzahl der Teilstriche, die der durch das Galvanometer fließenden Ladung q des Kondensators nach dem Zusammenstoß der Kugeln entspricht. Dafür wird die stoßende Kugel m_1 aus der Gleichgewichtslage um 5 cm ausgelenkt (der Abstand wird mit der Schublehre gemessen) und durch Schließen des Schalters k_2 vom Elektromagneten festgehalten. Man schließt den Schalter k_1 und öffnet ihn wieder. Dann öffnet man k_2, und nach dem Zusammenstoß der Kugeln schließt man k_3 und notiert die diesem Ausschlag entsprechenden Teilstriche, die n_1 betragen mögen.

Weiterhin bestimmt man auf die gleiche Weise die Größen n bei der Auslenkung der stoßenden Kugel um 10 und 15 cm.

Die Messung der Größen n_0 und n muß mindestens dreimal durchgeführt und daraus der Mittelwert gebildet werden. Man muß darauf achten, daß der Schalter k_2 immer nur nach Öffnen des Schalters k_1 geschlossen wird, sonst wird das Galvanometer an die Batterie B angeschlossen und brennt durch.

Aufgabe 13

Das Studium der Resonanzerscheinungen an einem Drehpendel

Die Theorie der Erscheinungen. Diese Aufgabe behandelt die erzwungenen Schwingungen an dem Beispiel eines Drehpendels, auf das eine sich harmonisch ändernde äußere Kraft einwirkt.

Fehlt eine äußere Kraft, so wirken auf das Pendel zwei Kräfte: Die Kraft, die proportional der Größe der Auslenkung des Pendels aus der Gleichgewichtslage ist, und die Reibungskraft, die proportional der Geschwindigkeit der Bewegung des Pendels ist. Die Bewegungsgleichung des Pendels sieht in diesem Falle so aus:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1)$$

Hierbei sind x die die Stellung des Pendels charakterisierende Koordinate (Winkel), $\dot{x}$ die Geschwindigkeit des Pendels, $\ddot{x}$ seine Beschleunigung, α eine Konstante, die die Dämpfung des Pendels bestimmt, und ω_0 die Kreisfrequenz der sogenannten *Eigenschwingungen* des Pendels. Die Lösung dieser Gleichung zeigt, daß die Eigenschwingungen des Pendels gedämpft sind. Diese Dämpfung wird gewöhnlich durch das *logarithmische Dekrement* charakterisiert, d. h. durch den natürlichen Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender Schwingungsamplituden:

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \alpha T_0,$$

wobei T_0 die Schwingungsdauer der Eigenschwingung des Pendels bedeutet. Wenn außer der quasielastischen und der Reibungskraft noch eine äußere periodische Kraft wirkt, nimmt die Bewegungsgleichung folgende Form an:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = E \sin \omega t, \tag{2}$$

wobei ω die Kreisfrequenz der äußeren Kraft und E die Amplitude (bezogen auf das Trägheitsmoment des Pendels) dieser Kraft bedeuten. In diesem Falle führt das Pendel beim Anregen der Schwingungen sowohl eigene als auch erzwungene Schwingungen aus. Doch verschwinden nach einiger Zeit die Eigenschwingungen des Pendels infolge der Dämpfung, und nur die erzwungenen Schwingungen bleiben übrig. Die Lösung der Gleichung (2) führt zu folgenden Ausdrücken für die Größen der Auslenkung x, der Phasenverschiebung φ und der Amplitude der Schwingungen X:

$$x = X \sin(\omega t + \varphi), \tag{3}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \tag{4}$$

$$X = \frac{E}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}. \tag{5}$$

Diese Gleichungen bestimmen die Abhängigkeit der Amplitude und der Phase der erzwungenen Schwingungen von der Frequenz der erzwungenen und der Eigenschwingungen und ebenfalls von der Dämpfungskonstante.

Wenn die Dämpfung des Pendels klein ist, nimmt die Amplitude der Schwingungen bei Annäherung der Erregerfrequenz an die Eigenfrequenz sehr stark zu. Diese Erscheinung trägt den Namen *Resonanz*. Im Resonanzfall ($\omega = \omega_0 - 2\alpha$) nimmt die Amplitude der erzwungenen Schwingungen ihren größten Wert an. Je kleiner die Dämpfungskonstante, desto steiler verläuft der Anstieg und der Abfall der sogenannten *Amplitudenresonanzkurve*, d. h. der Kurve, die die Abhängigkeit der Amplitude der erzwungenen Schwingungen von der Erregerfrequenz darstellt.

Aus dem Ausdruck (4) für $\operatorname{tg}\varphi$ sieht man, daß für $\omega \ll \omega_0$ die Phasendifferenz nahe Null und für $\omega \gg \omega_0$ nahe $-\pi$ ist. Für $\omega \approx \omega_0$ ist die Phasendifferenz $-\frac{1}{2}\pi$. Je kleiner die Dämpfungskonstante ist, desto stärker ändert sich die Phase in der Nähe von ω_0.

Die Beschreibung der Anordnung. Das Drehpendel besteht aus einem metallischen Ring A (Abb. 33), der um eine horizontale Achse O unter der Einwirkung der Spiralfeder B Schwingungen ausführen kann. Die Amplitude der Pendelschwingungen wird an einer Skala, die sich über dem Pendel befindet, mit Hilfe eines am Ring angebrachten Zeigers abgelesen. An dem anderen Ende der Feder ist ein Hebel K befestigt, der die äußere Kraft auf das Pendel überträgt. An dem Hebel ist unten eine Stange C befestigt, die mit dem Exzenter D verbunden ist. Der Exzenter ist seinerseits durch ein Schneckengetriebe mit der Achse des Motors verbunden und erzeugt die äußere periodische Kraft. Die Amplitude dieser Kraft kann man durch Änderung der Stellung des Exzenters variieren. Ihre Größe kann man aus

den Ausschlägen des Hebels K, der mit einem Zeiger a_2 ausgerüstet ist, auf der Skala über dem Pendel ablesen. Die Frequenz der äußeren Kraft ist durch die Umdrehungszahl des Motors gegeben und kann durch einen Vorwiderstand im Stromkreis des Motors verändert werden.

Zur Änderung (Vergrößerung) der Dämpfung dient der Elektromagnet E. Zwischen seinen Polen schwingt der Ring des Pendels. Der Elektromagnet wird über einen Widerstand von einer Gleichstromquelle gespeist. Durch Änderung der Stromstärke kann man die Größe der Dämpfung des Pendels variieren. Die Dämpfung wird durch Wirbelströme verursacht, die in dem Ring erzeugt werden, wenn er in einem Magnetfeld schwingt.

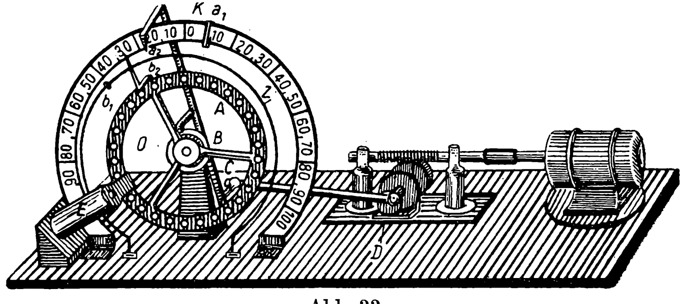


Abb. 33

Die Messung. Zuerst überzeugt man sich davon, daß sich das Pendel frei bewegt. Danach schaltet man den Stromkreis des Elektromagneten ein und prüft, um wieviel sich die Vergrößerung der Dämpfung des Pendels bemerkbar macht, wenn man die Stromstärke ändert. Erst dann kann die Messung beginnen. Zuerst bringt man das Pendel aus seiner Ruhelage und bestimmt mit einem Zeitmesser die Periode seiner Eigenschwingungen (seine Frequenz).

Dazu mißt man die Zeit von 4 bis 6 vollen Schwingungen und bestimmt damit die Periode und die Schwingungsfrequenz des Pendels.

Danach bestimmt man das logarithmische Dekrement der Dämpfung. Hierzu wird das Pendel um einen bestimmten Winkel ausgelenkt (z. B. um 6 Teilstriche der Skala) und losgelassen. Man schreibt die maximalen Auslenkungen nach links und rechts nach einer Halbperiode, Periode usw. auf.

Die Größe des logarithmischen Dekrementes muß sowohl bei ausgeschaltetem Elektromagneten (ohne zusätzliche Dämpfung) als auch bei eingeschaltetem, z. B. bei maximaler Dämpfung, bestimmt werden. Hierauf kann man dazu übergehen, die Amplitudenresonanzkurve bei zwei vorher bestimmten logarithmischen Dekrementen der Dämpfung aufzunehmen.

Dafür sucht man sich eine solche Erregeramplitude aus (durch Änderung der Exzenterstellung), daß bei Resonanz (im Falle minimaler Dämpfung) der Zeiger am Ring des Pendels nicht über die Begrenzungen der Skala ausschlägt. Darauf bestimmt man die Amplitude der erzwungenen Schwingungen. Man liest sie für verschiedene Erregerfrequenzen auf der Skala ab. Die Frequenzen werden experimentell durch Beobachten der Schwingungen des Hebels K bestimmt.

Die Messung der Amplituden muß man mindestens bei 6 bis 8 Erregerfrequenzen durchführen. Die erhaltenen Zahlenwerte werden graphisch dargestellt: die Amplitude als Funktion der Erregerfrequenz.

Bevor man die Phasenresonanzkurven aufnimmt, muß man auf der Skala beobachten, wie die beiden Zeiger zueinander schwingen. Man kann sehen, daß bei Erregerfrequenzen, die klein sind, verglichen mit der Eigenfrequenz des Pendels, beide Zeiger praktisch gleichzeitig die äußerste Stellung erreichen und auch gleichzeitig durch den Nullpunkt der Skala gehen. Die Phasendifferenz ist in diesem Falle gleich Null.

Bei Resonanz ($\omega \approx \omega_0$) geht ein Zeiger durch den Nullpunkt der Skala, während sich der andere im selben Moment in seiner äußersten Stellung befindet. Die Phasendifferenz ist in diesem Falle gleich 90°.

Bei Erregerfrequenzen, die wesentlich größer sind als die Eigenfrequenzen des Pendels ($\omega \gg \omega_0$), gehen die Zeiger in entgegengesetzten Richtungen durch den Nullpunkt der Skala. Der Phasenunterschied ist in diesem Falle gleich 180°.

Das Bewegungsgesetz des Zeigers des Hebels K kann man in folgender Weise schreiben:

$$x = x_0 \sin(\omega t).$$

Das Bewegungsgesetz des Zeigers des Pendels ist in diesem Falle, wenn man das Auftreten einer Phasendifferenz berücksichtigt,

$$y = y_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Zu dem Zeitpunkt, da die äußere Kraft ihren Maximalwert annimmt ($x = x_0$), ist

$$\omega t = (2n + 1)\frac{\pi}{2},$$

$$y = y_0 \cos\varphi,$$

woraus folgt

$$\varphi = \arccos\frac{y}{y_0}. \tag{6}$$

Aus der Gleichung (6) kann man leicht φ bestimmen, wenn man die Werte für y und y_0 mißt. Dabei wendet man die Methode des gleichzeitigen Aufleuchtens zweier Glimmlampen an.

Auf die Skala wird ein verschiebbarer Kontakt a_1 aufgesetzt. Bei seiner Berührung mit dem Kontakt a_2, der auf dem Zeiger des Hebels K sitzt, wird der Stromkreis der Glimmlampe geschlossen, und sie leuchtet auf. Dieses Aufleuchten fixiert den Moment der maximalen, von äußeren Kräften erzeugten Auslenkung des Hebels K.

Auf einem speziellen Ring Z ist ein anderer verschiebbarer Kontakt b_1 angebracht. Kommt er mit dem Kontakt b_2 in Berührung, der auf dem Zeiger des Pendels sitzt, wird der Stromkreis der zweiten Lampe geschlossen, und sie leuchtet ebenfalls auf. Finden wir die Stelle für den Kontakt b_1, die die Lampen gleichzeitig aufleuchten läßt, können wir die Größe y bestimmen und nach der Formel (6) φ ausrechnen.

Bei diesen Messungen muß man das gleichzeitige Aufleuchten anstreben. Der Kontakt b_1 muß so angeordnet werden, daß er sich nach dem Aufleuchten

der Lampe bei der weiteren Bewegung des Pendels schnell wieder öffnet. Die Messung der Phasendifferenz muß mindestens bei 6 bis 8 Erregerfrequenzen und für zwei verschiedene Werte des logarithmischen Dekrementes durchgeführt werden. Es empfiehlt sich, zuerst die Messungen bei großer Dämpfung auszuführen, weil sich dabei in der Nähe der Resonanz die Phasendifferenz nicht sehr stark ändert.

Die Ergebnisse der Messungen müssen graphisch dargestellt werden: die Phasendifferenz als Funktion der Erregerfrequenz.

Aufgabe 14

Gekoppelte Pendel

Zubehör: 1. Anordnung, 2. Zeitmesser, 3. V-förmige Feder.

Kurze Theorie und Beschreibung der Anordnung. Bei kleinen Schwingungen eines absolut festen Körpers hängt die Frequenz seiner Schwingungen nicht von der Größe der Amplitude ab. Dabei schwingt der Körper mit einer Frequenz, die durch die Parameter des gegebenen Systems bestimmt ist. Jedoch schwingt ein System von zwei Körpern, die irgendwie miteinander verbunden sind, mit zwei verschiedenen Frequenzen. Wenn sich dabei die beiden Frequenzen nur wenig voneinander unterscheiden, treten *Schwebungen* auf, d. h. ein periodisches Größer- und Kleinerwerden der Schwingungsamplitude. Die Eigenschaften eines beliebigen *gekoppelten Systems* stehen in bestimmter Beziehung zu den Eigenschaften der zwei Ausgangssysteme, die dieses gekoppelte System bilden. Mit der Bestimmung dieser Beziehungen befaßt sich die vorliegende Aufgabe.

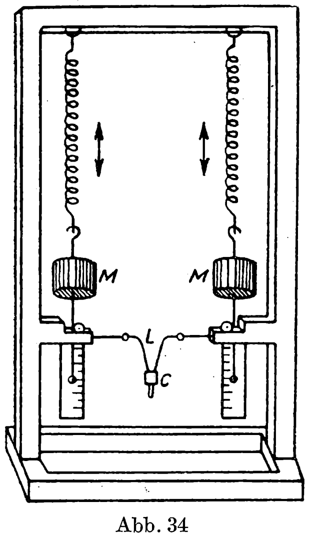


Abb. 34

Die Federpendel M, M (Abb. 34), zwei an Federn angehängte Gewichte, die Schwingungen in vertikaler Richtung ausführen, stellen ein gekoppeltes System dar. Die Kopplung zwischen den Pendeln wird von einer speziellen V-förmigen Feder L bewirkt, die an die Gewichte mit Hilfe von Fäden, die durch zwei Blöcke hindurchgehen, befestigt ist. Bei der Auslenkung der Gewichte wird die V-förmige Feder L deformiert, und es ändert sich folglich die auf die Gewichte wirkende Kraft. Bei der Auslenkung eines Pendels aus der Gleichgewichtslage wird bei Anwesenheit einer Kopplung auch das andere Pendel ausgelenkt. Die Bewegung jedes der Pendel stellt eine Schwingung mit periodisch größer und kleiner werdender Amplitude dar, d. h., beide Pendel zeigen die für gekoppelte Systeme charakteristische Schwebung. Ändert man die Spannung der V-förmigen Feder durch Verschieben der

auf ihr sitzenden Klammer C, so kann man die Schwebungsfrequenz in einem breiten Bereich ändern.

Deshalb kann man sich die Schwingungen der Gewichte als eine Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen vorstellen. Man kann dem System solche Anfangsbedingungen vorschreiben, daß die beiden Gewichte mit einer von den oben angeführten zwei Frequenzen schwingen. Für Systeme mit zwei Freiheitsgraden kann man dies auf zwei Arten ausführen und folglich getrennt die beiden harmonischen Schwingungen beobachten, aus denen sich die Schwingungen des ganzen Systems zusammensetzen. Diese beiden Schwingungen tragen den Namen *Fundamentalschwingungen*, und ihre Frequenzen heißen *Fundamentalfrequenzen* des Systems.

Um das System zu veranlassen, mit einer der Fundamentalfrequenzen Ω_1 zu schwingen, bringt man beide Gewichte auf den gleichen Abstand von der Gleichgewichtslage in verschiedenen Richtungen. Schwingungen mit der zweiten Fundamentalfrequenz Ω_2 führt das System dann aus, wenn wir beide Gewichte von der Gleichgewichtslage in die gleiche Richtung (oben oder unten) auslenken.

Das gekoppelte System kann auch teilweise benutzt werden. In der hier vorliegenden Anordnung geschieht dies dadurch, daß nacheinander eines der Gewichte festgeklemmt wird. Dann stellt der übrige Teil ein System mit einem Freiheitsgrad dar. Die so erhaltenen Teile des gekoppelten Systems tragen die Bezeichnung *Partialsysteme*. Die Eigenfrequenz jedes dieser Partialsysteme wird *Partialfrequenz* genannt.

Wenn die Eigenfrequenz gleich

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ist, wobei m die Masse des Gewichts und k die Federspannung bedeuten, so ist die Partialfrequenz gleich

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k + k_{12}}{m}},$$

wobei k_{12} die Spannung der $\curlyvee$-förmigen Feder ist. Die Fundamentalfrequenzen sind gleich

$$\Omega_1 = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}.$$

Die Messung. Man bestimmt mit dem Zeitmesser die Eigenfrequenzen jedes der beiden Pendel. Dann verbindet man die Pendel durch die $\curlyvee$-förmige Feder, klemmt eines von beiden fest und bestimmt (wieder mit dem Zeitmesser) die Partialfrequenz. Man löst das festgeklemmte Pendel, lenkt beide Pendel auf die gleiche Entfernung, aber in verschiedene Richtungen, aus und mißt die erste Fundamentalfrequenz. Sie muß mit der Eigenfrequenz der freien Pendel übereinstimmen (siehe Abb. 34). Dann lenkt man beide Pendel in die gleiche Richtung (nach oben oder unten) auf den gleichen Abstand aus und mißt die zweite Fundamentalfrequenz. Danach bestimmt

man die Schwebungsfrequenz und überzeugt sich davon, daß die Differenz der Fundamentalfrequenzen mit der Schwebungsfrequenz übereinstimmt. Alle diese Messungen werden bei unveränderter Stellung der Klammer an der λ-förmigen Feder durchgeführt.

Man darf dabei nicht vergessen, daß diese Klammer keinen zu großen Abstand von dem unteren Ende der λ-förmigen Feder besitzen darf, weil sonst eine sehr starke Kopplung und eine große Frequenzdifferenz erzeugt wird.

Endlich bestimmt man die Werte für k_{12}, die verschiedenen Stellungen der Klammer entsprechen, und stellt die Abhängigkeit der Fundamentalfrequenz von dem Kopplungsgrad dar.

Die Bestimmung der Frequenzen muß einige Male durchgeführt und dann der Mittelwert genommen werden.

Aufgabe 15

Die Untersuchung der Eigenschwingungen einer Saite mit der Resonanzmethode

Zubehör: 1. Saite mit elektromagnetischer Anregung und einem Spannungsmechanismus, 2. Gewichtsatz, 3. Maßstab, 4. kurzes Stück der zu verwendenden Saite, 5. Glimmlampe (nicht unbedingt notwendig).

Kurze Theorie. Ein biegsamer homogener Faden (Saite), der zwischen zwei Punkten eingespannt und aus seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt ist, kann verschiedenartige Schwingungen ausführen. Die Saite kann zu *stehenden Wellen* angeregt werden. Dabei entfallen auf die Länge l der Saite stets eine ganze Zahl stehender Wellen. Da der Abstand zwischen zwei mit der gleichen Amplitude schwingenden nächsten Punkten der Saite gleich der halben Wellenlänge der fortschreitenden Welle ist, kann man schreiben (siehe Aufgabe 16):

$$\frac{\lambda}{2} n = l, \tag{1}$$

wobei n eine ganze Zahl (1, 2, 3, ...) ist. Da die Wellenlänge λ mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Impulses der Deformation längs der Saite und der Frequenz der Saitenschwingung ν durch die Beziehung $\lambda = \frac{c}{\nu}$ zusammenhängen, ist

$$\nu = \frac{n}{2l} c. \tag{2}$$

Folglich kann die Saite nicht nur mit einer Frequenz schwingen, sondern mit einem ganzen Frequenzspektrum. Das entspricht der Tatsache, daß die Saite als ein aus n Punkten bestehendes System aufgefaßt werden kann.

Der Versuch zeigt, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Impulses der Deformation längs der Saite bestimmt ist durch die Stärke der Spannung T und der Liniendichte ϱ des Materials der Saite, d. h.

$$c = \varphi(T, \varrho).$$

Diese Abhängigkeit kann erhalten werden, wenn man einen Vergleich der Dimensionen anstellt. Ist

$$c = \varphi(T, \varrho) = T^m \cdot \varrho^n$$

und $[T] = MLT^{-2}$, $[\varrho] = ML^{-1}$, $[c] = LT^{-1}$ (M Masse, L Länge, T Zeit), folgt

$$(LT^{-1}) = (MLT^{-2})^m \cdot (ML^{-1})^n.$$

Vergleicht man die Potenzen der linken und der rechten Seite der Gleichung, so erhält man: $m - n = 1$, $1 = 2m$, $m + n = 0$ und daraus

$$m = \frac{1}{2}, \quad n = -\frac{1}{2}.$$

Somit haben wir

$$c = \varphi(T, \varrho) = T^m \cdot \varrho^n = \sqrt{\frac{T}{\varrho}}$$

gefunden. Daraus erhält man endlich den Ausdruck für die Schwingungsfrequenzen der Saite:

$$\nu = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\varrho}}. \tag{3}$$

Das sind die Frequenzen der einfachsten, sogenannten Eigen- oder *Fundamentalschwingungen* der Saite. Einen allgemeineren Fall der Schwingung stellt die Saitenschwingung dar, bei der gleichzeitig alle n Eigenschwingungen auftreten. Jede beliebige Saitenschwingung kann als Überlagerung (Superposition) vieler Eigenschwingungen dargestellt werden, die sich nicht nur in ihrer Frequenz, sondern auch in der Größe der Amplitude für die einzelnen Punkte der Saite unterscheiden. Die Verteilung der Amplituden der einzelnen Punkte der Saite bei Eigenschwingungen mit verschiedenen n-Werten hat das in Abb. 35 dargestellte Aussehen.

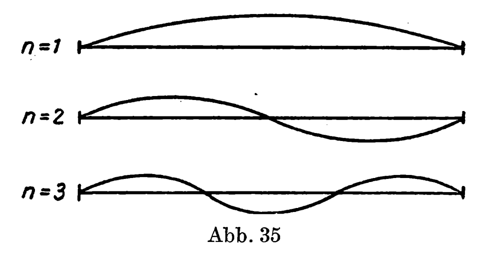


Abb. 35

Das Ziel der vorliegenden Aufgabe ist die Erzeugung stehender Wellen der Saite, die Beobachtung des Bildes der Amplitudenverteilung und die quantitative Prüfung der Formel (3) für die Schwingungsfrequenzen der Saite. Dabei bleiben die Größen ϱ, l und ν konstant, und es wird nur die Größe T, und damit n, geändert.

Die Beschreibung der Anordnung. Die Anordnung (Abb. 36) besteht aus der Saite *1*, die durch einen Faden mit Hilfe der Rolle *2* und dem damit verbundenen Schneckentrieb gespannt wird. Die Saite ist mit dem Faden durch die weiche Stahlfeder *3* verbunden, die einen Zeiger trägt, dessen Stellung an einer Skala abgelesen werden kann. Die Deformation der Feder ist ein Maß für die Spannung der Saite.

Die für das Auftreten von Schwingungen der Saite notwendige äußere periodische Erregung wird dadurch hervorgerufen, daß man durch den Draht einen Wechselstrom von $\nu = 50$ Hz schickt und die Saite selbst zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten *4* anordnet. Dadurch wirkt auf die Feder eine äußere periodische Kraft, die sich dauernd mit der Frequenz von

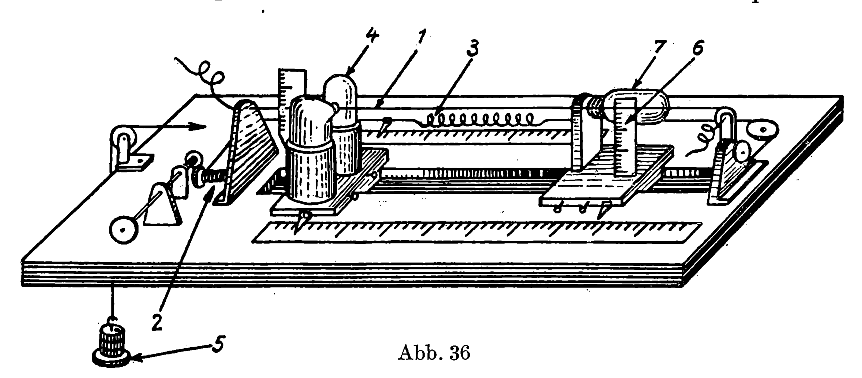


Abb. 36

50 Hz ändert. Durch Verschiebung des Elektromagneten längs der Saite erreicht man eine Veränderung des Angriffspunktes der äußeren Kraft auf diese Saite. Die Saite muß aus nichtmagnetischem Material gefertigt sein. weil sie sonst von den Polen des Elektromagneten angezogen und dadurch die Schwingungen gestört werden würden.

Die Abb. 37 stellt die Schaltbilder der Stromkreise der Saite (a) und des Elektromagneten (b) dar.

Die Messung. Zuerst wird die Feder geeicht. Man löst sie von dem aufgerollten Faden und verbindet sie mit einem anderen Faden, der eine Plattform trägt (*5* in Abb. 36). Man belastet die Plattform mit verschiedenen Gewichten und notiert gleichzeitig die Stellung des Zeigers der Feder auf der Skala und das entsprechende Gewicht. Die so gewonnenen Werte geben die Möglichkeit, eine graphische Darstellung der Abhängigkeit der Spannkraft der Saite T von der Deformation der Feder k ($T = \varphi[k]$) anzufertigen. Dann bindet man den Faden und die Plattform ab, befestigt wieder den aufgerollten Faden an der Saite und spannt die Saite durch Betätigen des Schneckentriebes. Kennt man den Wert k des Zeigers, so kann man aus der Kurve leicht die zugehörige Spannkraft T der Saite ablesen.

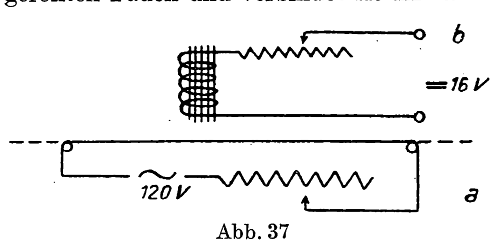


Abb. 37

Danach stellt man den Elektromagneten so auf, daß sich die Mitte der Saite zwischen den Polen befindet und schaltet den Gleichstrom, der die Spule des Elektromagneten durchfließt, und den Wechselstrom ein, der die Saite

durchfließt. Man erhöht langsam die Spannung der Feder, bis man stehende Wellen für $n = 1$ erhält (siehe die Amplitudenverteilung der Punkte der Saite für $n = 1$ in Abb. 35).

Hat man stehende Wellen erzeugt, so liest man die Größe der Amplituden der Schwingungen der einzelnen Punkte der Saite (nicht weniger als 10) mit Hilfe der durchsichtigen Skala (*6* in Abb. 36) ab, die entlang der Saite verschiebbar angeordnet ist. (Wenn die Amplituden der Schwingungen zu klein sind, muß man entweder die Stärke des Stromes erhöhen, der die Saite oder die Spule durchfließt.)

Man stellt den Elektromagneten im Abstand von $^1/_4$ und $^1/_6$ der Länge der Saite auf, erzeugt stehende Wellen für $n = 2$ und $n = 3$ und mißt die Amplituden der einzelnen Punkte der Saite.

Mit den erhaltenen Werten fertigt man eine graphische Darstellung an für $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ und vergleicht sie mit den theoretischen Werten, indem man in die gleiche Darstellung die Sinuskurven einträgt.

Die Prüfung der Formel (3) besteht darin, daß man in ihr $\nu = 50$ Hz setzt. Ist l, n und T bekannt, so kann man die Liniendichte ϱ des Materials der Saite bestimmen. Die Länge l der Saite wird unmittelbar mit dem Maßstab gemessen, n aus der Darstellung der Amplitudenverteilung entnommen und T aus der früheren graphischen Darstellung bestimmt. Danach vergleicht man den so gewonnenen Wert für ϱ mit der unmittelbar durch Wägung und Messung eines Stückchens des Drahtes bestimmten Dichte.

Eine genauere Untersuchung der Form der Saitenschwingung läßt sich stroboskopisch mit Hilfe einer Glimmlampe (*7* in Abb. 36) durchführen, die so hinter der durchsichtigen Skala aufgestellt ist, daß sich die Saite von dem leuchtenden Hintergrund der Lampe abhebt. Wird diese Lampe mit einem Wechselstrom von 50 Hz gespeist, so leuchtet sie 50mal in der Sekunde auf und beleuchtet bei jedem Aufleuchten stets die gleiche Stellung der Saite. Verändert man langsam die Spannung der Saite, so sieht man sie wie erstarrt in den verschiedenen Stellungen. Das erlaubt eine genaue Untersuchung der Schwingungsamplituden der verschiedenen Punkte der Saite und die qualitative Untersuchung der Phasenänderung ihrer Schwingungen.

Aufgabe 16

Die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Gasen mit der Interferenzmethode und der Methode stehender Wellen

Die Theorie. Jedes Teilchen eines Mediums, das aus seiner Gleichgewichtslage herausgebracht wird, strebt unter der Wirkung elastischer Kräfte in seine Ausgangsstellung zurück und führt dabei Schwingungen aus. Wenn die Verschiebung klein ist, ist die elastische Kraft der Verschiebung direkt proportional und die Schwingungen gehorchen dem Gesetz

$$y = y_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

wobei y die Größe der Verschiebung des Punktes bedeutet. y_0 und φ, d. h., die Amplitude und die Anfangsphase der Schwingung werden durch Anfangsbedingungen bestimmt (im weiteren nehmen wir $\varphi = 0$ an, was man stets durch die Wahl des Beginns der Ablesungen erfüllen kann). ω ist die Kreisfrequenz, die durch den Betrag der Direktionsgröße und der Masse der Teilchen bestimmt ist.

Die Schwingung eines Teilchens bleibt nicht lokalisiert. Es beginnen auch die Nachbarteilchen und dann die nächsten usw. zu schwingen. Eine solche Gesamtheit von schwingenden Teilchen erzeugt eine *Welle*. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schwingung (Welle), die von der Natur des Mediums abhängt, und die Amplitude der Schwingung bestimmen die Größe der Verschiebung jedes Teilchens zu jedem vorgegebenen Zeitpunkt. Die Verteilung der Größe der Verschiebungen der Teilchen in der Welle in Abhängigkeit von der Zeit und der Lage des Teilchens beschreibt die *Wellengleichung*, die folgendermaßen aussieht:

$$y = y_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) = y_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{Tc}\right) = y_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \qquad (1)$$

wobei x der Abstand des Teilchens vom Koordinatenanfangspunkt, c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, T die Schwingungsdauer und λ die Wellenlänge bedeuten. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist gegeben durch

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}},$$

wobei E der Elastizitätsmodul des Mediums und ϱ seine Dichte bedeuten. Die Geschwindigkeit longitudinaler Wellen, bei denen die Teilchen längs der Ausbreitungsrichtung der Wellen schwingen, ist durch den Elastizitätsmodul bestimmt und die Geschwindigkeit transversaler Wellen, bei denen die Teilchen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle schwingen, durch den Schubmodul.

Das Auftreten des Schalles ist stets mit Schwingungen irgendeines Stoffes verbunden. Die Ausbreitung des Schalles in Gasen geschieht durch longitudinale Wellen. Sieht man die Ausbreitung des Schalles als isothermen Prozeß an, so ist die Schallgeschwindigkeit v in Gasen gleich

$$v = \sqrt{\frac{p}{\varrho}} \quad \text{(NEWTON)}$$

(die Rolle des Elastizitätsmoduls E spielt hier der Druck p). In Wirklichkeit geht der Prozeß der Ausbreitung akustischer Wellen adiabatisch vor sich. Das führt zu folgender Form der Formel für die Schallgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\varrho}} \quad \text{(LAPLACE)}, \qquad (2)$$

wobei $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen des Gases bedeutet (siehe Aufgabe 20).

Die Schallgeschwindigkeit hängt von der Temperatur des Gases ab. Es ist nämlich

$$\varrho = \varrho_0 \frac{1}{1 + \alpha t},$$

wobei ϱ_0 die Dichte des Gases bei 0° C, t die Temperatur in °C und α der Ausdehnungskoeffizient des Gases ($\alpha \approx 0{,}004$) bedeuten. Folglich ist

$$v_t = \sqrt{\gamma \frac{p}{\varrho_0}(1 + \alpha t)} = v_0 \sqrt{1 + 0{,}004\, t}. \tag{3}$$

Die oben angeführte Wellengleichung (1) bezieht sich auf die sogenannte *fortschreitende Welle.* Wenn sich im Medium gleichzeitig zwei Wellen von gleicher Wellenlänge ausbreiten, so beobachtet man eine Addition dieser Wellen *(Interferenz)*. Wenn die Richtung der Verschiebung der Teilchen der sich addierenden Wellen zusammenfällt, so ist die resultierende Verschiebung gleich der algebraischen Summe der Verschiebungen. Dann ist die resultierende Schwingung im Punkte A, der sich im Abstand x_1 von der ersten Quelle und im Abstand x_2 von der zweiten befindet, gleich

$$y_A = \sqrt{y_{01}^2 + y_{02}^2 + 2 y_{01} y_{02} \cos 2\pi \frac{x_1 - x_2}{\lambda}} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \varphi\right), \tag{4}$$

wobei φ eine Funktion von x_1, x_2 und λ ist, und y_{01} und y_{02} die Amplituden der beiden sich addierenden Schwingungen bedeuten. (Man nimmt dabei an, daß die Anfangsphasen zusammenfallen.) Der erste Faktor dieses Ausdruckes gibt die resultierende Amplitude der Schwingung in einem gegebenen Punkte an. Hieraus sieht man, daß man für

$$x_1 - x_2 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2} \tag{5}$$

ein Amplitudenminimum der Schwingung erhält.

Bei Reflexion einer fortschreitenden Welle an der Grenze zweier Medien entsteht eine sogenannte *stehende Welle.* Die Verschiebung der Teilchen in einer solchen Welle wird, analog dem vorhergehenden, bestimmt durch die Summe der Verschiebungen (Interferenz) der direkten und der reflektierten Welle. Man muß dabei nur darauf achten, daß im Falle der Reflexion an einer dichteren Wand die Amplitude der reflektierten Welle gleich y_0 ist.

Die Verteilung der Verschiebungen in einer stehenden Welle bei der Reflexion an einem dichteren Medium ist durch die Gleichung gegeben

$$y = 2 y_0 \sin 2\pi \frac{l - x}{\lambda} \cos \omega \left(t - \frac{l}{c}\right), \tag{6}$$

wobei l der Abstand zwischen dem Entstehungsort der Welle und dem Ort der Reflexion bedeutet. Zum Unterschied zu der fortschreitenden Welle, bei der verschiedene Teilchen mit gleicher Amplitude schwingen, schwingen in der stehenden Welle verschiedene Teilchen mit verschiedener Amplitude, weil in der letzten Gleichung der vor dem Kosinus stehende Ausdruck die Rolle einer Amplitude spielt. Der Abstand zwischen zwei unbeweglichen Nachbar-

punkten (Knoten) ist gleich der halben Wellenlänge der fortschreitenden Welle.

Die Aufgabe besteht nun darin, die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles in Gasen mit zwei Methoden zu bestimmen.

Übung 1

Die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit mit der Interferenzmethode

Zubehör: 1. Anordnung, 2. Hörschlauch, 3. zwei Stimmgabeln auf Resonanzkästchen, 4. Hammer zur Anregung der Stimmgabeln.

Beschreibung der Anordnung. Die Anordnung (Abb. 38) besteht aus zwei gekröpften Metallrohren, die vertikal nebeneinandergestellt sind. Das eine Rohr ist von unveränderlicher Länge, während das andere durch Herausschieben verlängert werden kann. Die Enden der Röhre besitzen horizontale Ansätze, die mit Dreiwegstücken CC verbunden sind. Für die Messung der Verlängerung des einen Rohres dienen eine Skala und ein Zeiger, der an dem verschiebbaren Teil des Rohres befestigt ist. Die Schallwellen, die von der Schallquelle K ausgehen und sich in den beiden Rohren ausbreiten, löschen sich gegenseitig in dem Falle aus, wenn die Längendifferenz der beiden Rohre eine ungerade Anzahl von halben Wellenlängen beträgt. Völlige Auslöschung des Schalles wird gewöhnlich nicht beobachtet, sondern nur eine starke Schwächung. Die Einstellung der maximalen Schwächung geschieht nach dem Gehör mit Hilfe eines Hörschlauches.

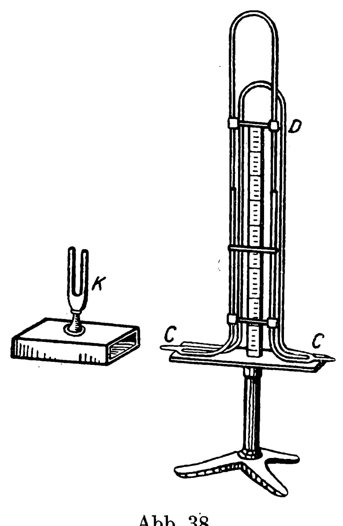


Abb. 38

Man stellt stets auf das Minimum und nicht auf das Maximum des Schalles ein, weil sich das Minimum schärfer ausprägt als das Maximum, denn welche Gleichung man auch für die fortschreitende Welle wählt (Sinus oder Kosinus), immer hängt die Amplitude der Schwingungen bei der Überlagerung der Wellen vom Kosinus der Phasendifferenz der ankommenden Wellen ab. Die Änderung der Amplitude [siehe (4)] ist jedoch bei einem Kosinus gleich -1 stärker als bei einem Kosinus gleich $+1$.

Die Messung. Das Resonanzkästchen mit der Stimmgabel wird so weit an die Anordnung herangebracht, daß das eine Dreiwegstück C hineinragt; an das andere wird der Hörschlauch gesteckt. Die Stimmgabel wird durch einen Gummihammer erregt. Durch Herausschieben des Rohres D sucht man die Stellung, bei der der Ton verschwindet. Man mißt ebenfalls die Temperatur t der die Anordnung umgebenden Luft.

Die Ausrechnung. Wenn die Ablesung des ersten Minimums A cm beträgt, was der Verlängerung des Rohres D um $2A$ cm entspricht, ist

$$2A = \frac{\lambda}{2},$$

wobei λ die von der Stimmgabel ausgehende Wellenlänge in Luft bedeutet.

Da die Schallgeschwindigkeit

$$v = \lambda N,$$

wobei N die Anzahl der vollen Schwingungen der Stimmgabel je Sekunde bedeutet[1]), so erhält man, wenn man den Wert für λ aus der vorhergehenden Gleichung einsetzt:

$$v = 4AN.$$

Für das zweite Minimum analog

$$2A_1 = 3\frac{\lambda}{2}$$

und folglich

$$v = \frac{4}{3}A_1N.$$

Hierbei ist v die Schallgeschwindigkeit bei der Umgebungstemperatur t. Um sie für 0° C zu erhalten, benutzt man die Formel (3):

$$v_0 = \frac{v_t}{\sqrt{1 + 0{,}004 \cdot t}}.$$

Jede Stellung von A wird mehrmals gemessen (nicht weniger als fünfmal), das Mittel genommen und daraus die Schallgeschwindigkeit v errechnet. Ebenso wiederholt man die Messung von A_1 mehrmals und, wenn es die Anordnung erlaubt (die Länge des Rohres D), auch A_2. Das Endergebnis für die Schallgeschwindigkeit erhält man als das Mittel aus allen Messungen.

Übung 2

Die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit mit der Methode stehender Wellen[2])

Zubehör: 1. Anordnung, 2. Stimmgabel auf Resonanzkästchen, 3. Hammer zur Anregung der Stimmgabel.

Beschreibung der Anordnung. Die Anordnung besteht aus einem Glasrohr R (Abb. 39) mit einem seitlichen Ansatzrohr T und einem Kolben S. Unter dem Rohr ist eine Skala angebracht, die in Millimeter eingeteilt ist. Auf ihr wird die Stellung des Kolbens S abgelesen. Als Schallquelle dient die Stimmgabel K, die auf einem Resonanzkästchen sitzt.

Die Messung. Die Anordnung wird auf den Tisch gestellt und die Öffnung des Resonanzkästchens mit der Stimmgabel K vor das offene Ende des Rohres

---

[1]) Auf den Stimmgabeln ist gewöhnlich die Anzahl der einfachen Schwingungen je Sekunde angegeben.

[2]) Anm. d. Übers.: QUINCKEsche Methode.

gebracht. Die Stimmgabel wird mit dem Gummihammer angeschlagen. Das Ansatzrohr T ist mit einem Hörschlauch verbunden. Man läßt die Stimmgabel schwingen, verschiebt den Kolben S in dem Rohr R und stellt die Stellungen ein, bei denen der Ton seine maximale Stärke erreicht. Diese Stellungen werden auf der Skala abgelesen. Für jedes Maximum werden mindestens zehn Einstellungen vorgenommen und das arithmetische Mittel aus diesen Ablesungen gebildet. Man muß für jede Stimmgabel soviel Maxima wie möglich zu finden suchen.

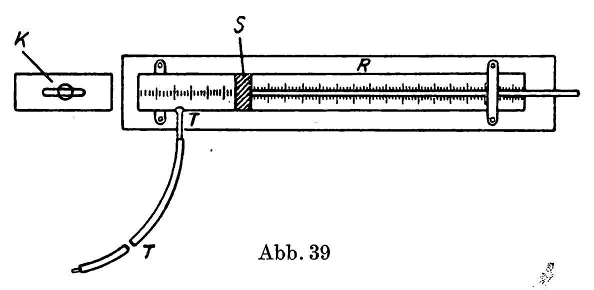


Abb. 39

Die Ausrechnung. Wenn der mittlere Abstand zweier nebeneinanderliegender Maxima l cm beträgt, so errechnet man die Schallgeschwindigkeit in Luft bei Zimmertemperatur nach der Formel

$$v_t = NL,$$

wobei v_t die Schallgeschwindigkeit bei der Zimmertemperatur t, N die Anzahl der Schwingungen der Stimmgabel und L die Wellenlänge des Tones bedeuten. L ist gegeben als der doppelte Abstand zwischen zwei nebeneinanderliegenden Maxima: $L = 2l$.

Um die Schallgeschwindigkeit bei 0° C zu erhalten, muß man das Ergebnis nach der Formel (3) korrigieren.

Aufgabe 17

Das Gyroskop (Kreisel)

Zubehör: 1. Aufgehängter Kreisel, 2. Zeitmesser, 3. Ersatzrotor eines kleinen Motors, 4. geeichter Zylinder, 5. Schublehre.

Die Theorie. Ein *Kreisel (Gyroskop)* ist ein fester Körper, der sich schnell um seine Symmetrieachse dreht.

Wenn das Moment $\mathfrak{M}$ der äußeren Kräfte, die am Kreisel angreifen, gleich Null ist, so ist nach der Formel

$$\frac{d\mathfrak{N}}{dt} = \mathfrak{M} \tag{1}$$

der Drehimpuls $\mathfrak{N}$ des Körpers konstant, und die Drehachse des Kreisels behält dauernd ihre Richtung im Raum bei. Wenn jedoch das Moment der

äußeren Kräfte nicht verschwindet, bewegt sich der Kreisel so, daß nur einer seiner Punkte in Ruhe bleibt. Die Bewegung des Kreisels kann man in diesem Fall als eine Drehung um eine momentane Achse betrachten, die durch den ruhenden Punkt geht.

Die Vektorgleichung (1) erhält man aus den drei skalaren Gleichungen

$$\frac{dN_x}{dt} = M_x, \qquad \frac{dN_y}{dt} = M_y, \qquad \frac{dN_z}{dt} = M_z. \tag{2}$$

Hierbei sind M_x, M_y und M_z die Projektionen des auf den Kreisel wirkenden Momentes der äußeren Kräfte auf die Koordinatenachsen; N_x, N_y und N_z sind die Komponenten des Drehimpulses, die man auch als die Projektionen des Vektors $\mathfrak{N}$ auf die Achsen X, Y, Z auffassen kann.

Wenn die Achsen X, Y, Z die Hauptträgheitsachsen des Körpers sind, dann ist

$$N_x = I_x \omega_x, \qquad N_y = I_y \omega_y \quad \text{und} \quad N_z = I_z \omega_z,$$

wobei I_x, I_y, I_z die Hauptträgheitsmomente des Körpers und ω_x, ω_y, ω_z die Komponenten der momentanen Winkelgeschwindigkeit ω, bezogen auf die Hauptträgheitsachsen, bedeuten.

Offensichtlich fällt, wenn

$$\begin{aligned} \omega_x &\neq \omega_y, & I_x &\neq I_y, \\ \omega_x &\neq \omega_z, & I_x &\neq I_z, \\ \omega_y &\neq \omega_z, & I_y &\neq I_z, \end{aligned}$$

die Richtung der momentanen Drehachse ω nicht mit der Figurenachse und dem Hauptdrehimpuls $\mathfrak{N}$ des Körpers zusammen. Deshalb muß man bei einem Kreisel, der sich unter dem Einfluß eines äußeren Momentes befindet, drei Richtungen (Achsen) unterscheiden, die durch den ruhenden Punkt des Körpers gehen: 1. die Richtung der momentanen Winkelgeschwindigkeit, 2. die Richtung des Hauptdrehimpulses, 3. die Symmetrieachse des Körpers.

Man muß hierbei bemerken, daß die ersten beiden Richtungen bei der Bewegung des Kreisels nicht sichtbar sind und ihre Stellung sowohl im Raum als auch im Körper selbst ändern, während die Symmetrieachse bei der Bewegung des Körpers sichtbar ist und ihre Stellung nur im Raum ändert.

Die angenäherte, elementare Theorie der Bewegung eines Kreisels besteht darin, daß man die Richtung der Vektoren des Hauptdrehimpulses und der momentanen Winkelgeschwindigkeit als wenig verschieden von der Richtung der Symmetrieachse zu jedem Zeitpunkt annimmt. Das darf man tun, wenn der Kreisel sehr rasch um die Symmetrieachse rotiert, die z. B. mit der x-Achse zusammenfällt. Dann ist

$$\begin{aligned} \omega_x &\gg \omega_y, \\ \omega_x &\gg \omega_z. \end{aligned}$$

In diesem Falle ist ω nahe der Richtung der Symmetrieachse des Körpers, und weil I_x, I_y, I_z Größen gleicher Ordnung sind (und gewöhnlich $I_x > I_y$ und $I_x > I_y$; abgeplatteter Kreisel), ist der Hauptdrehimpuls des Systems auch nahe der Symmetrieachse.

Bei sehr rascher Rotation des Kreisels um die Symmetrieachse fallen der Vektor der momentanen Winkelgeschwindigkeit und der Vektor des Hauptdrehimpulses praktisch mit der Richtung der Symmetrieachse zusammen. Deshalb kann man aus der Bewegung der Symmetrieachse auf die Bewegung der momentanen Drehachse schließen.

Fehlt ein durch äußere Kräfte hervorgerufenes Drehmoment ($M = 0$), so erhalten wir aus der Gleichung (1)

$$\mathfrak{N} = \text{const}.$$

Dann bleiben der Hauptdrehimpuls, die momentane Winkelgeschwindigkeit der Drehung und die Symmetrieachse des Kreisels im Raum unbeweglich und ihrer Größe nach unverändert.

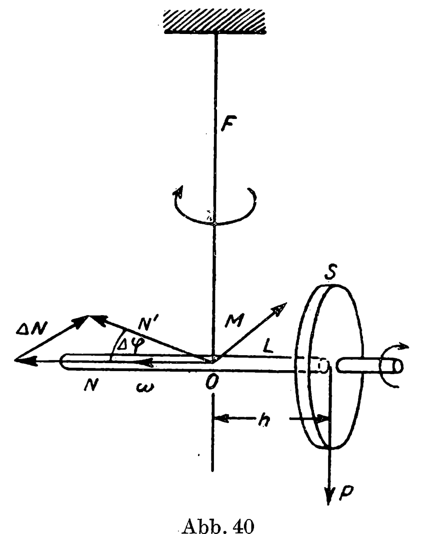


Abb. 40

Bei kurzzeitiger Einwirkung äußerer Kräfte (bei einem Stoß) ist Δt sehr klein, deshalb wird auch nach der Gleichung (1) der Zuwachs des Drehimpulses ($\Delta N = M \Delta t$) klein sein. Folglich ist auch die Richtungsänderung des Hauptdrehimpulses, der momentanen Winkelgeschwindigkeit und der Symmetrieachse des Kreisels im Raum sehr klein.

Bei längerer Einwirkung äußerer Kräfte, auch wenn ihr Moment klein ist, ändert sich die Richtung des Vektors des Hauptdrehimpulses, des Vektors der momentanen Winkelgeschwindigkeit und der Symmetrieachse im Raum. Eine solche Bewegung des Kreisels bezeichnet man mit *Präzession.*

Der Kreisel besteht aus einer mit großer Geschwindigkeit um den Stab L rotierenden Scheibe S (Abb. 40). Der Stab ist an einem Faden F aufgehängt. Wenn der Kreisel in Rotation versetzt und seine Achse horizontal gestellt wird, fängt er an, in der horizontalen Ebene um den Aufhängepunkt O zu rotieren (präzessieren). In dem betrachteten Fall wirkt auf den Kreisel das Moment M einer äußeren Kraft (der Schwerkraft)

$$M = Ph \tag{3}$$

ein, wobei P das Gewicht des Kreisels (des Motors, siehe Aufgabe 17) und h den Abstand zwischen dem Punkt O und dem Schwerpunkt des Kreisels bedeutet.

Das Drehmoment $\mathfrak{M}$ steht senkrecht zur Zeichenebene und weist vom Leser weg. Wenn die Rotation der Scheibe im Uhrzeigersinn verläuft, sofern man vom freien Ende des Stabes aus die Scheibe betrachtet, dann wird der Vektor $\mathfrak{N}'$, der gleich der Summe der Vektoren $\mathfrak{N}$ und $\Delta \mathfrak{N}$ ist, wie aus der Zeichnung ersichtlich, gegen den Vektor $\mathfrak{N}$ in der horizontalen Ebene um den

Winkel $\Delta\varphi$ gedreht. Die erzwungene Drehung des Kreisels verläuft folglich in der horizontalen Ebene im Uhrzeigersinn, wenn wir von dem Aufhängepunkt auf den Kreisel herunterschauen. Es ist leicht einzusehen, daß, wenn sich die Rotationsrichtung des Kreisels umkehrt, die Drehebene der Kreiselachse erhalten bleibt, weil sich das Moment der äußeren Kräfte nicht ändert. Doch erfolgt die Drehung der Kreiselachse in entgegengesetzter Richtung.

Wir bestimmen nun die Winkelgeschwindigkeit der Präzession, d. h. die Geschwindigkeit der Drehung der Kreiselachse unter dem Einfluß eines konstanten Momentes äußerer Kräfte. In der Zeit Δt ändert sich der Vektor des Hauptdrehimpulses $\mathfrak{N}$ (siehe Abb. 40) um

$$\Delta\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\Delta\varphi,$$

woraus folgt

$$\frac{\Delta\mathfrak{N}}{\Delta t} = \mathfrak{N}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Gehen wir zum Grenzfall über, so erhalten wir

$$\frac{d\mathfrak{N}}{dt} = \mathfrak{N}\frac{d\varphi}{dt};$$

$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega$ ist aber gerade die gesuchte Geschwindigkeit der Präzession.

Weil $\frac{d\mathfrak{N}}{dt} = \mathfrak{M}$ und $|\mathfrak{N}| = \omega I$, erhalten wir

$$\Omega = \frac{|\mathfrak{M}|}{\omega I}$$

oder

$$|\mathfrak{M}| = I\omega\Omega. \tag{4}$$

Das Ziel dieser Aufgabe besteht darin, sich mit den Besonderheiten der Bewegung eines Kreisels vertraut zu machen und die Winkelgeschwindigkeit der Eigenrotation ω zu bestimmen.

Die Beschreibung der Anordnung. Die Anordnung (Abb. 41) besteht aus einem metallischen (mit einer Teilung versehenen) Stab *1*, der in seiner Mitte an dem Faden *2* aufgehängt ist. Der Faden ist oben an der Konsole *3* befestigt. Der Stab kann um die horizontale und vertikale Achse gedreht werden, die durch seinen Mittelpunkt gehen. Auf der einen Seite des Stabes kann ein kleiner Motor verschoben und mit der Schraube *4* festgeklemmt werden. Der Rotor des Motors dreht sich mit großer Geschwindigkeit und stellt den eigentlichen Kreisel dar. Der Motor wird mit Drehstrom über drei Kontaktringe *6*, eine Kontaktleiste *7* und Bürstenkontakte gespeist. Eine solche Stromzuführung schließt die Möglichkeit einer Verdrillung der Drähte bei der Präzession des Kreisels aus.

Das Gewicht des Motors stellt das Moment der äußeren Kräfte dar, die die Präzession hervorrufen. Bei kleinen Momenten ist die Geschwindigkeit der Präzession auch klein, und die Zeit einer vollen Umdrehung des Kreisels ist beträchtlich. Dabei macht sich das Moment der Reibungskräfte in dem Kugellager *8* der Aufhängung bemerkbar. Der Kreisel präzessiert auch um die horizontale Achse. Um diesen Effekt zu beseitigen, sind auf dem Stab

zwei feststehende Ringe angebracht, die die Verschiebung des Motors auf dem Stab begrenzen. Bei Verschiebung des Motors in dem durch die Ringe abgegrenzten Bereich kann man (bei zwei bis drei vollen Umdrehungen der Präzessionsbewegung) den Winkel zwischen der Vertikalen und dem Stab als einen Rechten betrachten.

Die Messung. Vor dem Beginn der Messung muß man sich davon überzeugen, daß sich der Kreisel sowohl um die horizontale als auch um die vertikale Achse frei drehen läßt.

Danach schaltet man den Strom des Motors ein und wartet (3 bis 5 Minuten), bis der Rotor mit seiner maximalen Umdrehungszahl rotiert.

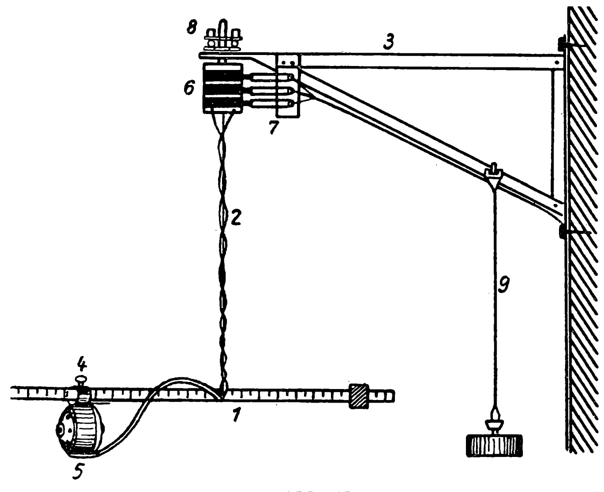


Abb. 41

Läuft der Motor konstant, dann wird der Stab *1* (Abb. 41) horizontal gestellt (wobei man darauf achten muß, daß der Faden der Aufhängung in vertikaler Stellung bleibt) und vorsichtig losgelassen. Der Kreisel beginnt zu präzessieren.

Man merkt sich zur Orientierung irgendeine Linie auf dem Schirm, der hinter dem Kreisel aufgestellt ist, und bestimmt mit Hilfe einer Stoppuhr die Zeit einer vollen Umdrehung der Präzession des Kreisels. Ist diese bekannt, so errechnet man aus $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ die Winkelgeschwindigkeit der Präzession, die dem Moment M_1 entspricht, das durch das Gewicht des Motors verursacht ist. Die Größe des Momentes M_1 bestimmt man nach der Formel (3). (Das Gewicht P des Motors ist gegeben.)

Es ist notwendig, die Größe der Winkelgeschwindigkeit der Präzession bei verschiedenen Werten des Momentes M (bei verschiedenen Werten des Armes h) zu messen. Man muß 8 bis 10 Messungen durchführen, dann den Strom ausschalten und damit die Rotation des Motors unterbinden.

Bei einem konstanten Gang des Motors ($\omega = \text{const}$) muß man in den Fehlergrenzen der Messung folgende Bedingung beachten:

$$\frac{M_1}{\Omega_1} = \frac{M_2}{\Omega_2} = \frac{M_n}{\Omega_n} = C = \text{const}.$$

Setzen wir den mittleren Wert der Größe C in die Gleichung (4) ein, so erhalten wir

$$C_{\text{mittel}} = N = I\omega. \tag{5}$$

Für die Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit ω der Eigendrehung des Kreisels muß man noch das Trägheitsmoment des Rotors I kennen. Die Bestimmung dieser Größe geschieht durch Vergleich der Periode der Drehschwingungen des Rotors (Ersatzrotor) mit einem geeichten Zylinder. Der Rotor und der geeichte Zylinder werden nacheinander an dem Faden *9* befestigt (Abb. 41), und mit Hilfe einer Stoppuhr bestimmt man die Periode ihrer Drehschwingungen. Die Periode der Drehschwingungen T ergibt sich aus der Formel (siehe Aufgabe 10) zu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}, \tag{6}$$

wobei f der Torsionsmodul des Fadens und I das Trägheitsmoment des Körpers bedeuten.

Das Trägheitsmoment I_0 des geeichten Zylinders der Masse m und des Radius r ist $I_0 = \frac{1}{2} mr^2$.

Schreiben wir die Gleichung (6) für den geeichten Zylinder und den Rotor hin, und eliminieren wir aus ihnen f, so erhalten wir für das Trägheitsmoment I des Motors:

$$I = \frac{T_{\text{II}}^2}{T_{\text{I}}^2} \cdot I_0 = \frac{T_{\text{II}}^2}{2T_{\text{I}}^2} \cdot mr^2,$$

wobei T_{I} und T_{II} die Perioden der Schwingungen des Zylinders und des Rotors bedeuten.

Die Perioden der Schwingungen werden mit Hilfe der Stoppuhr aus 10 bis 15 vollen Schwingungen bestimmt, indem man einen farbigen Strich auf dem Rotor bzw. dem Zylinder beobachtet.

Die Masse m wird durch Wägung bestimmt und der Radius r mit der Schublehre gemessen.

Die Größe der Winkelgeschwindigkeit der Rotation des Motors ergibt sich aus der Formel

$$\omega = \frac{C_{\text{mittel}}}{I}. \tag{7}$$

Bei der Anfertigung des Protokolls muß der bei den Messungen zugelassene Fehler abgeschätzt werden.

Literatur

1. L. Bergmann und Cl. Schaefer: „Lehrbuch der Experimentalphysik", Bd. I. Verlag W. de Gruyter, Berlin 1954.
2. L. Bergmann, C. Schaefer und W. Kliefoth: „Grundaufgaben des physikalischen Praktikums". B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1948.
3. F. X. Eder: „Moderne Meßmethoden der Physik". Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1952.
4. S. E. Frisch und A. W. Timorewa: „Lehrgang der allgemeinen Physik", Bd. I. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955.
5. Chr. Gerthsen: „Physik. Ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen". Volk und Wissen Verlags-GmbH, Berlin/Leipzig 1948.
6. E. Grimsehl: „Lehrbuch der Physik", Bd. I: Mechanik, Wärmelehre, Akustik. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1955.
7. F. Kohlrausch: „Praktische Physik", Bd. I. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1953.
8. R. W. Pohl: „Einführung in die Mechanik, Akustik und Wärmelehre". Verlag J. Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955.
9. A. Recknagel: „Physik", Mechanik. VEB Verlag Technik, Berlin 1955.
10. W. Schallreuter: „Einführung in die Physik", Bd. I. Verlag W. Knapp, Halle (Saale) 1951.
11. W. H. Westphal: „Physik", Ein Lehrbuch. Verlag J. Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.
12. W. H. Westphal: „Physikalisches Praktikum". Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig 1952.

ZWEITER TEIL

MOLEKULARPHYSIK

Aufgabe 18

Die Bestimmung des Spannungskoeffizienten eines Gases mit Hilfe des Gasthermometers

Zubehör: 1. Gasthermometer, 2. breites metallisches Gefäß, 3. Vorrichtung zum Kochen, 4. Thermometer.

Die Theorie. Für ein ideales Gas besitzt bekanntlich die Zustandsgleichung eine einfache Form:

$$\frac{p_1 v_1}{1+\alpha t_1} = \frac{p_2 v_2}{1+\alpha t_2}. \tag{1}$$

Nehmen wir an, daß während des ganzen Versuches der Druck p oder das Volumen v konstant bleiben und die Anfangstemperatur gleich Null ist, so erhalten wir zwei Spezialfälle:

$$v_1 = v_0 (1 + \alpha_v t_1), \quad p_1 = p_0 (1 + \alpha_p t_1).$$

Hierin wird bekanntlich α_v als der *Ausdehnungskoeffizient* und α_p als der *Spannungskoeffizient eines Gases* bezeichnet. Für ideale Gase haben beide Koeffizienten den gleichen Wert. Für reale Gase hingegen sind α_p und α_v Zustandsfunktionen des Gases, d. h., sie hängen von p und t ab.

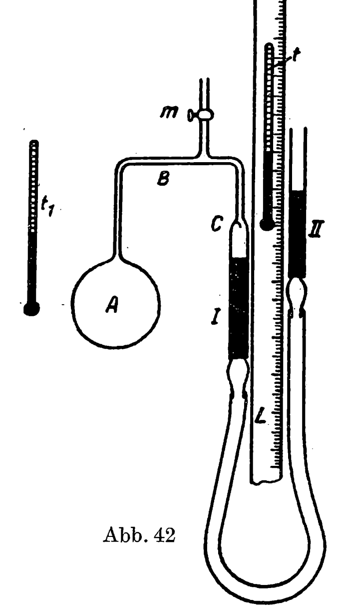


Abb. 42

Die Beschreibung der Anordnung. Zur Bestimmung des Spannungskoeffizienten eines Gases benutzt man ein *Gasthermometer*, das aus einem Glasballon A (Abb. 42) besteht, der mit trockenem Gas (Luft, Stickstoff, Wasserstoff usw.) gefüllt ist. An ihm ist eine Kapillare B mit dem Hahn m angeschmolzen. Der Hahn m dient dazu, die Anordnung mit dem zu untersuchenden trockenen Gas zu füllen. Im Punkte C ist ein breiteres Rohr I mit einem Durchmesser von etwa 10 mm angeschmolzen, das durch einen Gummischlauch mit dem offenen Rohr II verbunden ist. Unmittelbar an der Einschmelzstelle zwischen Kapillare und Rohr I sitzt eine kleine Glasspitze, oder es ist einfach eine Markierung auf dem Glas angebracht. Die Glasrohre I und II sind mit Quecksilber gefüllt. Alle diese Teile sind an einem vertikalen Gestell befestigt, das

eine in Millimeter geteilte Skala L trägt (gewöhnlich ist sie verspiegelt). Die Rohre I und II lassen sich nach oben oder nach unten verschieben und auf jeder Höhe festklemmen. Das Gefäß A wird in Eiswasser, siedendes Wasser bzw. in Wasser beliebiger Temperatur getaucht. Ein Thermometer t_2 ist zwischen den Rohren I und II angebracht. Um es vor Erwärmung durch Strahlung zu schützen, wird neben das Gefäß ein wärmeundurchlässiger Schirm gestellt. Hinter L hängt ein Lot zur Vertikalstellung der Anordnung.

Die linke Seite der Anordnung, d. h. das Rohr I und das Gefäß A, ist schon vorher mit einem trockenen Gas gefüllt worden, und weder sie noch der Hahn m dürfen während des Versuches berührt werden.

Die Messung. 1. Mit Hilfe des Lotes und der Standschrauben wird das Gasthermometer senkrecht gestellt. Man taucht das Gefäß A in ein Gefäß mit Eiswasser oder mit Wasser von Zimmertemperatur und verschiebt das Rohr II, bis der Quecksilbermeniskus im Rohr I die Spitze C berührt. Man liest die Temperatur t_1 (am Gefäß A) und t_2 am Thermometer zwischen den Rohren I und II ab. Dann liest man auf der Skala L die Höhen der Menisken in den Rohren I und II ab. (Um bei der Ablesung die Parallaxe auszuschalten, muß man das Auge so stellen, daß die Höhe des Quecksilbermeniskus mit ihrem Bild im Spiegel der Skala zusammenfällt.) Es seien h_1 und h_2 die abgelesenen Werte, dann ergibt sich für die auf 0 °C korrigierte Höhendifferenz

$$H_1 = \frac{h_2 - h_1}{1 + 0{,}000\,18\,t}$$

(0,00018 ist der Ausdehnungskoeffizient des Quecksilbers).

2. Man mißt den Atmosphärendruck und korrigiert ihn auf 0° C (siehe weiter unten: die Beschreibung des B a r o m e t e r s). Er betrage H_0, dann ergibt sich für den Anfangsdruck der Luft im Gefäß A

$$p_1 = H_0 \pm H_1 = H_0 \pm \frac{h_2 - h_1}{1 + 0{,}000\,18\,t}, \tag{2}$$

wobei H_1 das Vorzeichen Plus oder Minus trägt, je nachdem, ob das Quecksilber im Rohr II höher steht als im Rohr I oder umgekehrt.

3. Man taucht das Gefäß A in siedendes Wasser. Bei Erwärmung dehnt sich die Luft im Gefäß A aus, und das Quecksilber sinkt im Rohr I. Man wartet 10 bis 15 Minuten, bis die Höhen des Quecksilbers in beiden Rohren I und II zum Stillstand gekommen sind, hebt das Rohr II und bringt, wie vorher, den Quecksilbermeniskus mit der Spitze C in Berührung. Man liest die Stellung des Meniskus im Rohr II ab und erhält damit den Wert h_3. Ebenfalls liest man die Temperatur t' auf dem Thermometer zwischen den Rohren I und II ab. Die Höhendifferenz in den Rohren I und II ist in diesem Fall

$$H_2 = \frac{h_3 - h_1}{1 + 0{,}00018\,t'}$$

und der Enddruck der Luft im Gefäß A:

$$p_2 = H_0 + H_2 = H_0 + \frac{h_3 - h_1}{1 + 0{,}000\,18\,t'}. \tag{3}$$

4. Man stellt das Kochen ein und s e n k t s o f o r t d a s R o h r II bis zu der Stellung, die es vor dem Versuchsbeginn eingenommen hatte. Dabei achte

man darauf, daß nach dem Abkühlen der Luft in dem Gefäß A das Quecksilber von dem Rohr I nicht durch die Kapillare B in das Gefäß A gelangt.

Die Ausrechnung. Im ersten Fall bis zur Erwärmung hat die Luft in dem Gefäß A das Volumen v_1 bei dem Druck $p_1 = H_0 + H_1$. Bei Erwärmung vergrößert sich sein Volumen infolge der Ausdehnung des Gefäßes A auf

$$v_2 = v_1 [1 + \gamma (t_2 - t_1)], \tag{4}$$

wobei γ der Ausdehnungskoeffizient des Glases ist. Er ist gleich 0,000025 grad^{-1}. Die Größe t_2, d. h. die Siedetemperatur des Wassers, die dem Atmosphärendruck H_0 entspricht, findet man aus Tab. 14 (am Ende des Buches).

Setzt man (2), (3) und (4) in die Formel (1) ein, so findet man:

$$\frac{(H_0 + H_1)}{1 + \alpha t} = \frac{[1 + \gamma (t_2 - t_1)] \cdot (H_0 + H_2)}{1 + \alpha t_2}.$$

Streng gesagt, ist α auf beiden Seiten der Gleichung nicht gleich; da jedoch die Ausdehnung des Glasgefäßes A unbedeutend ist und innerhalb der Fehlergrenze der Messung liegt, kann man diese Differenz vernachlässigen und annehmen, daß sich α während des Versuches nicht ändert.

In dieser Aufgabe bestimmt man α durch Variation der Temperatur. Löst man die umgekehrte Aufgabe, d. h., bestimmt man bei bekanntem α die Temperatur, so kann man dieses Gerät als Thermometer benutzen.

Das Barometer. Die Barometer weisen die verschiedenartigsten Konstruktionen auf. Hier ist die Beschreibung eines der verbreitetsten Typen der Quecksilberbarometer angeführt, dessen Besonderheit in der Konstruktion des Gefäßes besteht. Sein Querschnitt wird in der Abb. 43 gezeigt.

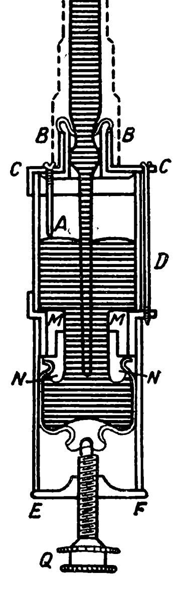


Abb. 43

In der Mitte des Messingdeckels CC, der das Gefäß abschließt, ist eine runde Öffnung gelassen, durch die der abgezogene Schenkel des Barometers geführt ist. Unterhalb des Deckels befindet sich ein kurzer Glaszylinder D, durch dessen Wände man sehen kann, wie hoch das Quecksilber steht. Dieser Zylinder stützt sich auf den vorstehenden Rand eines Schutzrohres aus Messing, das durch den Boden EF abgeschlossen ist. An der unteren inneren Wand des Gefäßes $MMNN$, die aus Palmholz gefertigt ist, hängt ein Ledersack, der den Boden bildet. Diese Vorrichtung hat zweierlei Aufgaben: Erstens kann mit Hilfe der Schraube Q, die durch den Boden des Gefäßes geht, der Quecksilberspiegel auf ein und dieselbe Höhe gebracht werden. Sie ist durch das untere Ende des Stiftes A festgelegt. A ist durch den Deckel geführt und besteht aus Elfenbein. Zweitens muß die Schraube Q, wenn das Gerät umgestellt werden soll, so weit hereingedreht werden, bis das Gefäß und der Schenkel mit Quecksilber gefüllt sind. Dann kann das Gerät in jede beliebige Stellung gebracht werden, ohne daß Luft eintritt oder der Schenkel durch das Schlagen des Quecksilbers an das Glas beschädigt wird. Die Art der Befestigung des

unteren Endes des Schenkels in dem Deckel des Gefäßes ist aus der Abbildung zu ersehen. Um den Schenkel wird ein Stück Leder gebunden, dessen Rand umgebogen und um eine Buchse aus Palmholz, die über den Deckel hinausragt, festgebunden ist. Das verhindert ein Herausfließen des Quecksilbers, hindert aber die Luft der Atmosphäre nicht daran, durch die Poren des Leders in das Gefäß einzudringen. Der Glasschenkel des Barometers ist in seiner ganzen Länge von einem Schutzrohr *BB* aus Messing umgeben. Am oberen Ende dieses Messingrohres sind zwei rechteckige sich gegenüberliegende Ausschnitte angebracht (Abb. 44), die es gestatten, den oberen Quecksilberspiegel *A* zu beobachten. An dem einen Rand des vorderen Ausschnittes ist eine Skala aufgetragen. Hier befindet sich auch ein kurzes zylindrisches Rohr *D*, das durch einen Zahntrieb *C* nach oben und unten verschoben werden kann. Das Rohr ist mit einer Noniusteilung versehen (siehe Aufgabe 1), deren Nullpunkt mit dem unteren Rohrrand zusammenfällt. Das Gerät wird senkrecht aufgehängt und seine Temperatur an einem Thermometer abgelesen, das an dem Schutzrohr befestigt ist.

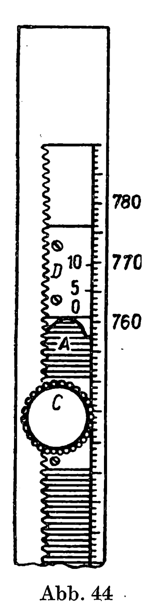


Abb. 44

Vor der Messung des Atmosphärendruckes muß man zuerst die Temperatur ablesen, weil durch die Nähe eines Beobachters sich die Anzeige des Thermometers ändert. Danach stellt man die geforderte Höhe des Quecksilberspiegels in dem Barometergefäß ein. Hierzu hebt man mit der Schraube *Q* den Ledersack an, bis die Höhe des Quecksilbers die Spitze des Stiftes *A* berührt (Abb. 43). Wenn die Quecksilberoberfläche genügend sauber ist, kann man beobachten, wann die Spitze und ihr Bild einander berühren. Bei genügender Beleuchtung und besonders, wenn man eine Lupe benutzt, kann diese Einstellung sehr genau durchgeführt werden.

Man muß im Auge behalten, daß beim Steigen des Quecksilbers im Rohr der Meniskus sich mehr wölbt als beim Absinken des Quecksilbers. Im ersten Fall vergrößert sich die Kapillardepression, im zweiten verkleinert sie sich. Damit der Meniskus seine übliche Form annimmt, erschüttert man durch leichtes Schlagen an das obere Ende des Schutzrohres das Quecksilber und gibt damit dem Meniskus die Möglichkeit, sich frei zu bilden. Ändert sich dabei die Höhe des Quecksilbers im Gefäß merklich, korrigiert man sie durch Drehen der Schraube *Q*.

Danach kann man an die Ablesung der Höhe der Quecksilbersäule gehen. Hierzu hebt man, wenn es nötig ist, den Nonius um so viel, daß zwischen seiner unteren Fläche und dem Quecksilbermeniskus ein Abstand entsteht. Dann senkt man den Nonius bis die imaginäre Fläche, die durch seinen vorderen und hinteren Rand geht, die Kuppe des Quecksilbermeniskus berührt, mit anderen Worten, bis ein Abstand nur noch an den Seiten verbleibt. Diesen Wert liest man am Nonius ab und erhält damit den Abstand zwischen der Spitze des Elfenbeinstiftes und der Kuppe des Quecksilbermeniskus im Schenkel. Der Wert muß noch korrigiert werden.

Die Temperaturkorrektur. Weil die Dichte des Quecksilbers und der Ab-

stand zwischen den Teilstrichen der Skala von der Temperatur abhängen, muß man die Höhe der Quecksilbersäule und die Teilung der Skala des Barometers auf eine Bezugstemperatur beziehen. Als eine solche Bezugstemperatur nimmt man 0° C an. Mit α bezeichnen wir den Koeffizienten der Volumenausdehnung des Quecksilbers und mit β den linearen Ausdehnungskoeffizienten des Skalenmaterials, mit h die abgelesene Höhe des Barometerstandes bei der Temperatur t und mit H_0 die Höhe des Barometerstandes, bezogen auf 0° C. Nehmen wir an, daß die Teilung der Skala für 0° C richtig ist, so finden wir, daß die bei der Temperatur t° C an der Skala abgelesene Höhe h in Wirklichkeit $h(1 + \beta t)$ beträgt. Weil die Höhen der im Gleichgewicht stehenden Quecksilbersäulen bei verschiedenen Temperaturen ihren Dichten bei diesen Temperaturen umgekehrt proportional und ihren Teilvolumen direkt proportional sind, ist

$$\frac{H_0}{h(1+\beta t)} = \frac{D_t}{D_0} = \frac{1}{1+\alpha t},$$

daraus erhält man als Näherung

$$H_0 = h[1 - (\alpha - \beta)t].$$

Weil für Quecksilber $\alpha = 0{,}0001818$ und für Messing $\beta = 0{,}000019$ ist, ergibt sich für alle Temperaturen über Null Grad die Korrektur zu $-0{,}000163\,ht$.

Die nach dieser Formel ausgerechneten Korrekturen sind in Tabelle 1 (am Ende dieses Buches) aufgeführt.

Die durch Kapillardepression und das Nichtzusammenfallen der Spitze A mit dem Nullpunkt der Skala bedingte Korrektur. Die Korrektur wird durch Vergleich der Anzeige des Barometers mit der Anzeige eines Normalbarometers festgelegt und als eine bestimmte Konstante für das jeweilige Barometer angegeben.

Aufgabe 19

Die Messung der Verdampfungswärme von flüssigem Stickstoff

Zubehör: 1. Feststehendes Dewargefäß mit einer Heizspirale zur Verdampfung des flüssigen Stickstoffs, 2. geeichter Gasauffangbehälter zur Messung der Menge des verdampften Stickstoffs, 3. Dampfdruckbarometer zur Messung der Temperatur des flüssigen Stickstoffs, 4. Stromkreis für die Heizspirale im Dewargefäß, 5. Zeitmesser, 6. Schutzbrille.

Einleitung und Beschreibung der Anordnung. Die Aufgabe hat das Ziel, die Verdampfungswärme des flüssigen Stickstoffs zu messen und mit den Elementen der experimentellen Technik beim Arbeiten mit verflüssigten Gasen bekannt zu machen. Die Verdampfung des flüssigen Stickstoffs geschieht in einem kleinen zylindrischen Dewargefäß FF, das auf einem Holzstativ steht (Abb. 45). Dieses Gefäß besitzt einen unversilberten vertikal verlaufenden Streifen, durch den man die Höhe des flüssigen Gases im Gefäß sehen kann. In dem Gefäß befindet sich ein durch Metall hermetisch abgeschlossener Ofen S, der eine Konstantanspirale enthält. Der Strom wird ihr von oben über Drähte zu-

geführt, die in einem metallischen Rohr eingeschlossen sind. Das Rohr ist an die Ofenhülle angeschweißt und dient zu ihrer Halterung. Von oben ist das Dewargefäß mit einem Messingdeckel abgeschlossen, der mit den äußeren Wänden des Gefäßes durch eine Gummimanschette gasdicht verbunden ist. Zur besseren Abdichtung ist die Manschette außen mit Draht umwickelt. Der Deckel besitzt eine Reihe von Öffnungen. Eine davon wird mit einem Gummistopfen verschlossen und dient zur Auffüllung des Dewargefäßes mit flüssigem Stickstoff. Dazu wird ein Metalltrichter in die Öffnung gesteckt. An eine andere Öffnung ist ein Messingrohr geschweißt, auf das ein Gummi-

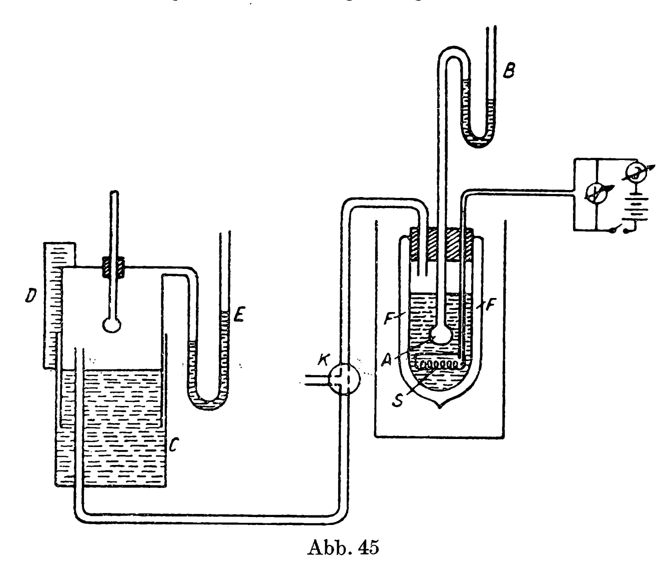


Abb. 45

schlauch gezogen ist, der das Dewargefäß mit dem auf einem Tisch stehenden Gasauffangbehälter verbindet. Durch die dritte Öffnung ist das Rohr geführt, das den Ofen hält. Die Durchführung des Rohres ist durch eine Gummimanschette abgedichtet. Durch die vierte Öffnung des Deckels ist das ebenfalls mit Gummi abgedichtete Rohr des Kondensationsthermometers geführt. Seine Wirkungsweise wird weiter unten erläutert.

Der aus dem Dewargefäß verdampfende Stickstoff gelangt durch den beschriebenen Gummischlauch zum Gasauffangbehälter. Schematisch ist dieser Behälter in Abb. 45 links dargestellt. Mit ihm wird die Menge des Gases gemessen, die infolge des Verdampfungsprozesses dem Dewargefäß entströmt. Durch Messung des Gasvolumens kann man die im Gefäß verdampfte Flüssigkeitsmenge viel genauer bestimmen als bei unmittelbarer Messung des Flüssigkeitsvolumens, weil die Dichte der Flüssigkeit ungefähr 1000mal größer ist als die Dichte des Gases.

Die der Anordnung zugeführte Wärme ergibt sich aus der Leistung der Heizspirale, die mit einem Amperemeter und einem Voltmeter gemessen wird, welche

in den Stromkreis der Heizspirale geschaltet sind. Die Heizspirale erhält von einem Akkumulator eine Spannung von etwa 10 Volt.

Sind also die Menge der verdampften Flüssigkeit aus der Messung des Gasvolumens und die durch die Heizspirale zugeführte Wärmemenge bekannt, so kann man die Verdampfungswärme des verflüssigten Gases bestimmen. Bezeichnen wir sie mit λ, so erhalten wir bekanntlich

$$\lambda = \frac{0{,}24 I V t}{m} = \frac{0{,}24 I V R T t}{p v \mu}, \tag{1}$$

wobei I die durch die Heizspirale fließende Stromstärke, V der Spannungsabfall an der Heizspirale und t die Heizzeit bedeuten. Alle übrigen Größen, die in diese Formel eingehen, wie der Druck p und das Volumen v des Gases im Gasauffangbehälter, das Molekulargewicht μ des Gases, die universelle Gaskonstante R und die absolute Temperatur T des Gases, hängen mit der Masse der verdampften Flüssigkeit zusammen.

Die Verdampfungswärme hängt von der Temperatur ab. Deshalb hat jedes Resultat ihrer Messung nur dann Wert, wenn bekannt ist, bei welcher Temperatur es erhalten wurde. Die Messung der Temperatur des flüssigen Stickstoffs kann mit einem Gasthermometer, Widerstandsthermometer, Thermoelement u. a. durchgeführt werden. Hier wird ein Dampfdruckthermometer benutzt. Das Prinzip seiner Wirkungsweise kann auf folgende Art erklärt werden:

Zur Messung der Temperatur, bei der der Stickstoff siedet, benutzt man das physikalische Gesetz: Der Druck des gesättigten Dampfes einer reinen Flüssigkeit ist eine eindeutige Funktion ihrer Temperatur. In das Dewargefäß (siehe Abb. 45) ist eine gläserne Hohlkugel A des Dampfdruckthermometers getaucht, das mit reinem gasförmigem Stickstoff gefüllt und mit einem U-förmigen Quecksilbermanometer B gasdicht verbunden ist. Wird das Gefäß mit flüssigem Stickstoff gefüllt, so kondensiert der gasförmige Stickstoff im Inneren der Kugel A teilweise, und das Manometer zeigt den Druck des gesättigten Dampfes bei der entsprechenden Temperatur an. Sind in diesem Moment der Manometerstand und der Atmosphärendruck bekannt, so kann man den wahren Dampfdruck des Stickstoffs erhalten. Nach der Tabelle oder einer entsprechenden graphischen Darstellung der Abhängigkeit der Temperatur T von p (die der Anordnung beigegeben ist) kann man die Temperatur der kondensierenden Flüssigkeit und damit die Temperatur des Stickstoffs im Dewargefäß finden.

Die Messung. Durch den Trichter wird das Dewargefäß bis zu zwei Dritteln mit flüssigem Stickstoff[1]) gefüllt. Nach Ablauf einiger Minuten, wenn der stürmische Verdampfungsprozeß des Stickstoffs aufhört, kann man an die Versuche herantreten. Zuerst bestimmt man die Menge des Stickstoffs, die auf Kosten der natürlichen Wärmezufuhr verdampft (wenn die Heizspirale aus-

---

[1]) Den flüssigen Stickstoff finden die Studenten in einem kleinen metallischen Dewargefäß vor. Um den mit der Anordnung Arbeitenden vor Glassplittern zu schützen, die bei einem zufälligen Platzen des Dewargefäßes umherfliegen können, steckt es in einer durchsichtigen Hülle aus Kunststoff. Bei der Durchführung des Experimentes muß man besonders vorsichtig sein und unbedingt die Schutzbrille tragen.

geschaltet ist). Dazu leitet man mit Hilfe des Dreiweghahnes K (Abb. 45) den Strom des gasförmigen Stickstoffs, der vorher in das Zimmer floß, in den Gasometer C und liest an der an ihm befestigten Skala D das Volumen des Stickstoffs ab, der in 10 bis 15 Minuten verdampft ist. Dann schaltet man die Heizspirale ein und mißt bei konstantem Strom (0,5 A) erneut das Volumen des Stickstoffs, der in dem gleichen Zeitraum verdampft.

Beide Versuche wiederholt man abwechselnd 2- bis 3mal. Dabei schreibt man jedesmal die Skalenteile des Amperemeters und des Voltmeters und gleichzeitig auch die Skalenteile des U-förmigen Quecksilbermanometers E auf. Aus der Differenz der Volumina des Stickstoffs, der bei Erwärmung und ohne Erwärmung verdampft, findet man das Volumen des Stickstoffs, der unter dem Einfluß der durch die Heizspirale zugeführten Wärme verdampft. Unter Berücksichtigung des Volumens, das an der Skala des Gasometers abgelesen wird, der Anzeige des Wassermanometers[1]) an ihm und der Gastemperatur findet man die Masse des verdampften Stickstoffs. Man berechnet die zugeführte Wärmeenergie und findet nach der Formel (1) die Verdampfungswärme des flüssigen Stickstoffs bei der Temperatur, die das Dampfdruckthermometer[2]) angezeigt hat.

Spezialliteratur

F. X. Eder: „Einführung in die Physik der tiefen Temperaturen". Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955.

Aufgabe 20

Die Bestimmung des Verhältnisses der spezifischen Wärmen von Gasen[3])

Zubehör: 1. Anordnung, 2. Handpumpe.

Beschreibung und Theorie der Methode. Das Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck (c_p) zu der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen (c_v) der Gase spielt eine große Rolle bei adiabatischen oder ihnen verwandten Prozessen. Als Beispiel führen wir an, daß dieses Verhältnis insbesondere die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles in Gasen bestimmt (siehe Aufgabe 16), und daß von ihm das Strömen der Gase durch Rohre mit Schallgeschwindigkeit und die Erzeugung von Überschallgeschwindigkeiten in sich verbreiternden Rohren abhängt.

Das in dieser Aufgabe benutzte Verfahren zur Bestimmung des Verhältnisses $\gamma = \left(\frac{c_p}{c_v}\right)$ der spezifischen Wärmen von Gasen ist besonders einfach zu verwirklichen.

Wir nehmen ein Glasgefäß, das mit einem Manometer versehen ist. Durch einen Hahn kann das Gefäß mit der Atmosphäre verbunden werden. Diese

---

[1]) In dem Gasauffangbehälter herrscht ein Überdruck, der durch das Gewicht der Glocke des Behälters verursacht wird. Dieser Druck läßt sich am Wassermanometer ablesen.

[2]) Die Eichkurve des Dampfdruckthermometers liegt neben dem Gasauffangbehälter.

[3]) Anm. d. Übers.: Methode von Clément und Désormes.

Verbindung wird vor Beginn des Versuches hergestellt. Wenn mit der Handpumpe in das Gefäß etwas Luft gepumpt und der Hahn geschlossen wird, nimmt der Druck im Gefäß zu. Haben wir jedoch diese Druckzunahme genügend rasch erzeugt, so nimmt der Manometerstand nicht seine endgültige Stellung ein, weil das Zusammendrücken der Luft adiabatisch vor sich ging und sich daher die Temperatur erhöhte[1]). Die endgültige Höhendifferenz im Manometer (h_1) stellt sich erst dann ein, wenn sich die Temperatur der Luft im Inneren des Gefäßes dank der Wärmedurchlässigkeit der Wände mit der Temperatur der Umgebung ausgleicht.

Bezeichnen wir mit T_1 die absolute Temperatur der das Gefäß umgebenden Luft und mit p_1 den Druck des Gases im Inneren des Gefäßes, der der Anzeige des Manometers h_1 entspricht, so ist es klar, daß dann

$$p_1 = p_0 + h_1 \tag{1}$$

gilt, wobei p_0 der Atmosphärendruck ist (natürlich müssen dabei p_0 und h_1 in den gleichen Einheiten ausgedrückt werden). Diese beiden Parameter T_1 und p_1 charakterisieren den Zustand des Gases, den wir als ersten Zustand des Gases bezeichnen wollen (*Zustand I:* T_1, p_1).

Wenn wir nun den Hahn rasch öffnen, so dehnt sich die Luft im Gefäß adiabatisch aus, bis ihr Druck gleich p_0 geworden ist. Dabei kühlt sie auf die Temperatur T_2 ab. Das ist der zweite Zustand des Gases (*Zustand II:* T_2, p_0).

Wenn man sofort nach dem Öffnen den Hahn erneut schließt, so fängt der Druck im Gefäß an zu wachsen, weil das infolge seiner Ausdehnung abgekühlte Gas sich wieder erwärmt. Das Wachsen des Druckes hört auf, wenn die Temperatur der Luft im Gefäß gleich der Außentemperatur T_1 geworden ist. Das ist der dritte Zustand des Gases (*Zustand III:* T_1, p_2).

Bezeichnen wir den Luftdruck im Gefäß in diesem Moment mit p_2 und entsprechend die Anzeige des Manometers mit h_2, dann ist es klar, daß

$$p_2 = p_0 + h_2 . \tag{2}$$

Weil der Übergang vom Zustand *II* zum Zustand *III* ohne Änderung des Volumens vor sich ging, können wir hier mit Recht das Gay-Lussacsche Gesetz anwenden:

$$\frac{p_2}{T_1} = \frac{p_0}{T_2} . \tag{3}$$

Auf den Prozeß der adiabatischen Ausdehnung, d. h. auf den Übergang von Zustand *I* zu Zustand *II*, können wir das Poissonsche Gesetz anwenden, das wir bequem in folgender Form schreiben können:

$$\frac{p_1^{\gamma-1}}{T_1^{\gamma}} = \frac{p_0^{\gamma-1}}{T_2^{\gamma}} ,$$

wobei γ das Verhältnis der spezifischen Wärme des Gases bei konstantem

[1]) In Wirklichkeit nimmt das Hineindrücken der Luft eine gewisse Zeit in Anspruch. Deshalb können wir diesen Prozeß nicht als streng adiabatisch ansehen.

Druck zu dem bei konstantem Volumen, $\frac{c_p}{c_v}$, bedeutet[1]). Setzen wir hierin den Wert p_1 aus der Gleichung (1) ein und formen sie um, so finden wir

$$\left(\frac{p_0 + h_1}{p_0}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma}$$

oder

$$\left(1 + \frac{h_1}{p_0}\right)^{\gamma-1} = \left(1 + \frac{T_1 - T_2}{T_2}\right)^{\gamma}.$$

Weil $\frac{h_1}{p_0}$ und $\frac{T_1 - T_2}{T_2}$, verglichen mit 1, kleine Größen sind, erhalten wir, wenn wir beide Seiten der Gleichung nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln und uns nur auf die Glieder erster Ordnung beschränken

$$1 + (\gamma - 1)\frac{h_1}{p_0} = 1 + \gamma\frac{T_1 - T_2}{T_2},$$

woraus folgt

$$p_0\frac{T_1 - T_2}{T_2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} h_1.$$

Der links vom Gleichheitszeichen stehende Ausdruck ist aber nichts anderes als h_2. Setzen wir nämlich in die Gleichung (3) den Wert p_2 aus der Gleichung (2) ein und lösen sie nach h_2 auf, so erhalten wir:

$$h_2 = p_0\frac{T_1 - T_2}{T_2}.$$

Folglich kann man schreiben:

$$h_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} h_1,$$

woraus wir endgültig erhalten:

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \tag{4}$$

Beschreibung der Anordnung. Der Glasballon A (Abb. 46) kann mit Hilfe des Dreiweghahnes B, je nach seiner Stellung, entweder nur mit dem Rohr D oder mit diesem und dem Außenraum (durch das Rohr E) gleichzeitig verbunden werden. Das Rohr D ist durch einen seitlichen Ansatz mit dem Wassermanometer C und durch den Hahn F mit der Handpumpe verbunden. Der Druck in A wird mit dem Wassermanometer C gemessen.

Die Messung. Man dreht den Hahn B so, daß eine Verbindung zwischen dem Ballon A und dem Rohr D entsteht. Durch vorsichtiges Betätigen der

---

[1]) Diese Form der POISSONschen Gleichung kann leicht aus der gewöhnlichen

$$p_1 \cdot v_1^{\gamma} = p_2 \cdot v_2^{\gamma}$$

erhalten werden, wenn wir dafür die Zustandsgleichung der Gase benutzen:

$$\frac{p_1 \cdot v_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot v_2}{T_2}.$$

Erheben wir die letzte Gleichung in die γ-te Potenz und teilen wir sie durch die POISSONsche Gleichung, so erhalten wir

$$\frac{p_1^{\gamma-1}}{T_1^{\gamma}} = \frac{p_2^{\gamma-1}}{T_2^{\gamma}}.$$

Pumpe wird der Druck im Gefäß A erhöht. Wenn der Höhenunterschied im Manometer 20 bis 25 cm erreicht hat, schließt man den Hahn F. Nachdem sich ein konstanter Druck eingestellt hat, liest man h_1 ab (die Höhendifferenz in beiden Schenkeln des Manometers).

Durch schnelles Drehen des Hahnes B stellt man für einen Moment die Verbindung von A mit der Atmosphäre her und dreht ihn sofort wieder in seine Ausgangsstellung zurück[1]). Wenn sich ein konstanter Druck eingestellt hat, liest man h_2 ab.

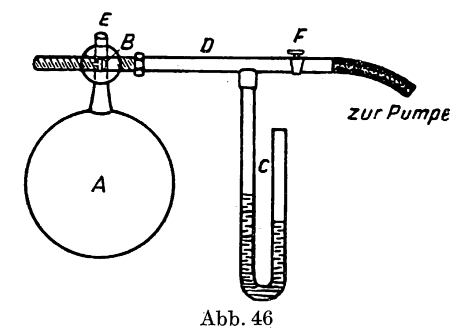


Abb. 46

Der Versuch muß mindestens zehnmal bei verschiedenen Höhen h_1 durchgeführt werden.

Man setzt die aus den einzelnen Beobachtungen ermittelten Werte h_1 und h_2 in die Formel (4) ein und findet die Größe γ als den Mittelwert aller bei den einzelnen Beobachtungen erhaltenen γ.

Aufgabe 21

Die Bestimmung der spezifischen Wärme von Flüssigkeiten mit dem Kalorimeter

Zubehör: 1. Zwei Kalorimeter, 2. zwei Thermometer, 3. zwei Heizspiralen auf einer Isolierplatte, 4. zu untersuchende Flüssigkeit.

Die Beschreibung der Anordnung und die Messung. Die Anordnung besteht aus zwei gleichen Kalorimetern C (Abb. 47), die mit verschiedenen Flüssigkeiten gefüllt sind. In die Flüssigkeiten sind zwei Heizspiralen K von hohem elektrischem Widerstand eingetaucht.

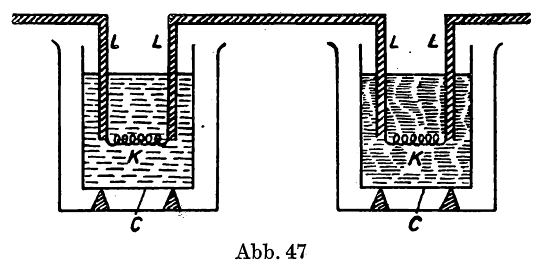


Abb. 47

Auf Grund des JOULE-LENZschen Gesetzes ist die in jedem Kalorimeter erzeugte Wärmemenge gleich

$$Q = 0{,}24 I^2 R t,$$

wobei I die Stromstärke, R der Widerstand und t die Zeitdauer des Stromdurchganges bedeuten. Es werden zwei Heizspiralen gleichen Widerstandes ausgewählt und mit dicken Kupferstäben LL in Hintereinanderschaltung verbunden. Beim Stromdurchgang erzeugen beide Spiralen die gleiche Wärme-

[1]) Es empfiehlt sich, den Hahn B sofort nach dem Aufhören des Geräusches, das das ausströmende Gas erzeugt, zu schließen.

menge. Um die Temperatur der gesamten Flüssigkeitsmenge in jedem Kalorimeter auszugleichen, sind Rührer angebracht (in Abb. 47 nicht eingezeichnet).

Die Ausrechnung. Wir bezeichnen mit

m die Masse der Flüssigkeit im ersten Kalorimeter,
m_1 die Masse der Flüssigkeit im zweiten Kalorimeter,
t die Anfangstemperatur im ersten Kalorimeter,
t_1 die Anfangstemperatur im zweiten Kalorimeter,
τ die Endtemperatur im ersten Kalorimeter,
τ_1 die Endtemperatur im zweiten Kalorimeter,
c die spezifische Wärme der Flüssigkeit im ersten Kalorimeter,
c_1 die spezifische Wärme der Flüssigkeit im zweiten Kalorimeter,
w den Wasserwert des Gefäßes, Rührers und Thermometers im ersten Kalorimeter,
w_1 den Wasserwert des Gefäßes, Rührers und Thermometers im zweiten Kalorimeter[1]).

Die Wärmemenge, die das erste Kalorimeter erhält, ist

$$Q_1 = (cm + w)(\tau - t).$$

Die Wärmemenge, die das zweite Kalorimeter erhält, ist

$$Q_2 = (c_1 m_1 + w_1)(\tau_1 - t_1).$$

Setzen wir die Ausdrücke für Q_1 und Q_2 gleich, so erhalten wir

$$c = \frac{l}{m}\left[(c_1 m_1 + w_1)\frac{\tau_1 - t_1}{\tau - t} - w\right].$$

Wenn im zweiten Kalorimeter Wasser eingefüllt war, ist $c_1 = 1$, und die letzte Gleichung gibt den Zahlenwert für die spezifische Wärme c der untersuchten Flüssigkeit an.

Um einen Fehler, der durch eine mögliche Ungleichheit der Widerstände in beiden Kalorimetern entstehen könnte, zu vermeiden, muß man den Versuch mit vertauschten Widerständen wiederholen und c als Mittelwert aus beiden Versuchen bestimmen.

Man darf nicht zulassen, daß die Temperatur der Kalorimeter die Zimmertemperatur um mehr als 2 bis 3° C übersteigt.

Bei der Messung leitender Flüssigkeiten, in die man die Heizspiralen K eintaucht, muß man die Drähte vorher isolieren, damit bei gleichen Drahtwiderständen auch die gleiche Wärmemenge beim Durchgang des Stromes entsteht.

---

[1]) Weil die zur Erwärmung der Thermometer erforderliche Wärmemenge unbedeutend ist, wird sie bei der Bestimmung des Wasserwertes nicht berücksichtigt.

Aufgabe 22

Die Bestimmung der spezifischen Wärme von Metallen mit der Abkühlungsmethode

Zubehör: 1. Anordnung, 2. Metallstücke, 3. Stoppuhr, 4. Eichkurve.

Die Theorie der Methode. Ein Metallstück, das eine höhere Temperatur als die Umgebung besitzt, kühlt sich ab. Dabei hängt die Abkühlungsgeschwindigkeit von der Größe der spezifischen Wärme des Metalls ab. Vergleicht man die Abkühlungskurven (die Temperatur als Funktion der Zeit) zweier Metallstücke, von denen eines als Etalon dient (seine spezifische Wärme und Abkühlungsgeschwindigkeit müssen bekannt sein), so kann man die spezifische Wärme des anderen aus seiner Abkühlungsgeschwindigkeit bestimmen.

Die Wärmemenge, die ein Volumenelement dV des Metalles in der Zeit dt verliert, kann man in folgender Form schreiben:

$$dq = C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dV \cdot dt, \tag{1}$$

wobei C die spezifische Wärme des Metalls und ϱ seine Dichte bedeuten. T ist die Temperatur, die der Körper in allen seinen Punkten annimmt, da seine linearen Abmessungen klein sind und er eine große Wärmeleitfähigkeit besitzt. Die Größe dq kann nach dem NEWTONschen Abkühlungsgesetz ausgedrückt werden durch

$$dq = \alpha (T - T_0) \cdot dS \cdot dt, \tag{2}$$

wobei dS das Oberflächenelement, T_0 die Umgebungstemperatur und α die Wärmeübergangszahl bedeuten. Vergleichen wir (1) und (2) miteinander, so erhalten wir:

$$C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} dV = \alpha (T - T_0) dS. \tag{3}$$

Für das ganze Volumen des Stückes finden wir:

$$\int C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int \alpha (T - T_0) dS.$$

Nehmen wir an, daß $\frac{\partial T}{\partial t}$, C und ϱ nicht von den Koordinaten der einzelnen Punkte des Volumens und α, T und T_0 nicht von den Koordinaten der Punkte der Oberfläche des Stückes abhängen, so können wir schreiben:

$$C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} V = \alpha (T - T_0) S, \tag{4}$$

wobei V das Volumen des ganzen Stückes und S seine ganze Oberfläche bedeuten.

Schreiben wir die erhaltene Beziehung für beide Metallstücke auf, und nehmen wir dabei an, daß $S_1 = S_2$, $T_1 = T_2$ und $\alpha_1 = \alpha_2$ ist, so erhalten wir

durch Division der beiden Ausdrücke durcheinander:

$$C_1 = C_2 \cdot \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_2}{\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_1}, \tag{5}$$

wobei $m_1 = \varrho_1 V_1$ die Masse des ersten Metallstückes und $m_2 = \varrho_2 V_2$ die Masse des zweiten Metallstückes bedeuten.

Die Beschreibung der Anordnung und die Messung. Das Schema der Anordnung ist in Abb. 48 dargestellt. Der elektrische Ofen A ist an zwei Führungsstangen montiert, an denen er nach oben und unten verschoben werden kann (auf der Abb. 48 sind die Stangen nicht eingezeichnet). Das Metallstück B ist ein Zylinder von 30 mm Höhe und 5 mm Durchmesser, der an der einen Seite mit einer Bohrung versehen ist. Er wird mit Hilfe dieser Bohrung auf ein Porzellanrohr aufgesetzt, das ein Thermoelement C enthält. Die Enden des Thermoelementes sind an ein Galvanometer G angeschlossen. Die Temperatur des Metallstückes kann direkt am Galvanometer abgelesen werden, wenn man aus der Eichkurve die entsprechenden Temperaturwerte entnimmt. Am Anfang des Versuches wird der Ofen so weit herabgesenkt, bis das Metallstück vollständig darin verschwindet, und die Stromquelle eingeschaltet. Hat das Metallstück eine Temperatur von 550 bis 600° C erreicht, wird der Ofen schnell hochgeschoben und mit Schrauben festgeklemmt. Der Zylinder kühlt sich nun in unbewegter Luft ab. Mit Hilfe der Stoppuhr wird alle 10 Sekunden seine Temperatur nach den abgelesenen Skalenteilen des Galvanometers aufgeschrieben. Hat sich der Zylinder bis zu Temperaturen unterhalb 100° C abgekühlt, so wird der Versuch wiederholt.

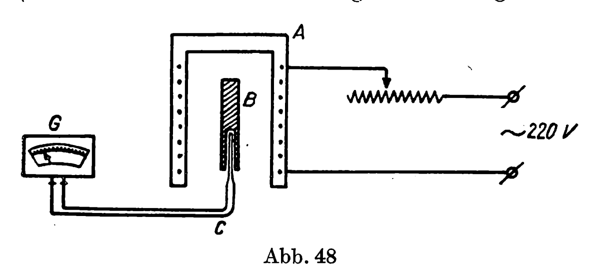


Abb. 48

Für jedes Metallstück muß man zwei Abkühlungskurven aufnehmen. Es werden Metallstücke aus Kupfer, Aluminium und Eisen untersucht. Als Etalon wird ein Kupferstück verwendet, dessen Abhängigkeit der spezifischen Wärme von der Temperatur in Tabelle 16 angegeben ist.

Die beim Versuch erhaltenen Kurven $T = f(t)$ müssen in Kurven $\frac{\partial T}{\partial t}$ umgewandelt werden. Dafür läßt sich bequem die graphische Methode anwenden. Die Kurven $T = f(t)$ unterteilt man in Bereiche durch vertikale Striche, die nahe beieinanderliegen und den gleichen Abstand voneinander besitzen. Die Differenz der Ordinatenwerte der Kurve in den Punkten, wo sie die vertikalen Striche schneidet, stellt die Temperaturdifferenz in bestimmten Zeitintervallen dar. Dividiert man insbesondere die Differenz durch den Abstand zwischen den vertikalen Strichen, so erhält man die Abkühlungs-

geschwindigkeit in einem bestimmten Punkt der Kurve und folglich die Abkühlungsgeschwindigkeit, die einer bestimmten Temperatur entspricht. Aus den erhaltenen Zahlenwerten werden sowohl eine Tabelle als auch eine graphische Darstellung der Abhängigkeit $\frac{\partial T}{\partial t} = \varphi(T)$ angefertigt.

Hat man für alle Metallstücke solche Darstellungen angefertigt, so bestimmt man nach der Formel (5) die spezifische Wärme und fertigt die graphische Darstellung $C = \psi(T)$ für jedes Metallstück an. Die Masse der Metallstücke bestimmt man durch Wägung.

Diese Methode ist von J. A. Turowski und G. M. Bartenew ausgearbeitet worden.

Spezialliteratur

J. A. Turowski und G. M. Bartenew: „Die Bestimmung der Wärmekapazität von Metallen durch die Abkühlungsmethode". ЖТФ 10 (1940), S. 514.

Aufgabe 23

Die Bestimmung der Wärmeleitzahl von Metallen

Zubehör: 1. Anordnung, 2. Eichkurve des Thermoelementes.

Die Theorie der Methode. Die Verteilung der Temperatur T längs eines an einem Ende erwärmten Stabes, dessen Achse mit der X-Achse zusammenfällt, wird durch die Lösung der folgenden Differentialgleichung bestimmt:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = a^2 (T - T_0)\,[1], \tag{1}$$

[1] Diese Gleichung kann leicht abgeleitet werden, wenn man von folgenden Überlegungen ausgeht: Betrachten wir ein Stück eines Stabes der Länge dx, so ist die Wärmemenge, die durch den Querschnitt fließt, der dem Punkte x entspricht:

$$q' = -\lambda \left(\frac{dT}{dx}\right)_x S,$$

und die Wärmemenge, die durch den Querschnitt fließt, der dem Punkte $x + dx$ entspricht:

$$q'' = -\lambda \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} S.$$

Durch die Seitenbegrenzung des Stabstückes geht die Wärmemenge

$$dq''' = \alpha (T - T_0)\, p\, dx$$

verloren. Bei einem stationären Prozeß ist

$$dq''' = q' - q'',$$

d. h.

$$\alpha (T - T_0)\, p\, dx = -\lambda \left(\frac{dT}{dx}\right)_x S + \lambda \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} S.$$

Entwickeln wir diesen Ausdruck in eine Reihe und vernachlässigen die Ableitungen höherer Ordnung, so können wir schreiben:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - \left(\frac{dT}{dx}\right)_x = \frac{d^2 T}{dx^2}\, dx;$$

wobei

$$a^2 = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{p}{S}. \tag{1'}$$

Hierbei ist T_0 die Umgebungstemperatur, α die Wärmeübergangszahl, p der Umfang des Stabquerschnittes, S die Fläche des Stabquerschnittes und λ die gesuchte Wärmeleitzahl.

Die Lösung der Gleichung hat die Form

$$T - T_0 = A \cdot e^{ax} + B \cdot e^{-ax}.$$

Nehmen wir an, daß bei $x = 0$, $T = T_1$ und der Stab selbst unendlich lang ist, so erhalten wir

$$T - T_0 = (T_1 - T_0) \cdot e^{-ax},$$

woraus folgt

$$a = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{T_1 - T_0}{T - T_0}. \tag{2}$$

Die Wärmemenge, die der Stab durch seine seitliche Oberfläche verliert, ist

$$dq = \alpha (T - T_0) \cdot p \cdot dx,$$

das kann man auch in der Form schreiben:

$$\frac{dq}{dx} = \alpha p (T_1 - T_0) \cdot e^{-ax}. \tag{3}$$

Integrieren wir diesen Ausdruck von 0 bis ∞, so erhalten wir

$$q = \frac{\alpha p}{a} (T_1 - T_0). \tag{4}$$

Benutzen wir die Gleichung (1'), so finden wir, daß

$$\lambda = q \frac{1}{a S (T_1 - T_0)}. \tag{5}$$

Setzen wir den Wert für a aus der Gleichung (2) ein, so erhalten wir endlich

$$\lambda = \frac{q x}{S (T_1 - T_0) \cdot \ln \frac{T_1 - T_0}{T - T_0}}. \tag{6}$$

Für die Bestimmung der Wärmeleitzahl muß man, wie diese Formel aussagt, die Wärmemenge q, die der Stab im stationären Zustand durch seine Oberfläche verliert, die Temperatur des geheizten Stabendes T_1, die Temperatur T irgendeines Punktes des Stabes im Abstand x von dem geheizten Ende,

---

woraus folgt

$$\lambda S \frac{d^2 T}{d x^2} = \alpha p (T - T_0).$$

Bezeichnen wir $\frac{\alpha p}{\lambda S}$ mit a^2, so erhalten wir

$$\frac{d^2 T}{d x^2} = a^2 (T - T_0).$$

die Fläche des Stabquerschnittes S und die Temperatur der Umgebung T_0 kennen.

Praktisch hat man natürlich niemals einen unendlich langen Stab. Je länger er jedoch ist, desto genauer kann die Wärmeleitzahl bestimmt werden. Versuchen wir die Größe des Fehlers abzuschätzen, wenn der Stab die Länge l besitzt: Aus der Gleichung (3) erhalten wir durch Integration von $x = l$ bis $x = \infty$:

$$\Delta q = \frac{\alpha p}{a}(T - T_0) \cdot e^{-al}.$$

Dividieren wir diese Beziehung durch den Ausdruck (4), den wir durch Integration der gleichen Gleichung (3) von $x = 0$ bis $x = \infty$ erhalten, so finden wir

$$\Delta q = q \cdot e^{-al}. \tag{7}$$

Dieser Ausdruck gibt uns die Größe des Fehlers an, den wir bei der Bestimmung der Wärmemenge q machen, wenn wir den Stab der Länge l als unendlich lang annehmen.

Die Beschreibung der Anordnung. In dieser Aufgabe wird die Wärmeleitzahl eines Messingstabes bestimmt. Das eine Stabende wird in einem

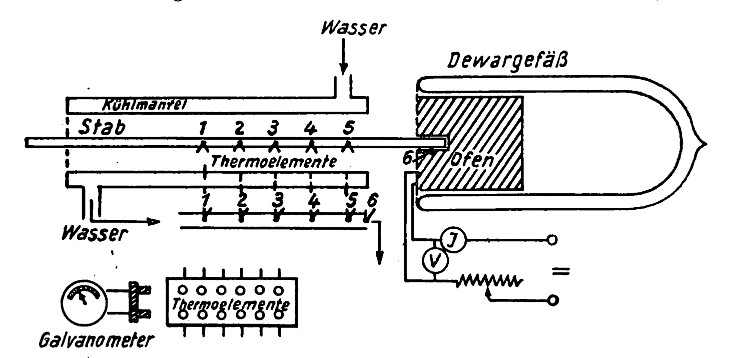


Abb. 49

elektrischen Ofen erwärmt (Abb. 49). Die vom Ofen in der Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge ist gegeben durch $Q = 0{,}24 \cdot I_0 \cdot V_0$, wobei V_0 durch Spannungsmessung an den Enden der Heizspirale und I_0 durch Strommessung im Stromkreis der Spirale bestimmt werden. Die Ofentemperatur (Temperatur des Stabendes) T_1 wird durch ein Thermoelement gemessen. Ein Teil der Wärme Q wird abgeleitet (q), und der andere geht in den den Ofen umgebenden Raum (q_1), so daß

$$Q = q + q_1.$$

Wenn man den Stab aus dem Ofen entfernt und seine Heizung so einreguliert, daß er wieder die gleiche Temperatur T_1, wie vorher mit dem Stab, annimmt, so ist klar, daß man damit die Wärmemenge bestimmen kann, die in den den Ofen umgebenden Raum geht:

$$q_1 = 0{,}24\, I_1\, V_1,$$

wobei I_1 und V_1 die Stromstärke und Spannung des Ofens ohne Stab angeben. Deshalb finden wir

$$q = 0{,}24\,(I_0 V_0 - I_1 V_1).$$

Um den Fehler bei der Bestimmung von q herabzusetzen, muß man dafür sorgen, daß die Größe q_1 gegenüber der Größe q klein ist. Deswegen ist der Ofen in einem Dewargefäß untergebracht (siehe Abb. 49). Die Temperatur des Stabes T wird durch fünf Thermoelemente gemessen, die am Stab in bestimmten Abständen angebracht sind. Der Stab ist von einer doppelwandigen zylindrischen Hülle umgeben, die durch Wasser gekühlt wird. Die Temperatur des den Stab umgebenden Raumes T_0 stimmt mit der Temperatur des Wassers überein. Da die absolute Temperatur des Stabes nicht unbedingt bekannt sein muß (in die Formel gehen nur Temperaturdifferenzen ein), steckt das eine Ende jedes Thermoelementes in dem durchfließenden Wasser. Dadurch zeigt das an die Thermoelemente angeschlossene Galvanometer gleich die entsprechenden Temperaturdifferenzen an. Aus der Eichkurve werden zu den Galvanometerausschlägen die entsprechenden Temperaturen entnommen.

Die Messung. Zuerst bestimmt man die Querschnittsfläche S des zu untersuchenden Stabes. Dazu wird seine Länge mit dem Metermaß und der Durchmesser mit der Mikrometerschraube gemessen. Dann mißt man mit dem Metermaß die Abstände x zwischen dem geheizten Ende des Stabes und jedem der fünf Thermoelemente, die am Stab befestigt sind.

Danach wird das Stabende so in den Ofen geschoben, daß es seine ganze Öffnung vollständig ausfüllt. Man schaltet dann die Heizung ein und stellt durch langsames Aufdrehen des Wasserhahnes die Kühlung an.

Die weiteren Messungen werden erst dann ausgeführt, wenn sich ein Wärmegleichgewicht eingestellt hat, d. h., wenn alle sechs Thermoelemente, die nacheinander an das Galvanometer angeschlossen werden, ihre Anzeige nicht mehr ändern. Man schreibt die durch alle sechs Thermoelemente erzeugten Ausschläge (fünf davon am Stab und einer im Ofen) und die Skalenteile des Ampere- und Voltmeters auf.

Danach rückt man den Ofen von dem Stabende ab und verringert die den Ofen heizende Stromstärke so weit, bis das Thermoelement des Ofens den gleichen Ausschlag wie vorher auf der Skala des Galvanometers erzeugt. Gleichzeitig schreibt man die Anzeige des Ampere- und Voltmeters auf.

Man wiederholt die Messungen mindestens zweimal, indem man abwechselnd den Ofen heran- und wieder abrückt, und errechnet den Mittelwert. Die Wärmemenge q, die der Ofen an den Stab abgibt, bestimmt man als die Differenz der dem Ofen zugeführten Wärmemenge nach der Formel $q = 0{,}24(I_0 V_0 - I_1 V_1)$.

Dann wertet man die erhaltenen Ergebnisse aus. Man benutzt dazu die Eichkurve, die die Abhängigkeit des Galvanometerausschlages von der Temperaturdifferenz darstellt, um die Größen $(T_1 - T_0)$ und $(T - T_0)$ für alle Thermoelemente zu erhalten. Danach trägt man in ein rechtwinkliges Koordinatensystem auf der X-Achse den Abstand der Thermoelemente von

dem geheizten Stabende und auf der Y-Achse die Größen $\ln \frac{T_1 - T_0}{T - T_0}$ ein. Das ergibt eine Gerade, die folgender Gleichung gehorcht:

$$y = \ln \frac{T_1 - T_0}{T - T_0} = ax.$$

Legt man durch alle eingetragenen Punkte eine Gerade, so findet man ihren Anstieg a. Setzt man ihn in die Formel (4) ein, so erhält man die gesuchte Wärmeleitzahl des Stabes.

Sind die Größen q, a und l bekannt, so muß man den bei der Messung der Größe λ aufgetretenen Fehler bestimmen, der dadurch entsteht, daß der Stab nicht unendlich lang ist. Dazu benutzt man die Formel (7).

Aufgabe 24

Die Bestimmung der absoluten und relativen Feuchtigkeit der Luft und der Psychrometerkonstanten

Zubehör: 1. Hygrometer mit zwei Thermometern, 2. Handgebläse zum Durchblasen der Luft, 3. Psychrometer, 4. zwei Rahmen, 5. Gefäß mit Äthyläther.

Einführung. Die *absolute Feuchtigkeit* gibt an, wieviel Gramm Wasserdampf in einem Kubikmeter Luft enthalten sind.

Das Gewicht von 1 m³ trockener Luft ist bei 0° C und bei einem Druck von 760 mm Hg gleich 1293 Pond. Nach der Clapeyronschen Gleichung ist das Gewicht von 1 m³ Luft bei der Temperatur t° C und bei dem Druck p mm Hg gleich

$$\frac{1293}{1 + \alpha t} \cdot \frac{p}{760} \text{ Pond},$$

wobei α den Ausdehnungskoeffizienten der Luft darstellt. Die Dichte des Wasserdampfes ist im Verhältnis zur Dichte der Luft bei gleichem Druck gleich 0,622. Wenden wir auch auf Wasserdampf die Clapeyronsche Gleichung an (was nur für Dämpfe gilt, die vom Zustand der Sättigung weit entfernt sind), so erhalten wir für das Gewicht von 1 m³ Wasserdampf

$$q = \frac{1293 \cdot 0{,}622}{760} \cdot \frac{p}{1 + \alpha t} = 1{,}06 \frac{p}{1 + \alpha t}. \tag{1}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man die absolute Feuchtigkeit der Luft bestimmen, wenn der Dampfdruck des Wassers (Partialdruck) bekannt ist.

Aus der Formel (1) sieht man, daß sich die Größe der absoluten Feuchtigkeit q für kleine Werte von t zahlenmäßig wenig von der Größe des Dampfdruckes des Wassers unterscheidet. Deshalb ist es üblich, die absolute Feuchtigkeit als Dampfdruck des Wassers zu bezeichnen und sie in Millimetern Quecksilbersäule anzugeben.

Die relative Feuchtigkeit wird durch den Ausdruck bestimmt:

$$r = \frac{p}{P} \cdot 100\%,$$

wobei P der Druck des bei der Temperatur t gesättigten Dampfes ist. Die relative Feuchtigkeit charakterisiert also den Sättigungsgrad der Luft mit Wasserdampf.

Die Bestimmung der Feuchtigkeit der Luft geschieht gewöhnlich entweder durch die Bestimmung des Taupunktes oder psychrometrisch, wobei man für beide Methoden Tabellenwerte benutzt.

Übung 1

Die Bestimmung der Feuchtigkeit der Luft durch Bestimmung des Taupunktes

Beschreibung der Anordnung. Mit *Taupunkt* wird die Temperatur bezeichnet, bei der der in Luft enthaltene Wasserdampf seine Sättigung erreicht, d. h., bei der er anfängt, auf irgendeiner abgekühlten Oberfläche zu kondensieren. Bei dem in dieser Übung benutzten Hygrometer (Abb. 50), dem die Bestimmung des Taupunktes zugrunde liegt, wird eine metallische Fläche (A) so lange abgekühlt, bis sich auf ihr Wasserdampf niederschlägt. Wenn man die Temperatur abliest, bei der die ersten Spuren des Wasserdampfes erkennbar sind, ist es nicht schwer, die Feuchtigkeit der die Anordnung umgebenden Luft auszurechnen.

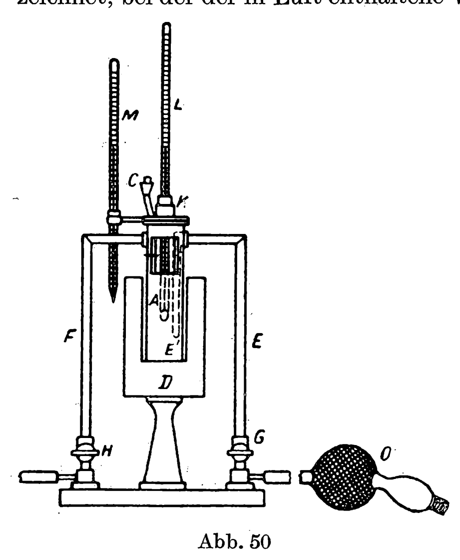


Abb. 50

Das Hygrometer besteht aus einem prismatischen Messingbehälter A, der durch den Trichter C mit Äther gefüllt wird. A wird mit einem Stopfen verschlossen. Die vordere Wand des Behälters (auf der das Niederschlagen des Taus beobachtet wird) ist poliert und vernickelt. Sie ist umgeben von einem Messingschirm D, der ebenfalls poliert und vernickelt ist. A und D sind durch einen schmalen Luftspalt getrennt. In den Behälter ragt das Thermometer L durch den Stopfen K. Außerdem sind mit dem Behälter zwei Rohre E und F verbunden, die die Hähne H und G besitzen. Das Rohr F beginnt an der Behälterwand, während E fast am Boden des Behälters A endet (E'). Das Rohr E wird mit dem Handgebläse O verbunden und Luft in die Anordnung geblasen. Durch das Rohr F und den Hahn H entweicht die mit Ätherdampf vermischte Luft entweder in einen Abzug oder einen Kondensationsapparat (ein Topf, der mit Wasser gefüllt ist). Außen ist in einiger Entfernung vom Behälter das Thermometer M angebracht.

Die Messung. In den Behälter A werden 30 cm³ Äther gegossen. Durch Drehen der Anordnung stellt man sie relativ zu den Augen des Beobachters so ein, daß der Schirm D und die Oberfläche A des Behälters gleich hell erscheinen. Die Hähne G und H werden so eingestellt, daß beim Hineinblasen der Luftstrom den Äther nicht aus dem Behälter reißt.

Man betätigt das Handgebläse O, reguliert mit dem Hahn G die Geschwindigkeit des Luftstromes (sie darf nicht groß sein) und läßt den Äther im Behälter A verdampfen. Dann sinkt die Temperatur im Behälter, und nach einiger Zeit erreicht sie den Punkt, bei dem sich an der Außenfläche A Wasserdampf aus der umgebenden Luft als Tau niederschlägt. Das bemerkt man am Beschlagen der Oberfläche A. Das Ziel der Beobachtungen ist, die Temperatur τ des Thermometers L, bei der das Niederschlagen des Taus beginnt (Taupunkt), möglichst genau festzustellen. Um das Beschlagen leichter feststellen zu können, ist um A der Schirm D aufgestellt, der einen Kontrast bildet, weil er die ganze Zeit glänzend bleibt. Man muß sich durch Vorversuche darin üben, das Auftreten des Taupunktes festzustellen, indem man die vernickelte Fläche geeignet beleuchtet.

Man schickt mit Hilfe des Handgebläses O durch die Anordnung einen dauernden Luftstrom, beobachtet gleichzeitig das Thermometer L und die Oberfläche A. Die Temperatur τ_1 beim Beschlagen notiert man. Danach verkleinert man den Luftstrom. Die Temperatur des Äthers erhöht sich, und der Beschlag fängt langsam an, von der Oberfläche A zu verschwinden. Man notiert ebenfalls die Temperatur τ_2, die am Anfang des Verschwindens des Taus herrscht, und vergrößert erneut den Luftstrom, um wieder das Erscheinen des Taus auf der Oberfläche A beobachten zu können.

Durch wiederholtes Variieren des Luftstromes muß man zu erreichen suchen, daß die abgelesenen Temperaturen des Erscheinens und Verschwindens des Taus sich um weniger als 0,1° C unterscheiden. Dann nimmt man

$$\tau = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}.$$

Gleichzeitig notiert man die Temperatur t der umgebenden Luft, die durch das Thermometer M angezeigt wird. Aus der Tabelle 18 entnimmt man für den Wert von τ die absolute Feuchtigkeit p und für den Wert von t den Sättigungsdruck P des Wasserdampfes. Kennt man diese Größen, so bestimmt man die relative Feuchtigkeit.

Übung 2

Die Bestimmung der Feuchtigkeit mit dem Psychrometer[1])

Beschreibung der Anordnung und Theorie der Methode. Das *Psychrometer* besteht aus zwei gleichen Thermometern A und B, die an einem Stativ befestigt sind (Abb. 51).

Die Quecksilberkugel des einen Thermometers ist mit Batist umwickelt, der zum Teil in ein unter dem Thermometer stehendes Glas mit destilliertem

[1]) Anm. d. Übers.: Aspirations-Psychrometer nach ASSMANN.

Wasser taucht. Der untere Teil des Statives trägt den Ventilator CC, der durch das Uhrwerk D bewegt wird. Der Schlüssel F dient zum Aufziehen des Uhrwerkes.

Durch Verdampfen des Wassers von dem Batist, der die Quecksilberkugel des sogenannten *feuchten Thermometers* umgibt, zeigt dieses eine tiefere Temperatur an als das benachbarte trockene Thermometer. Je weniger Feuchtigkeit die umgebende Luft enthält, desto intensiver ist die Verdampfung und damit um so tiefer die Anzeige des feuchten Thermometers. Die Ablesungen der beiden Thermometer ergeben eine Temperaturdifferenz, die die Feuchtigkeit der Luft charakterisiert.

Bei ständiger Verdampfung, wenn die Temperatur des feuchten Thermometers einen konstanten Wert angenommen hat, ist die von außen zugeführte Wärme Q_1 gleich der für die Verdampfung des Wassers von der Oberfläche des Thermometers verbrauchten Wärme Q_2. Dann ist nach dem NEWTONschen Abkühlungsgesetz

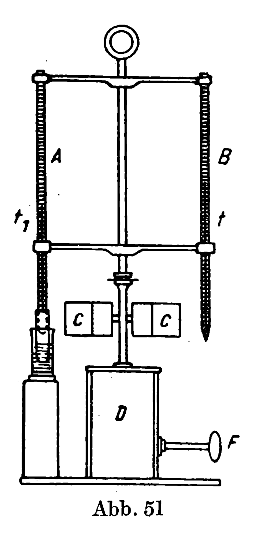


Abb. 51

$$Q_1 = a\,(t - t_1)\,S,$$

wobei $(t - t_1)$ die beobachtete Temperaturdifferenz, S die Oberfläche der Quecksilberkugel des feuchten Thermometers und a ein Proportionalitätsfaktor sind. Die verbrauchte Wärme kann in folgender Form geschrieben werden:

$$Q_2 = \frac{p_H - p}{H}\,kS\lambda,$$

wobei p_H der Sättigungsdruck des Dampfes bei der Temperatur der verdampfenden Flüssigkeit t_1, p der Druck des in der Luft vorhandenen Dampfes, H der Luftdruck, λ die Verdampfungswärme, S die Oberfläche der Quecksilberkugel des Thermometers und k ein Proportionalitätsfaktor bedeuten.

Setzen wir Q_1 und Q_2 gleich, so erhalten wir:

$$p = p_H - AH\,(t - t_1),$$

wobei

$$A = \frac{a}{k\lambda} = \frac{p_H - p}{H\,(t - t_1)}.$$

Diese Konstante A hängt in hohem Maße von der Geschwindigkeit der Luftbewegung ab und muß deshalb für jedes Psychrometer erst bestimmt werden. (Bei einigen Psychrometerkonstruktionen werden besondere Vorkehrungen getroffen, um die Geschwindigkeit des das feuchte Thermometer umfließenden Luftstromes konstant zu halten.)

In der vorliegenden Übung wird die Größe der Konstanten A bestimmt.

Mit Hilfe der Tabelle 19 wird die relative Feuchtigkeit bestimmt, wobei man Änderungen des Barometerstandes vernachlässigt.

Die Messung. Man zieht mit dem Schlüssel F das Uhrwerk auf und liest nach der Einstellung eines konstanten Verdampfungsprozesses die Temperaturen an beiden Thermometern ab (t und t_1). Die Größe p_H entnimmt man der Tabelle 18, p der ersten Übung, und den Barometerstand H liest man am Barometer ab. Man muß dabei beachten, daß der am Barometer abgelesene Druck noch auf die Temperatur von 0° C umgerechnet werden muß (siehe Aufgabe 18).

Aufgabe 25

Die Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents

Einleitung. Wärme kann in mechanische Arbeit und mechanische Arbeit wieder in Wärme umgewandelt werden. Wenn eine bestimmte Wärmemenge Q einer bestimmten Arbeit A äquivalent ist, d. h., wenn eine von beiden, z. B. A, aufgewendet werden muß, um die andere Q zu erzeugen, so besteht zwischen ihnen eine Beziehung

$$A = j \cdot Q, \tag{1}$$

wobei j einen konstanten Wert besitzt, der bekanntlich als *mechanisches Wärmeäquivalent* bezeichnet wird. Es zeigt an, wieviel Arbeitseinheiten aufgewendet werden müssen, um eine Wärmeeinheit zu erzeugen. Mit anderen Worten, das mechanische Wärmeäquivalent ist der Faktor, der es erlaubt, von mechanischen zu Wärmeeinheiten und umgekehrt überzugehen. Das mechanische Wärmeäquivalent wird bisweilen in Kilopondmetern pro Kilokalorie und bisweilen in Erg pro Kalorie angegeben.

Die Größe des mechanischen Wärmeäquivalents wird durch Versuche bestimmt. Man findet sie durch möglichst genaues Messen der Größen A und Q, d. h., man verwandelt im Versuch eine bestimmte Arbeit in Wärme. Man kennt verschiedene experimentelle Methoden zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents. Weiter unten ist die modernisierte JOULEsche Methode dargelegt.

Übung 1

Die Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents nach der JOULEschen Methode

Zubehör: 1. JOULEsche Anordnung, 2. zwei Thermometer, 3. Elektromotor, 4. Widerstand und Schalter.

Beschreibung des Versuches. Die Anordnung besteht aus einem vernickelten Messingkalorimeter C (Abb. 52), das in einer mit Filz umwickelten Hülle ZZ steckt. Die Hülle ist mit Wasser von Zimmertemperatur gefüllt und dient als Schutz gegen zufällige Temperaturschwankungen. Das Kalorimeter ist fest mit der Scheibe D verbunden und steht mit der Spitze E in einer konischen Vertiefung y. Oben wird das Kalorimeter durch ein hineingestecktes Rohr GB gehalten, das die Schaufeln PP trägt und seinerseits von

dem unbeweglichen Lager A gehalten wird. Am Ende G dieses Rohres sitzt die Scheibe F, die mit dem Motor durch einen endlosen Riemen verbunden ist. Ein auf der Zeichnung nicht sichtbares Zählwerk zählt die Umdrehungen der Scheibe F und damit der Schaufeln PP. Die Zahl der Umdrehungen wird mit dem Widerstand eingestellt, der ebenfalls nicht abgebildet ist.

Die sich drehenden Schaufeln PP versetzen die Flüssigkeit in Drehung. Dabei geht die mechanische Arbeit infolge der Zähigkeit der Flüssigkeit in Wärme über. Die Temperatur der Flüssigkeit wird erhöht. Infolge innerer Reibung fängt auch das Kalorimeter an, sich zu drehen. Dieser Drehung wirkt das Gewicht M entgegen, das an einem um die Scheibe D gewickelten

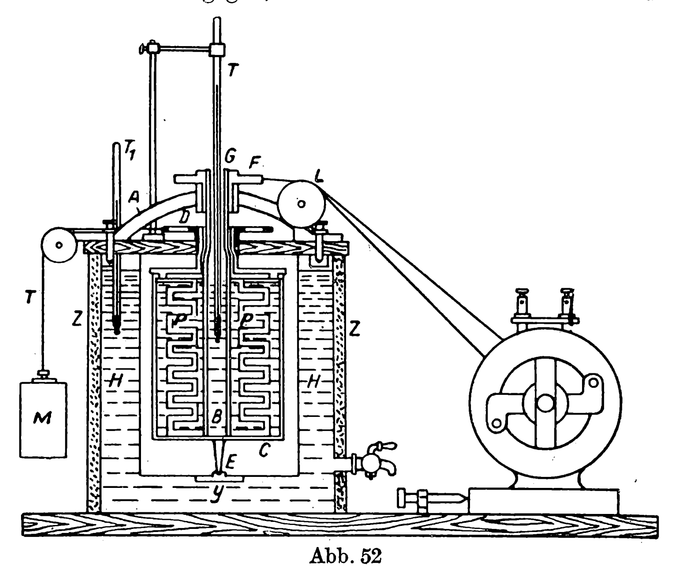


Abb. 52

Faden T hängt. Das Gewicht erzeugt ein Moment, das dem von dem Riemen des Motors erzeugten Moment entgegengerichtet ist. Ändert man mit dem Widerstand die Umdrehungsgeschwindigkeit des Motors und damit die der Schaufeln, so kann man beide Momente der Größe nach angleichen. Dann hört das Kalorimeter auf, sich zu drehen, die Belastung M hängt unbeweglich am Faden, und die mechanische Arbeit wird vollständig in Wärme verwandelt.

Die Messung. Zuerst wägt man das Kalorimeter. Dann gießt man in die Hülle HH Wasser von Zimmertemperatur.

Das Kalorimeter C füllt man mit 1200 g Wasser von einer Temperatur, die um 1 bis 2° C tiefer liegt als die der Hülle.

Die Anordnung wird zusammengesetzt, wie es die Abb. 52 zeigt, die Lager der beweglichen Teile werden geschmiert und der Riemen FL um die Antriebsscheibe des Motors gelegt (dabei muß der Schalter offen sein).

Die Thermometer T und T_1 werden auf ihren Platz gestellt.

An den Faden, der über eine Rolle geführt ist, wird die Belastung M gehängt. Der Rheostat wird auf den größten Widerstand eingestellt.

Dann setzt man mit Hilfe des Schalters den Motor in Bewegung, nimmt allmählich den Widerstand heraus, bis das Gewicht auf 2 bis 5 cm angehoben ist und sich in dieser Höhe hält. Jedesmal nach 400 bis 1000 Umdrehungen schreibt man die Temperatur T und T_1 auf.

Die Ausrechnung. Bekanntlich kann man bei einer Drehbewegung die Arbeit folgendermaßen ausdrücken:

$$A = D\varphi,$$

wobei D das die Arbeit erzeugende Moment und φ der Drehwinkel bedeuten. Deshalb erhält man für die mechanische Arbeit A, die N Umdrehungen der Schaufeln entspricht,

$$A = 2\pi NRF, \tag{2}$$

wobei R der Radius der Scheibe D und F das Gewicht der Belastung M bedeuten.

Andererseits ist die im Kalorimeter abgegebene Wärmemenge

$$Q = (P + w)\,\Delta t, \tag{3}$$

wobei P das Gewicht des Wassers im Kalorimeter, Δt die Temperaturerhöhung und w der Wasserwert des Kalorimeters bedeuten. Letzterer ergibt sich zu

$$w = 0{,}093\,G.$$

Hierbei ist G das Gewicht des Kalorimeters mit dem Rührer und 0,093 die spezifische Wärme des Messings.

Aus der Formel (2) und (3) finden wir für das gesuchte mechanische Wärmeäquivalent j:

$$j = \frac{A}{Q} = \frac{2\pi NRF}{(P + w)\,\Delta t}. \tag{4}$$

Die Größe Δt, die die Temperaturerhöhung des Kalorimeters angibt, wird aus dem Meßprotokoll entnommen, das für eine Reihe von aufeinanderfolgenden Zählwerkablesungen die zugehörigen Temperaturen der Thermometer T und T_1 enthält.

Aufgabe 26

Die Erzeugung und Messung von Hochvakuum

Zubehör: 1. Vakuumapparatur mit Quecksilberdiffusionspumpe, Kompressionsmanometer und U-Rohr-Manometer, 2. Vorvakuum-Rotationspumpe, 3. zweites Kompressionsmanometer, 4. Meßzylinder, 5. Reagenzglas mit Quecksilber.

Beschreibung der Anordnung. Die Vakuumpumpen. Die zum Evakuieren verwendeten Pumpen werden in zwei Gruppen eingeteilt:

1. Pumpen, die bei Atmosphärendruck zu arbeiten beginnen und das Gas direkt in die Atmosphäre befördern,

2. Pumpen, die zum Arbeiten ein Vorvakuum benötigen und das Gas in dieses Vorvakuum befördern.

Die erste Gruppe kann ein Vakuum von 10^{-4} mm Quecksilbersäule und die zweite Gruppe ein Vakuum von 10^{-7} mm Quecksilbersäule und besser erzeugen. Bei den Hochvakuumapparaturen werden beide Arten von Pumpen hintereinandergeschaltet. Die *Vorvakuumpumpen* (erste Gruppe) erzeugen das für das Arbeiten der *Hochvakuumpumpen* (zweite Gruppe) notwendige Vorvakuum.

Die rotierende Pumpe zur Erzeugung eines Vorvakuums. Dieser Typ von Vorvakuumpumpen ist eine technische Weiterentwicklung des bei der gewöhnlichen Kolbenpumpe benutzten Prinzips. Der Zylinder der Kolbenpumpe wird periodisch durch die Bewegung des Kolbens, der direkt an den Wänden des Zylinders anliegt, vom Gas befreit. In der Rotationspumpe ist die fortschreitende Bewegung durch die rotierende Bewegung eines Kolbens ersetzt.

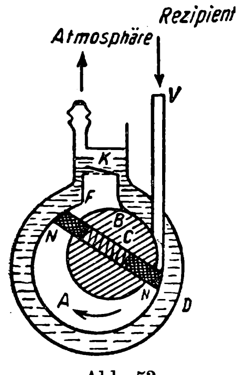


Abb. 53

Die Kammer A (Abb. 53), in der auf einer exzentrisch angeordneten Achse ein Kolben B mit dem Schlitz C sitzt, steckt vollständig in dem Gehäuse D. In den Schlitz C des Kolbens B sind zwei eingeschliffene Riegel NN eingesetzt, die durch eine Feder an die Wände der Kammer gedrückt werden. Die Kammer A besitzt einen Saugstutzen V, der an den Rezipienten angeschlossen wird, und eine breite Öffnung F, die mit einer eingeschliffenen als Ventil dienenden Platte K bedeckt ist. Der Raum über der Platte zwischen der Kammer A und dem Gehäuse D ist mit Öl gefüllt, um die Unvollkommenheiten der Schliffe abzudichten. Bei der Rotation des Kolbens B in der durch den Pfeil bezeichneten Richtung wird die Luft im Raum zwischen dem Kolben B, der Kammer A und den Riegeln NN zusammengedrückt und durch das Ventil K herausgestoßen. Gleichzeitig wird neue Luft aus dem Rezipienten durch das Rohr V in den oben beschriebenen Raum gesaugt, und der Arbeitszyklus der Pumpe beginnt von neuem.

Wenn beim Anhalten der Pumpe die Öffnung des Stutzens V nicht mit der Atmosphäre verbunden wird, kann das Öl aus dem Gehäuse (wegen der Unvollkommenheit des Ventilschliffes) durch den Stutzen V in die Vakuumapparatur gelangen. Deshalb muß nach Abstellen der Pumpe der Stutzen V mit der Atmosphäre verbunden werden. Praktisch wird dies durch einen besonderen Hahn an der Vakuumpumpe verwirklicht (siehe weiter unten, Übung 2).

Die Hochvakuumdiffusionspumpe. Der Glaskolben R (Abb. 54) ist zu zwei Dritteln seines Volumens mit Quecksilber gefüllt. Unter ihm befindet sich ein elektrischer Ofen W oder eine Bunsenflamme. Das obere Ansatzrohr des Kolbens endet mit einer Düse a. Das breite Rohr B, das die Düse umgibt, wird durch den Ansatz b mit dem Rezipienten verbunden. Durch das Ansatzrohr d wird das ausgepumpte Gas zur Vorvakuumpumpe geleitet.

Das Außenrohr K umgibt das Rohr B und ist nirgends mit dem Innenraum der Pumpe verbunden. Durch dieses Rohr (Zuleitungen *1* und *2*) fließt das während des Betriebes zur Kühlung der Pumpe dienende Wasser.

Die Erwärmung des Kolbens R führt zur Bildung von Quecksilberdämpfen[1]). Diese Dämpfe strömen aus der Düse a in das Rohr B und reißen in ihrem Strom die Moleküle des abzupumpenden Gases mit, die durch den Ansatz b zufließen. Danach kondensieren die Quecksilberdämpfe an den Wänden des Rohres B. Von hier wird das Gas durch die Vorvakuumpumpe abgesaugt. Zurück kann das Gas nicht gelangen, weil seine Moleküle bei der Bewegung gegen den dichten Strom der Quecksilbermoleküle eine unzählige Zahl von Zusammenstößen erleiden. Hieraus geht unmittelbar hervor, daß für den Arbeitsbeginn einer solchen Pumpe dieser dynamische Druck größer sein muß als der Druck im Vorvakuum.

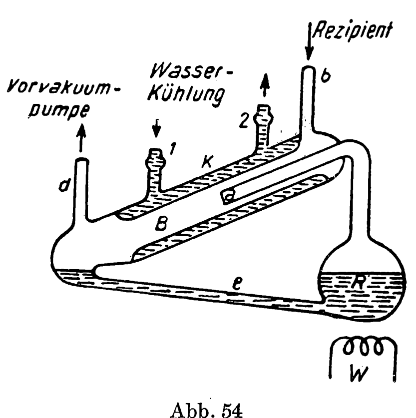


Abb. 54

Gewöhnlich fangen die Diffusionspumpen bei einem Vorvakuum von 0,1 mm Hg (Torr) an zu arbeiten. Theoretisch können diese Pumpen das Gas bis zu beliebig kleinen Drucken auspumpen. Praktisch ist das zu erhaltende Vakuum aber durch das Gleichgewicht begrenzt, das von der Leistungsfähigkeit der Pumpe und der Gasabgabe der Wände ins Innere der Apparatur gebildet wird.

Unter normalen Bedingungen ist es unschwer, ein Vakuum von 10^{-6} bis 10^{-7} Torr zu erhalten. Doch wird dabei natürlich im ganzen evakuierten Raum der Sättigungsdruck des Quecksilberdampfes für die entsprechende Temperatur herrschen. Um hohes Vakuum zu erreichen, muß man Vorkehrungen treffen, den Quecksilberdampfdruck herabzusetzen. Bei Zimmertemperatur beträgt der Sättigungsdruck des Quecksilberdampfes $1{,}3 \cdot 10^{-3}$ Torr. Um von dem Rezipienten die Quecksilberdämpfe fernzuhalten (sie rühren von der Pumpe und den Manometern her), schaltet man zwischen den Rezipienten und die übrige Apparatur besondere Fallen für Quecksilberdämpfe. Gewöhnlich dient als eine solche Falle entweder ein U-förmiges vertikales oder ein zu einer Schlange gebogenes Glasrohr, das zum Rezipienten führt und in ein Dewargefäß mit flüssiger Luft getaucht wird. Die Quecksilberdämpfe kondensieren an den Wänden der Kühlfalle und werden vom Rezipienten ferngehalten. Ist keine flüssige Luft vorhanden, so bringt man in dasselbe Verbindungsrohr einen Tampon aus dünnem Golddraht. Auf der Oberfläche des Goldes findet eine intensive Bildung von Quecksilberamalgam

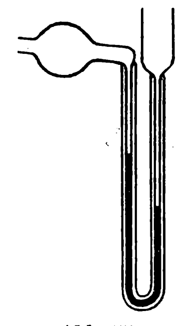
---

[1]) Um die Wärme besser zu isolieren und um die Glaswände der Pumpe vor der unmittelbaren Einwirkung der Bunsenflamme oder vor dem Berühren mit der geheizten Spirale zu schützen, wird der Kolben bis zur Düse mit Asbest vollständig umgeben.

statt, und es gelangen praktisch keine Dämpfe durch den Tampon hindurch, während er das Auspumpen der Luft wenig behindert.

Die beschriebene Quecksilberdiffusionspumpe hat eine Saugleistung von einigen Litern pro Minute bei mittlerem Vakuum.

Die Unbequemlichkeit beim Arbeiten mit Quecksilberpumpen, die eine Wasserkühlung benötigen und beim Vergießen von Quecksilber auf den Boden oder den Tisch den ganzen Raum verseuchen, führte in den letzten Jahren zur intensiven technischen Entwicklung und Herstellung von Öldiffusionspumpen. Das Prinzip dieser Pumpen ist das gleiche wie das der Quecksilberpumpen, jedoch dient als Pumpenflüssigkeit ein spezielles Vakuumöl und nicht Quecksilber. Ölpumpen für kleine Leistungen (bis zu 7 Liter/min) werden aus Glas und für größere Leistungen (bis zu 1000 Liter/min) aus Metall gefertigt. Gewöhnlich sind in einer solchen Pumpe zwei oder sogar drei hintereinanderliegende Düsen kombiniert, die aufeinanderfolgende Stufen der Pumpe charakterisieren. Pumpen kleiner Leistung haben Luftkühlung, und Pumpen großer Leistung werden mit fließendem Wasser gekühlt.


Abb. 55

Die Hauptschwierigkeit beim Übergang zu Öldiffusionspumpen bestand in der Auswahl einer solchen Fraktion des Erdöles, die bei Zimmertemperatur einen niedrigen Dampfdruck besitzt und nicht mit dem Sauerstoff der Luft beim Sieden reagiert. In neuerer Zeit ist diese technische Aufgabe gelöst worden, und man hat Methoden zur Gewinnung solcher Öle gefunden, deren Dampfdruck bei Zimmertemperatur in der Größenordnung von 10^{-4} bis 10^{-5} Torr liegt.

In der vorliegenden Aufgabe wird eine Quecksilberdiffusionspumpe benutzt, die die einfachste und übersichtlichste Konstruktion aufweist.

Das Kompressionsmanometer. Die Messung niedriger Gasdrucke kann mit dem einfachen U-Rohr-Manometer (Abb. 55) nicht genau genug durchgeführt werden. Man kann die Höhendifferenz des Quecksilbers in den Manometerrohren nicht genauer als auf $5 \cdot 10^{-2}$ mm messen. Deshalb benutzt man für sehr kleine Drucke das Kompressionsmanometer[1]), dem das Boyle-Mariottesche Gesetz zugrunde liegt. In diesem Manometer wird eine bestimmte Menge des Restgases künstlich zusammengedrückt. Danach kann man den erhaltenen wesentlich höheren Druck leicht durch Ablesen der Höhendifferenz des Quecksilbers in kommunizierenden Röhren messen[2]).

Die Glaskugel B (Abb. 56) endet oben mit einer abgeschmolzenen Kapillare K_1. Das Rohr a und die ihm parallele Kapillare K_2 (die Durchmesser der

[1]) Anm. d. Übers: McLeod-Manometer.

[2]) Die Hauptschwierigkeit liegt in der richtigen Anvisierung des Quecksilbermeniskus mit dem Kathetometer (siehe Aufgabe 27). Die Vervollkommnung der Beleuchtungsmethode des Meniskus führt nicht weiter, obgleich eine richtige Beleuchtung des Meniskus für einigermaßen richtige Ablesungen zweifellos notwendig ist. Neuerdings sind Methoden ausgearbeitet worden, die ein Röntgenbild der Quecksilberhöhen in den Manometerrohren zur Ausmessung benutzen. Die Röntgenstrahlen durchdringen das Glas der Manometerrohre und lassen eine genaue Silhouette des Meniskus ohne störende Lichtreflexe entstehen. Auf diese Weise kann man auf der Aufnahme die Höhendifferenz mit einer Genauigkeit bis zu einigen Mikron ausmessen.

Kapillaren K_1 und K_2 sind gleich) verbinden das Manometer mit dem Gefäß, dessen Druck gemessen werden soll. Das Rohr b und der biegsame Gummischlauch C verbinden das Manometer mit dem verschiebbaren Glasgefäß Q, welches mit Quecksilber gefüllt ist. Das Quecksilber steht im Rohr b höher als im Gefäß Q entsprechend der Druckdifferenz innerhalb und außerhalb der Apparatur. Da die Vorvakuumpumpe schon ein Vakuum von 10^{-2} Torr erzeugt, entspricht diese Höhendifferenz praktisch dem Atmosphärendruck, d. h., das Rohr b stellt ein gewöhnliches Quecksilberbarometer dar[1]).

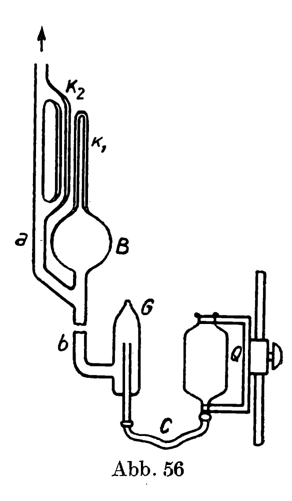


Abb. 56

Zur Messung hebt man das Gefäß Q, und das Quecksilber steigt in Rohr b so weit, daß es das Rohr a ausfüllt und die Kugel des Manometers mit dem in ihm befindlichen Gas von dem Gefäß trennt, dessen Druck gemessen werden soll. Hebt man das Quecksilber weiter an, so drückt man das in der Kugel eingeschlossene Gasvolumen bis auf einen kleinen Raum in der Kapillare K_1 zusammen. Dabei bringt man das Quecksilber in der offenen Kapillare K_2 in gleiche Höhe mit der inneren Glaskuppe der Kapillare K_1. Das in dieser Kapillare zusammengedrückte Gas bewirkt eine Höhendifferenz (h) des Quecksilbers in beiden Kapillaren (Abb. 57), die gleich dem Druck des im Manometer befindlichen Gases ist[2]). Der Druck des nicht kompensierten Gases über dem Quecksilber der Kapillare K_2 kann gegen die Größe h vernachlässigt werden.

An dieser Stelle muß bemerkt werden, daß es sich in der Vakuumtechnik eingebürgert hat, den gemessenen Druck unmittelbar in mm Hg, d. h. in dimensionslosen Einheiten, auszudrücken. Diese Übereinkunft wurde auch beim Einsetzen in Formeln getroffen, die unter bestimmter Voraussetzung über die Dimensionen der vorkommenden Größen abgeleitet worden sind. Eine solche dimensionslose Größe ist auch der weiter unten berechnete Druck p. Im übrigen ist es natürlich leicht, dieser Größe ihre wahre Dimension $\left(\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}\right)$ zurückzugeben und das Ergebnis in Bar, technischen Atmosphären oder irgendeiner anderen Einheit anzugeben.

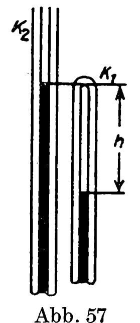


Abb. 57

Bezeichnen wir mit p den Druck im Manometer in dem Moment der Abteilung vom Rezipienten (er ist offensichtlich gleich dem wahren Druck im Rezipienten), mit v das Volumen

[1]) Um die Meßanordnung vor aufsteigenden Luftbläschen zu schützen, die durch die Bewegung des Quecksilbers von den Wänden losgelöst werden, ist eine „Falle“ G angebracht.

[2]) Man kann natürlich die Höhen des Quecksilbers in der Kapillare K_1 und dem breiten Rohr a vergleichen, doch muß man dann eine durch die Kapillardepression des Quecksilbers hervorgerufene Korrektur anbringen. Das breite Rohr wird für einen schnellen Ausgleich des Druckes im Manometer und im Rezipienten benötigt.

der Kugel des Manometers und mit s den Querschnitt der Kapillare, so können wir auf Grund des BOYLEschen Gesetzes schreiben:

$$vp = (sh)h = sh^2,$$

woraus folgt

$$p = \frac{s}{v} h^2 = \alpha h^2.$$

Kennen wir also die Manometerkonstante $\alpha = \frac{s}{v}$ und messen wir h, so können wir den gesuchten Druck p finden.

Je kleiner also die Größe α, desto größer ist die Höhendifferenz h bei vorgegebenem Druck, und desto genauer läßt sich der Druck p messen. Durch entsprechende Auswahl der Ausmaße der Kapillare und der Kugel kann man das Anwendungsgebiet dieses Manometers festlegen. Jedoch ist es in der Praxis unbequem, die Kugel größer als 250 cm³ zu wählen, da dabei eine Menge Quecksilber benötigt wird und es beim Meßvorgang zu lange dauert, bis die Kugel sich mit Quecksilber angefüllt hat. Das praktische Anwendungsgebiet der Kompressionsmanometer liegt zwischen 10^{-1} und 10^{-5} Torr.

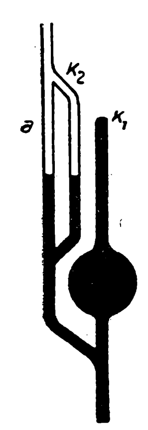


Abb. 58

Die obere Grenze ist dadurch gegeben, daß mit zunehmendem Vakuum die Größe h abnimmt und endlich das Luftbläschen in der Kapillare so klein wird, daß es mit dem Auge nicht mehr zu erkennen ist. Wenn man unter diesen Bedingungen das Quecksilber die Kapillare K_1 vollständig ausfüllen läßt und dann das Gefäß Q wieder langsam senkt, kann man folgende Erscheinung beobachten: Das Quecksilber senkt sich im Rohr a und der Kapillare K_2 wie gewöhnlich, doch hält es sich in der abgeschmolzenen Kapillare unverändert und füllt sie weiterhin vollständig aus. Man kann dabei das Quecksilber im Rohr a um einige Millimeter unterhalb des Endes der Kapillare K_1 senken, bis es endlich auch in dieser Kapillare heruntergeht (Abb. 58). Diese Erscheinung des *Klebens* beobachtet man bei einem Druck von 10^{-6} bis 10^{-7} Torr (Klebevakuum) und erklärt sie dadurch, daß bei einem solchen Druck des Gases das Quecksilber so nahe an das Glas kommt, daß wechselseitige Anziehungskräfte zwischen den Molekülen des Glases und des Quecksilbers auftreten. In diesem Fall kann das Kompressionsmanometer nur die Größenordnung des erreichten Vakuums anzeigen.

Übung 1

Die Bestimmung der Konstanten des Kompressionsmanometers

In die saubere, gut getrocknete Kugel des Manometers werden einige Tropfen Quecksilber gegossen. Ein Gummischlauch mit einem Handgebläse (wie bei einem Zerstäuber) wird auf das noch nicht abgeschmolzene Ende der Kapillare K_1 gesteckt (Abb. 56) und durch leichten Druck auf das Gebläse eine kleine Quecksilbersäule in die Kapillare gezogen. Ihre Länge wird an verschiedenen Stellen der Kapillare sehr genau gemessen. Dann gießt man dieses Quecksilber auf ein Uhrglas, wägt es, errechnet sein Volumen und

findet endlich aus der mittleren Länge der Säule den Querschnitt der Kapillare. Danach füllt man zur Bestimmung des Volumens die Kugel bis zur Öffnung des Rohres a (Abb. 56) mit Wasser, gießt dann das Wasser in einen Meßzylinder und bestimmt sein Volumen. Aus diesen Größen kann man unschwer die Konstante des Manometers bestimmen, indem man die Formel

$$\alpha = \frac{s}{v}$$

benutzt.

Man muß an dieser Stelle bemerken, daß sich neuerdings die Anwendung von Hochvakuummanometern vermehrt hat, die auf ganz anderen Prinzipien aufbauen. So werden im Druckbereich von 1 bis 10^{-3} Torr *Wärmeleitungsmanometer* benutzt, die auf der Messung der Thermospannung eines Thermoelementes, das in den Rezipienten gebracht wird, beruhen. Das Thermoelement wird mit einem streng konstanten Gleichstrom erwärmt, und seine Temperatur stellt sich entsprechend der zugeführten Energie und den Wärmeverlusten ein. Diese Verluste sind bedingt durch die Wärmeabgabe an die umgebende Luft und hängen natürlich von dem herrschenden Druck ab. Deshalb kann die aus der Messung der Thermospannung bestimmte Temperatur des Thermoelementes (nach entsprechender Eichung mit Quecksilbermanometern) als Maß für den Druck in der Vakuumapparatur dienen.

Im Druckbereich von 10^{-3} bis 10^{-6} Torr wird neuerdings mit Erfolg das *Ionisationsmanometer* verwendet. Das Prinzip der Wirkungsweise dieses Manometers ist folgendes: Das Vakuum wird mit einer Elektronenröhre speziellen Typs verbunden. Der Elektronenstrom dieser Röhre ionisiert die Gasmoleküle, und die gebildeten Ionen werden auf einer speziellen Vorrichtung aufgefangen. Die Größe des Ionenstromes ist bestimmt durch die von dem Kathodenstrahl ionisierten Gasmoleküle, d. h. durch den Restgasdruck in der Röhre und im Nachbarrezipienten. Der Ionenstrom ist sehr klein und wird nach einer Verstärkung gemessen. Eine entsprechende Eichung dieses elektrischen Systems mit einem Quecksilbermanometer gestattet es, den Druck aus der Größe des Ionenstromes zu bestimmen. Ein solches System ist wesentlich komplizierter als ein Wärmeleitungsmanometer oder gar ein Quecksilbermanometer.

Der Vorteil der beschriebenen Manometer im Vergleich zum Quecksilbermanometer liegt darin, daß sie, zusammen mit Öldiffusionspumpen, die Anwendung des Quecksilbers, das für die damit Arbeitenden sehr schädlich ist, vollständig unnötig machen. Außerdem gestatten diese Manometer eine *dauernde* Beobachtung des Druckes in der Apparatur und vermeiden das periodische Anheben des Quecksilbers in dem Kompressionsmanometer. Deshalb kann man mit ihnen eine zusammenhängende Kurve des Druckes im Rezipienten automatisch aufnehmen.

In anderen Aufgaben des allgemeinen und speziellen Praktikums haben die Studenten Gelegenheit, sich auch mit der Wirkungsweise dieser Manometer vertraut zu machen.

Übung 2

Die Erzeugung eines Hochvakuums und die Messung des Volumens der Vakuumapparatur

Die Vorvakuumpumpe *V* (Abb. 59) ist von dem übrigen Teil der Vakuumapparatur durch den Hahn *2* getrennt. Auf dem Weg zu diesem Hahn ist ein kleiner Hahn *1* angebracht, durch den man die Pumpe mit der Atmosphäre verbinden kann. Die Verbindung mit der Atmosphäre ist zum Ausgleich des Druckes zwischen dem Saug- und dem Druckstutzen der Pumpe notwendig. Die Erweiterung des ersten Verbindungsrohres ist zum Auffangen des Öls für den Fall des Ausstoßens aus der Pumpe angebracht (zur Beschreibung der Vorvakuumpumpe siehe Aufgabe 26). Nach Bedarf kann auch die gesamte Vakuumapparatur durch den Hahn *2* mit der Atmosphäre verbunden werden. Das Gefäß *I* dient als Reservoir für das aus der Apparatur durch die Diffusionspumpe ausgepumpte Gas, wenn nach Erzeugung des Vorvakuums die Vorvakuumpumpe abgeschaltet und der Hahn *2* geschlossen wird. Das Gefäß *II* ist der Rezipient. Mit ihm sind dauernd das Kompressionsmanometer *M* und das U-Rohr-Manometer *U* verbunden. Der Hahn *3* gestattet es, an die Apparatur das Gefäß *III* mit einem vorher genau bestimmten Volumen anzuschließen.

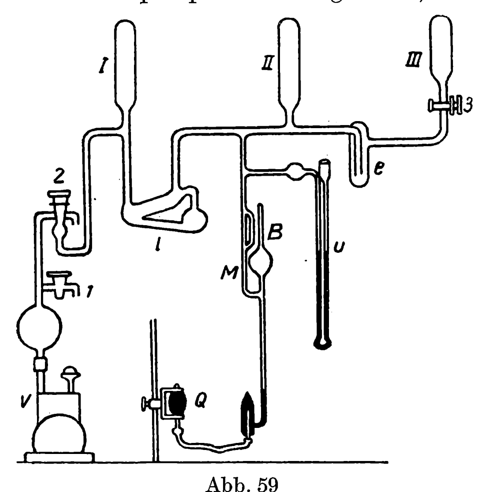


Abb. 59

1. Durch Drehen des Hahnes *3* wird das Gefäß *III* von der unter Atmosphärendruck stehenden Apparatur getrennt und die Vorvakuumpumpe angelassen.

2. Man pumpt die übrige Apparatur so lange aus, bis die Anzeige des Kompressionsmanometers konstant bleibt und mißt den durch die Vorvakuumpumpe erhaltenen Grenzdruck. Dabei wird die Pumpe nicht abgestellt. Zugleich liest man an dem U-Rohr-Manometer den barometrischen Druck *H* ab, der gleich der Höhendifferenz des Quecksilbers in beiden Schenkeln des Manometers ist. Dabei kann der Druck in der Apparatur in diesem Moment (10^{-3} Torr) vernachlässigt werden.

3. Man öffnet den Wasserhahn zur Kühlung der Diffusionspumpe und setzt sie durch langsames Vergrößern der Flamme des Bunsenbrenners oder durch Einschalten des elektrischen Ofens in Tätigkeit. Man pumpt die Apparatur bis zum Klebevakuum aus.

4. Durch Drehen des Hahnes *2* wird die Apparatur von der Vorvakuumpumpe getrennt. Die Pumpe wird abgeschaltet und sofort mit der Atmo-

sphäre durch den Hahn *1* verbunden. Man löscht die Flamme oder schaltet den Strom unter der Diffusionspumpe aus, doch läßt man die Wasserkühlung noch etwa 10 Minuten laufen.

5. Nach 10 Minuten öffnet man langsam den Hahn *3* und läßt die im Gefäß *III* eingeschlossene Luft in die Apparatur strömen. Man mißt den Druck p in der Apparatur mit dem U-Rohr-Manometer. Er ist $p = H - h$, wobei H der vorher gemessene barometrische Druck und h die Höhendifferenz des Quecksilbers in den Schenkeln des Manometers bedeuten. Den Druck in der Apparatur im Moment des Einlassens der Luft können wir vernachlässigen (er beträgt 10^{-2} bis 10^{-3} Torr).

Die 10-Minuten-Pause zwischen dem Abschalten der Diffusionspumpe und dem Einlassen der Luft aus dem Behälter *III* ist notwendig, um die Quecksilberdämpfe abkühlen zu lassen. Sonst bewirkt die eingelassene Luft eine Oxydation des Quecksilbers in der Pumpe.

Das Kühlen der Diffusionspumpe vor dem Einschalten und nach dem Abschalten ihrer Heizung ist aus zwei Gründen notwendig: erstens, damit die heißen Quecksilberdämpfe sich nicht in der ganzen Apparatur ausbreiten und zweitens, damit die Schmelzstellen der Pumpe, die wesentlich empfindlicher gegen jegliche Temperaturerhöhung sind, vor Erwärmung geschützt werden.

Wir führen die Bezeichnungen ein: v_{III} — Volumen des Gefäßes *III* ($v_{III} = 750$ cm^3), H — barometrischer Druck und damit Druck im Gefäß *III* vor seiner Verbindung mit der Apparatur, v — Volumen der Apparatur und p — Druck in der Apparatur nach dem Einlassen der Luft aus dem Gefäß *III*.

Auf Grund des Boyleschen Gesetzes können wir schreiben:

$$v_{III} \cdot H = vp,$$

woraus für das gesuchte Volumen der Apparatur folgt:

$$v = v_{III} \cdot \frac{H}{p}.$$

Spezialliteratur

1. W. Espe und M. Knoll: „Werkstoffkunde der Hochvakuumtechnik". Verlag J. Springer, Berlin 1936.
2. R. Jaeckel: „Kleinste Drucke, ihre Messung und Erzeugung". Verlag J. Springer, Berlin 1950.
3. H. Laporte: „Hochvakuum". Verlag W. Knapp, Halle (Saale) 1951.
4. G. Chr. Mönch: „Hochvakuumtechnik". Verlag R. A. Lang, Pößneck 1950.

Aufgabe 27

Die Bestimmung der Oberflächenspannung mit der Kapillarsteighöhenmethode

Zubehör: 1. Kathetometer, 2. Kapillaren verschiedenen Durchmessers, 3. Halterung für die Kapillaren, 4. Glas für Flüssigkeiten, 5. Holzunterlage, 6. Skala mit Millimeterteilung, 7. Lot, 8. Gefäße mit Quecksilber, mit Kaliumbichromatlösung und mit Alkohol, 9. Uhrglas.

Einleitung. Wenn wir in Gedanken die Oberfläche einer Flüssigkeit entlang irgendeiner willkürlichen Linie zerschneiden, dann ist die Kohäsionskraft zwischen beiden Teilen, die durch die wechselseitigen Anziehungskräfte der Moleküle auf beiden Seiten hervorgerufen wird, um so größer, je länger diese Linie ist. Mit anderen Worten, die an der Oberfläche angreifende Kraft ist der Länge direkt proportional:

$$f = \alpha l. \tag{1}$$

Der Proportionalitätsfaktor α, der die Kraft in der Oberfläche auf die Längeneinheit darstellt, wird die *Oberflächenspannung* genannt. Sie wird in dyn/cm oder in mp/mm angegeben. Wenn bei Berührung mit festen Körpern die Oberfläche der Flüssigkeit eine gewisse Krümmung erfährt, so ruft die Oberflächenspannung gewisse zusätzliche Erscheinungen an dieser Oberfläche hervor. Die Kraft erzeugt innerhalb jeder gekrümmten Oberfläche einen zusätzlichen, eben durch die Krümmung der Oberfläche hervorgerufenen Druck.

Bei einer kugelförmigen Oberfläche können wir diesen zusätzlichen Druck folgendermaßen darstellen:

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{R}, \tag{2}$$

wobei R der Krümmungsradius der Oberfläche bedeutet. Durch diesen zusätzlichen Druck, d. h. den durch die Krümmung des Meniskus bedingten Druck, wird die Erscheinung der Steigung oder der Depression der Flüssigkeit in Kapillaren hervorgerufen. Die Flüssigkeit steigt (wird herabgedrückt) in der Kapillare, bis der hydrostatische Druck der Flüssigkeitssäule dem durch die Krümmung der Oberfläche hervorgerufenen Druck das Gleichgewicht hält.

Wenn man annimmt, daß die Flüssigkeit die Oberfläche der Kapillare vollständig benetzt, so fällt der Krümmungsradius R mit dem inneren Radius der Kapillare r zusammen, so daß

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{r} = \varrho g h, \tag{3}$$

wobei ϱ die Dichte der Flüssigkeit, h ihre Steighöhe und g die Schwerebeschleunigung bedeuten. Kennt man daher den Radius der Kapillare, die Dichte der Flüssigkeit und ihre Steighöhe, so kann man nach der Formel (3) die Oberflächenspannung α bestimmen.

Die Beschreibung und Aufstellung des Kathetometers. Kathetometer dienen zur Messung vertikaler Abstände zwischen Punkten, die im allgemeinen nicht auf einer Vertikalen zu liegen brauchen. Je nach ihrer Bestimmung haben die

Kathetometer verschiedene Ausmaße und Konstruktionen. Jedoch besteht jedes Kathetometer im wesentlichen aus folgenden Teilen:

1. einer massiven Säule *AB* (Abb. 60), die auf einem mit drei Fußschrauben *1, 2, 3* versehenen Stativ steht und längs ihrer Achse drehbar ist;

2. einem Schlitten *C*, der sich längs der Säule verschieben läßt und in jeder Stellung mit Hilfe der Schraube *d* festgestellt werden kann; die Stellung des Schlittens wird mit Hilfe des Nonius *N* auf der Skala der Säule abgelesen;

3. einem Fernrohr *T*, das an einer besonderen Halterung *aa* befestigt ist, die ihrerseits wieder durch die senkrecht zur Säule verlaufende Achse *O* mit dem Schlitten verbunden ist; das Fernrohr kann um kleine Winkelbeträge mit Hilfe der Mikrometerschraube um die Achse gedreht werden;

4. einer zylindrischen Libelle *u*, die mit dem Fernrohr so verbunden ist, daß der Winkel zwischen ihren Längsachsen durch die Schraube *e* verändert werden kann.

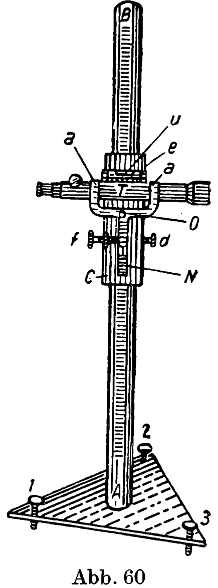


Abb. 60

Bevor man eine Messung mit dem Kathetometer ausführen will, muß es so eingestellt werden, daß die Achse der Libelle parallel zu der Achse des Fernrohres, die Achse des Fernrohres senkrecht zur Säule des Kathetometers, die Säulenachse streng vertikal steht und die optische Achse des Fernrohres mit seiner geometrischen zusammenfällt. Die Erfüllung der ersten und der letzten Forderung geschieht unabhängig voneinander, während die zweite und dritte gemeinsam erfüllt werden müssen.

Die Einstellung der Libellenachse parallel zur Fernrohrachse. Hierbei müssen wir zwei Fälle unterscheiden, die von der Konstruktion der Anordnung abhängen: Erstens, die Libelle läßt sich von dem Fernrohr nicht lösen, jedoch läßt sich das Fernrohr zusammen mit der Libelle aus der Halterung nehmen; zweitens, die Libelle läßt sich von dem Fernrohr lösen, jedoch läßt sich das Fernrohr nicht aus der Halterung nehmen. Betrachten wir den ersten Fall:

Wir nehmen an, daß die Libellenachse und die geometrische Achse den Winkel α miteinander bilden[1]). Durch Drehen der Schraube *f* stellen wir die Libellenachse in die horizontale Stellung *AB* ein (die Luftblase in die Mitte des Rohres; Abb. 61a). Dann steht die Fernrohrachse geneigt in Richtung *CD*.

Wir nehmen das Fernrohr aus der Halterung, drehen es um 180° und befestigen es erneut in der Halterung (Abb. 61b). Es ist offensichtlich, daß sich dadurch die Neigung der Fernrohrachse nicht ändert, wohl aber die Libellenachse. Sie steht nicht mehr horizontal, sondern bildet mit der Horizontalebene den Winkel 2α, wodurch sich auch die Luftblase der Libelle um einige Teilstriche, z. B. n, von seiner mittleren Stellung entfernt hat.

---

[1]) Unter der geometrischen Achse eines Fernrohres versteht man die Achse ihres streng zylindrischen Teiles, der auf der Halterung *aa* aufliegt.

Durch Drehen der Schraube e neigen wir die Libelle so, daß sich die Blase um $\frac{n}{2}$ Teilstriche in die entgegengesetzte Richtung verschiebt. Da die Verschiebung der Blase dem Neigungswinkel der Libelle proportional ist, verkleinern wir damit den Neigungswinkel der Libelle um den Winkel α, d. h., wir stellen sie parallel zum Fernrohr (Abb. 61c). Wenn man jetzt mit Hilfe der Schraube f die Luftblase genau in die Mitte bringt, dann nehmen sowohl die Libelle als auch das Fernrohr eine horizontale Stellung ein (Abb. 61d).

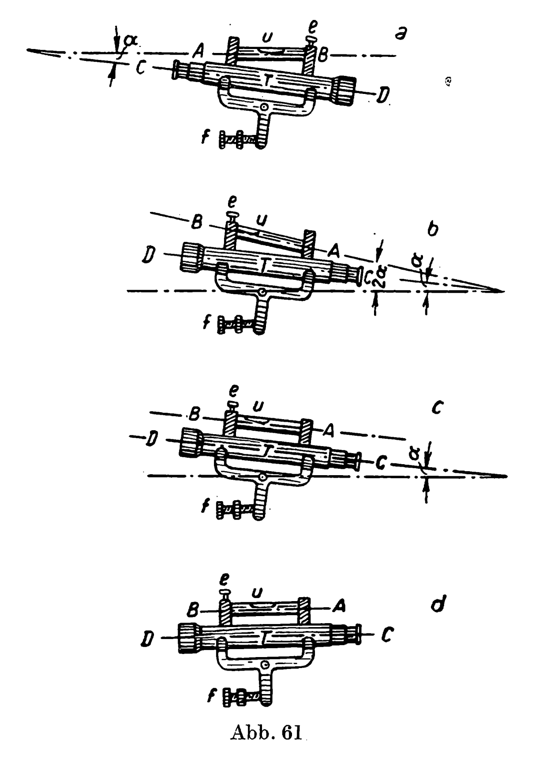


Abb. 61

Für den zweiten Fall beschreiben wir nur den Vorgang.

Mit der Schraube f stellt man die Blase der Libelle in die Mitte, nimmt die Libelle vom Fernrohr, dreht sie um 180° und stellt sie wieder auf. Die Blase verschiebt sich um n Teilstriche. Durch Drehen der Schraube e bringt man sie um $\frac{n}{2}$ Teilstriche zurück und hat damit die Libellenachse parallel zu dem Fernrohr gestellt. Mit Hilfe der Schraube f bringt man die Blase in die Mitte und stellt damit sowohl das Fernrohr als auch die Libelle in die horizontale Lage.

In beiden Fällen wird vorausgesetzt, daß die Verschiebung der Libellenblase dem Neigungswinkel proportional verläuft. Das ist nur dann richtig, wenn die Blase nach der Drehung des Fernrohres (oder der Libelle) nicht an die Seitenwand der Libelle anstößt. Dies geschieht nämlich, wenn die beiden Achsen sehr schief zueinander stehen. Deshalb empfiehlt es sich, vorher die Achsen nach Augenmaß so genau wie möglich parallel zu stellen und dann erst die oben angeführte Methode anzuwenden. Doch machen es auch unter diesen Bedingungen die zufälligen Fehler wenig wahrscheinlich, mit einem Mal die richtige Einstellung zu finden, und man muß den Vorgang *mehrmals wiederholen*, bis man die gesuchte Einstellung erreicht hat.

Die Einstellung der Säulenachse in die vertikale Richtung und der Fernrohrachse senkrecht zu ihr. Aus der Geometrie ist bekannt, daß jede Gerade als der Schnitt zweier Ebenen aufgefaßt werden kann. Es ist ganz

offensichtlich, daß, wenn zwei Ebenen vertikal verlaufen, dann auch ihre Schnittlinie vertikal verläuft. Legen wir auf diese Weise die Säulenachse fest, so können wir den Vorgang der Einstellung in zwei unabhängigen Schritten vornehmen. Sie bestehen darin, daß wir die diese Achse bildenden Ebenen einzeln einstellen. Es erhebt sich nur die Frage, welche zwei wir aus der unendlichen Mannigfaltigkeit der Ebenen, die sich in dieser Achse schneiden, für unseren Fall auswählen. Um dies zu klären, betrachten wir die Abb. 62, auf der die Stellung der drei Füße des Kathetometers *1*, *2* und *3* abgebildet ist.

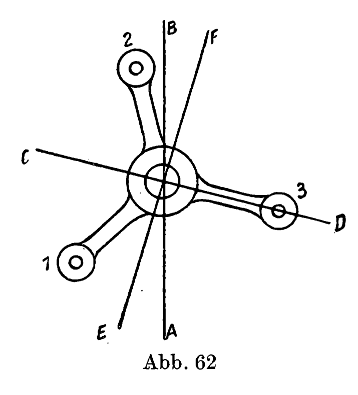


Abb. 62

Wenn wir als die eine Ebene irgendeine willkürliche Ebene AB herausgreifen, so ändert eine Drehung an irgendeiner der drei Schrauben ihre Neigung zum Horizont, und wir können die Ebene folglich mit jeder der drei Schrauben vertikal stellen. Dafür haben wir aber keine Möglichkeit mehr, irgendeine andere Ebene einzustellen. Denn würden wir es versuchen, so müßten wir wieder an einer der gleichen drei Schrauben drehen und würden damit die Einstellung der Ebene AB verändern.

Wenn wir jedoch als eine der beiden Ebenen die Ebene CD annehmen, die durch die Säulenachse und eine der drei Schrauben (z. B. *3*) verläuft, so wird eine Drehung der Schraube *3* keinen Einfluß auf die Neigung dieser Ebene haben. Wir können also, wenn wir sie mit Hilfe der Schraube *1* oder *2* eingestellt haben, jede beliebige andere Ebene, speziell die senkrecht zu CD verlaufende Ebene EF, durch Drehen eben an dieser Schraube *3* einstellen.

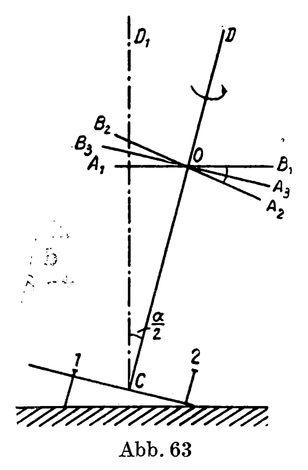


Abb. 63

Wir nehmen deshalb als erste Ebene die durch das Zentrum und eine der Schrauben (willkürlich herausgegriffen) verlaufende Ebene und stellen sie ein. Damit die Stellung der Luftblase der Libelle nur von der Neigung dieser Ebene abhängt, muß die Libelle senkrecht zu ihr gestellt werden. Deshalb stellt man durch Schwenken der Kathetometersäule das Fernrohr mit der Libelle möglichst genau parallel der durch die anderen beiden Schrauben verlaufenden Linie. Letztere steht auf der einzustellenden Ebene senkrecht, weil die drei Schrauben die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden.

Durch Drehen der Schraube f stellen wir die Blase der Libelle in die Mitte. Dann nimmt das Fernrohr die horizontale Stellung $A_1 B_1$ ein (siehe Abb. 63, in der die Ausgangsstellung zur Einstellung der Ebene CD in übertriebenem Maße dargestellt ist). Man schwenkt die Säule um ihre Achse um 180°, dann nimmt das Fernrohr die Stellung $A_2 B_2$ ein, die mit der Horizontalen den Winkel $A_1 O B_2 = \alpha$ bildet. Dabei verschiebt sich die Luftblase um n Teil-

striche. Da diese Schwenkung den Winkel zwischen den Säulenachsen und dem Fernrohr nicht ändern kann, gilt

$$\sphericalangle A_1OC = \sphericalangle A_2OC \quad \text{und folglich} \quad \sphericalangle A_1OC = \sphericalangle DOB_2.$$

Wenn man von dieser Gleichheit ausgeht, steht offensichtlich die Winkelhalbierende A_3B_3 des Winkels α senkrecht zur Säulenachse und damit auch zur Ebene CD, die durch diese Achse verläuft. Wenn man folglich durch Drehen der Schraube f (Abb. 60) das Fernrohr um den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ neigt, d. h. so, daß die Blase sich in entgegengesetzter Richtung um $\frac{n}{2}$ Teilstriche verschiebt, so stellt sich die Fernrohrachse, die die Lage dieser Winkelhalbierenden einnimmt, senkrecht zu der Ebene CD und der Säule des Kathetometers. Danach bleibt nur noch, durch Drehen einer der beiden Fußschrauben *1* und *2* oder beider zusammen in entgegengesetzter Richtung die Blase in die Mitte, d. h. das Fernrohr horizontal zu stellen. Damit wird die Ebene in die gesuchte vertikale Stellung CD_1 gebracht.

Aus den gleichen, bereits oben angeführten Überlegungen muß das Gerät zuerst so genau wie möglich nach Augenmaß in die vertikale Stellung gebracht werden. Es ist jedoch auch hierbei keine Garantie dafür gegeben, daß bei einmaliger Einstellung die Ebene CD genau senkrecht gestellt worden ist. Gewöhnlich muß man den Vorgang der Schwenkung der Säulenachse nacheinander einige Male ausführen, um sich allmählich der gesuchten Stellung zu nähern.

Hierzu ist noch zu bemerken, daß es keinen Sinn hat, sofort eine ganz genaue Einstellung dieser Ebene zu erreichen, weil bei einer Einstellung nach Augenmaß die Schwenkung der Säulenachse um 180° stets mit einem gewissen Fehler behaftet ist, bei dem die Neigung der zweiten Ebene auf die Stellung der Libellenblase Einfluß hat. Deshalb genügt es anfangs, daß bei der Schwenkung die Verschiebung der Blase 2 bis 3 Teilstriche nicht überschreitet, um dann zur Einstellung der zweiten Ebene überzugehen.

Die Einstellung der zweiten Ebene, die die Säulenachse bestimmt, läßt sich bedeutend einfacher durchführen. Hier hilft der Umstand, daß das Fernrohr schon annähernd senkrecht zur Säulenachse steht. Deshalb stellt man durch Schwenken der Säule das Fernrohr der Linie parallel, die durch die Säulenachse und die dritte Fußschraube verläuft, und stellt durch Drehen dieser Schraube die Blase in die Mitte der Libelle. Hat man so die zweite Ebene annähernd vertikal gestellt, muß man wieder zur ersten zurückkehren, ihre Einstellung mit aller Sorgfalt beenden und erneut die zweite vornehmen, um die endgültige Einstellung zu erhalten. Hierauf kann die Einstellung beider Ebenen und damit der Säulenachse als abgeschlossen gelten, und die Luftblase der Libelle muß bei jeder Schwenkung der Säule auf der gleichen Stelle bleiben.

Das Parallelstellen der optischen und geometrischen Achse des Fernrohres. Unter der optischen Achse eines Fernrohres versteht man eine Linie, die durch die Mitte des Objektivs und den Schnittpunkt zweier Fäden im Okular verläuft. Diese Fäden sind auf einen kreisförmigen Rahmen gespannt, der im Okular durch vier Justierschrauben $abcd$ (Abb. 64) gehalten wird. Durch

Drehen dieser Schrauben können wir offensichtlich in gewissen Grenzen den Schnittpunkt der Fäden verschieben und insbesondere mit der geometrischen Achse des Fernrohres zusammenfallen lassen.

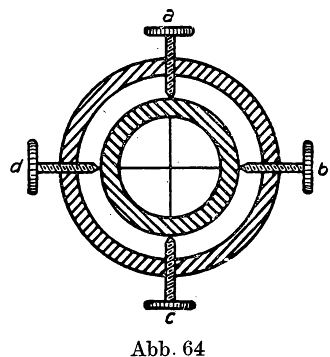


Abb. 64

Das erreicht man durch folgenden Vorgang: Das Fernrohr wird auf eine vertikale Skala gerichtet und der Teilstrich P_1 abgelesen, auf den der Schnittpunkt der Fäden fällt. Dann wird es um seine Längsachse um 180° gedreht und wieder der Teilstrich P_2 abgelesen, auf den der Schnittpunkt der Fäden fällt. Man verschiebt durch Drehen der Schrauben *a* und *c* den Ring nach oben oder unten um so viel, daß der Schnittpunkt der Fäden genau in die Mitte zwischen die Teilstriche P_1 und P_2 zu liegen kommt.

Danach stellt man die Skala horizontal und wiederholt die gleiche Einstellung in senkrechter Richtung zu der ersten, wobei man die Schrauben *b* und *d* betätigt. Der so eingestellte Schnittpunkt der Fäden darf sich beim Anvisieren irgendeines Punktes nicht verschieben, während das Fernrohr um 360° um seine Längsachse gedreht wird.

Für einige Kathetometer, bei denen das Fernrohr unbeweglich in der Halterung befestigt ist, wird diese Einstellung schon in der Herstellungsfabrik vorgenommen.

Wir weisen nun auf einige Eigentümlichkeiten in der Konstruktion einzelner Teile des Kathetometers hin.

Die Säule hat in den meisten Geräten einen dreieckigen (Abb. 65) oder runden (Abb. 66) Querschnitt. Im letzteren Fall wird die Säule mit zwei Schienen *JJ* und *LL* versehen, die parallel der Kathetometerachse verlaufen und es verhindern, daß der Schlitten sich von selbst um die Säule dreht.

Je nach Befestigung der Säule im Stativ unterscheidet man wieder zwei Grundtypen des Gerätes. Der erste besitzt eine volle massive Säule, die unten in einen Konus ausläuft. Dieser Konus sitzt in einer konusförmigen Vertiefung im Stativ und läßt sich darin frei drehen. Zum Festklemmen in einer bestimmten Richtung dient die Schraube *D* (Abb. 65).

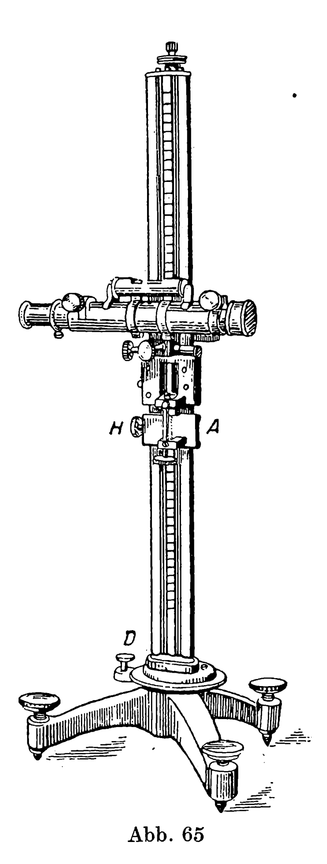


Abb. 65

Der zweite Typ, der eine gleichmäßigere Schwenkung zuläßt, hat eine hohle Säule,

in der eine andere Säule sitzt, die fest mit dem Stativ verbunden ist. Die äußere Säule, die in diesem Falle richtiger mit Rohr bezeichnet werden sollte, ist auf der inneren mit Hilfe einer Stahlschraube G (Abb. 66) aufgehängt, die durch das obere geschlossene Ende des Rohres geht. Die Spitze der Schraube steht in der Mitte einer konischen Vertiefung der inneren Säule. Das seitliche Schaukeln des unteren Rohrendes wird durch einen Ring verhindert, der an der inneren Säule befestigt ist. Das Feststellen des Rohres geschieht durch die Schraube K.

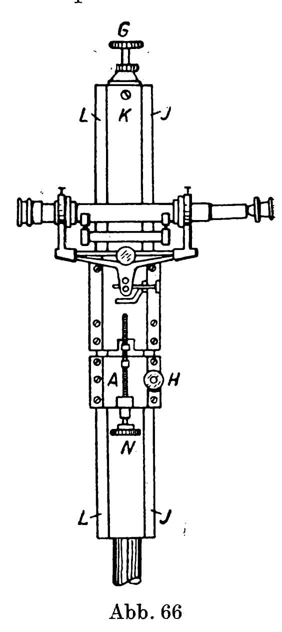


Abb. 66

Der Schlitten der Geräte besteht gewöhnlich aus zwei einzelnen Teilen, die miteinander durch eine Mikrometerschraube N (Abb. 66) verbunden sind. Der untere Teil A trägt die Klemmschraube H, die festgeklemmt wird, wenn das Fernrohr auf das zu messende Objekt grob ausgerichtet worden ist. Die genaue Ausrichtung geschieht durch Verschiebung des oberen Teiles mit Hilfe der Mikrometerschraube.

Da das auf dem Schlitten befestigte Fernrohr einen seitlichen Druck des Schlittens auf die Säule bewirkt, ist bei einigen Konstruktionen auf der gegenüberliegenden Seite ein Gewicht angebracht, das als Gegengewicht dient.

Die Ablesevorrichtungen. Das Ablesen der Höhen geschieht, wie schon gesagt, mit Hilfe eines Nonius (siehe Aufgabe 1), der an dem Schlitten befestigt ist. Doch trifft man manchmal auch folgende originelle Vorrichtung an: Die eine Kante, in diesem Falle einer Säule mit dreieckigem Querschnitt, schneidet in das Fernrohr ein (Abb. 67) und ist deshalb im Okular zu sehen. An der Kante ist eine Millimeterteilung angebracht. Im Fernrohr vor der Kante steht eine Glasplatte C mit einer Zehntelmillimeter-Teilung. Der obere Teilstrich dieser

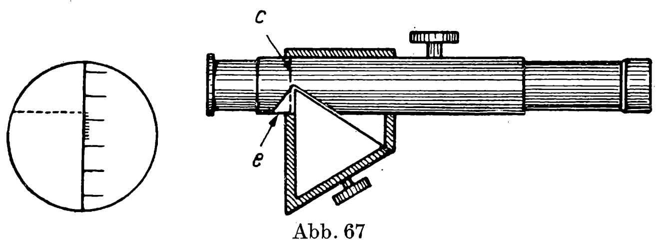


Abb. 67

Teilung verläuft quer über das ganze Gesichtsfeld. Dadurch läßt sich die Ablesung unmittelbar durch das Fernrohr durchführen. Die ganzen Millimeter werden auf der Skala der Kante und die Zehntel auf der Glasplatte abgelesen. Bei der Ablesung muß die Skala mit einer Taschenlampe durch die Öffnung e im Fernrohr beleuchtet werden.

Die Messung. Zur Bestimmung der Oberflächenspannung muß man vorher die Durchmesser der Kapillaren bestimmen. Dazu werden letztere in Chromschwefelsäure und destilliertem Wasser gereinigt, anschließend mit Alkohol gespült und im heißen Luftstrom getrocknet. Dann saugt man in eine Kapillare eine Quecksilbersäule von 1,5 bis 2,0 cm Länge, legt sie horizontal auf einen Maßstab und mißt die Länge der Säule an verschiedenen Stellen der Kapillare. Ist die Länge der Säule an verschiedenen Stellen verschieden, darf sie nicht zur Messung benutzt werden. Wenn jedoch die Längendifferenzen die Ablesegenauigkeit nicht überschreiten, fügt man Quecksilber bis zu einer Länge von 4 bis 5 cm zu und nimmt die mittlere Länge aus mehreren Messungen.

Danach wird das Quecksilber vorsichtig aus der Kapillare auf das vorher gewogene Uhrglas oder eine leichte Schale gegossen und gewogen. Ist seine Masse m, und nehmen wir an, sie habe in der Kapillare eine Länge l bei der Temperatur t eingenommen, dann erhalten wir, wenn wir mit d die Quecksilberdichte bei 0° C und mit r den gesuchten Radius bezeichnen,

$$\pi r^2 l \frac{d}{1 + 0{,}00018\,t} = m,$$

woraus folgt

$$r = \sqrt{\frac{m\,(1 + 0{,}00018\,t)}{13{,}596\,\pi l}}.$$

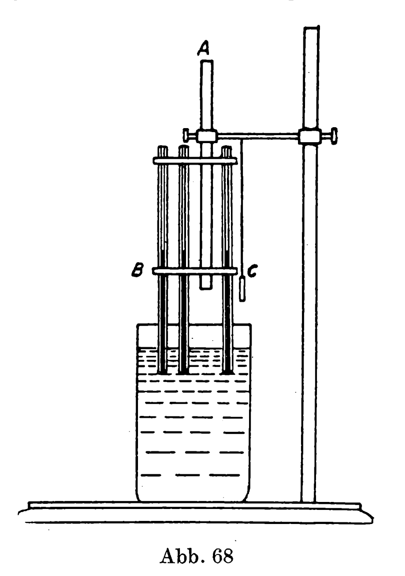


Abb. 68

Solche Messungen werden für alle Kapillaren durchgeführt. Danach werden die nach der oben beschriebenen Art gesäuberten Kapillaren von verschiedenen Durchmessern in die gemeinsame Halterung ABC (Abb. 68) eingespannt, nach dem Lot senkrecht gestellt und in ein Glas mit destilliertem Wasser getaucht. Sie sollen dabei 2 bis 3 cm tiefer im Wasser stehen, als es für den Versuch erforderlich wäre. Man läßt sie einige Minuten stehen, damit die Wände der Kapillare richtig mit Wasser benetzt werden. Dann werden die Kapillaren angehoben, festgeklemmt und die Stellungen der Menisken mit Hilfe des Kathetometers abgelesen (zu jeder Ablesung muß man $^1/_3$ des Kapillarradius als Korrektion des Meniskus hinzuzählen). Danach werden die Kapillaren wieder tiefer eingetaucht, nach einigen Minuten angehoben und die Ablesungen wiederholt. Nach mehrmaliger Ablesung (mindestens drei) geht man an die Ausrechnung der Oberflächenspannung.

Die Ausrechnung. Wenn die Kapillaren völlig rein sind, müssen die Höhen der Flüssigkeit in ihnen bei jeder Messung gleich sein. Bezeichnen wir die Höhen mit h_1, h_2 und h_3, die Radien der Kapillaren mit r_1, r_2 und r_3, mit δ die Flüssigkeitsdichte, mit α ihre Oberflächenspannung und mit g die Schwere-

beschleunigung, dann haben wir:

$$\alpha = \frac{r_1 h_1}{2} \delta g = \frac{r_2 h_2}{2} \delta g = \frac{r_3 h_3}{2} \delta g$$

woraus folgt

$$h_1 - h_2 = \frac{2\alpha}{g \delta r_1} - \frac{2\alpha}{g \delta r_2}$$

und

$$h_1 - h_3 = \frac{2\alpha}{g \delta r_1} - \frac{2\alpha}{g \delta r_3},$$

folglich

$$\alpha = \frac{r_1 r_2}{2(r_2 - r_1)} (h_1 - h_2) \delta g = \frac{r_1 r_3}{2(r_3 - r_1)} (h_1 - h_3) \delta g.$$

Setzen wir in den rechten Teil der letzten Gleichung die aus der Messung erhaltenen Werte für r_1, r_2, r_3, h_1, h_2 und h_3 ein, und entnehmen wir der Tabelle (am Ende des Buches) den Wert δ für die Beobachtungstemperatur, so finden wir das gesuchte α.

Aufgabe 28

Die Bestimmung der Oberflächenspannung mit der horizontalen Kapillare

Zubehör: 1. Anordnung, 2. zwei Bechergläser mit der zu untersuchenden Flüssigkeit, 3. zwei Kapillaren.

Über die theoretische Einführung siehe Aufgabe 27.

Die Beschreibung der Methode und der Anordnung. Wenn man in eine horizontal gestellte Kapillare einen Tropfen von einer zu untersuchenden Flüssigkeit bringt, die die Wände der Kapillare benetzt, sind an den Stirnseiten der Flüssigkeit beide Menisken konkav. Erhöhen wir den Druck von der einen Seite, so können wir die Flüssigkeitssäule bis zum Ende der Kapillare drücken und die Oberfläche der einen Stirnseite eben machen. Die Druckdifferenz auf beiden Seiten der Flüssigkeitssäule kann mit einem U-Rohr-Manometer bestimmt werden, dessen Höhendifferenz mit einem Kathetometer (siehe Aufgabe 27) oder einem horizontal stehenden Mikroskop gemessen wird.

In diesem Fall erhalten wir für die Oberflächenspannung α:

$$\alpha = \frac{r}{2} \varrho g h, \tag{1}$$

wobei r der Radius der Kapillare, g die Schwerebeschleunigung, h die Höhendifferenz im Manometer und ϱ die Flüssigkeitsdichte im Manometer bedeuten.

Die Änderung des Druckes wird durch Heben oder Senken (mit Hilfe eines in der Höhe veränderlichen Tischchens) eines Gefäßes A mit Wasser verwirklicht (Abb. 69), das mit einem anderen auch mit Wasser gefüllten Gefäß B durch einen Druckheber verbunden ist. Der obere Teil des Gefäßes B ist mit der Kapillare L und dem Manometer M verbunden. Zur Bestimmung der

Stellung des Gefäßes A, bei der der Meniskus eben wird, wird das Ende der Kapillare L, die durch die Lampe S beleuchtet wird, mit einem Mikroskop nicht zu großer Vergrößerung C beobachtet. Wenn die Oberfläche der Flüssigkeit eben wird, erscheint der Meniskus gleichmäßig beleuchtet.

Das Ende der Kapillare muß gut geschliffen und vor dem Herausdrücken der Flüssigkeitssäule völlig trocken sein.

Die Dichte des Wassers in den Manometerschenkeln kann man gleich 1 annehmen. Die Größe des Radius der Kapillare ist entweder als Gerätekonstante angegeben oder sie muß gemessen werden (über die Meßmethode siehe Aufgabe 27).

Diese Methode der Oberflächenspannungsbestimmung ist nur auf Flüssigkeiten anzuwenden, die Glas völlig benetzen. Sie ist einfach, besitzt genügende

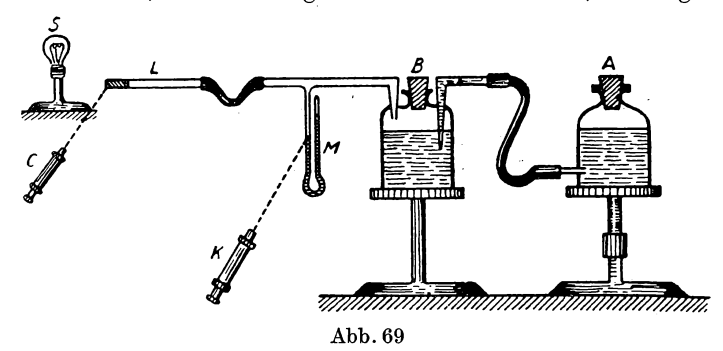


Abb. 69

Genauigkeit und gestattet es, die Oberflächenspannung sehr kleiner Flüssigkeitsmengen zu messen.

Die Messung. Untersucht werden die Flüssigkeiten Toluol und Wasser. Zur genaueren Bestimmung der Oberflächenspannung werden die Messungen mit zwei Kapillaren durchgeführt. Die Füllung der Kapillaren mit einem Tropfen der zu untersuchenden Flüssigkeit geschieht durch Eintauchen in das mit dieser Flüssigkeit gefüllte Glas. Danach werden die Kapillaren nacheinander durch einen Gummischlauch mit dem Manometer verbunden. Die Messung selbst wird zurückgeführt (wenn die Radien der Kapillaren gegeben sind) auf die Ablesung der Höhendifferenz im Manometer mit Hilfe des Kathetometers oder des horizontalen Mikroskopes K (Abb. 69) in dem Moment, da durch Heben des Gefäßes A die gleichmäßige Ausleuchtung des Endes der Kapillare erreicht ist (in diesem Moment wird der Meniskus eben). Durch Senken des Gefäßes A wird die Flüssigkeitssäule in die Mitte der Kapillare hineingezogen, dann wieder an das Ende der Kapillare geführt und die Ablesung am Manometer wiederholt. Jede Kapillare wird mindestens dreimal gemessen und dann der Mittelwert genommen.

Aufgabe 29

Die Messung der Abhängigkeit der Oberflächenspannung von der Konzentration und der Temperatur aus dem Maximaldruck in einer Blase

Zubehör: 1. Aspirator, 2. Alkoholmanometer, 3. Gefäß von der Form eines Reagenzglases mit seitlichem Ansatzrohr und Stopfen, 4. Rohr mit zugeschmolzenem Ende, 5. zwei Bechergläser, 6. Thermometer, 7. Bunsenbrenner, 8. Rührer, 9. Stativ, 10. eine Reihe zu untersuchender Flüssigkeiten.

Über die theoretische Einführung siehe Aufgabe 27.

Die Beschreibung der Anordnung. Die Anordnung (Abb. 70) besteht aus einem mit Wasser gefüllten Aspirator A, der durch Gummischläuche und ein

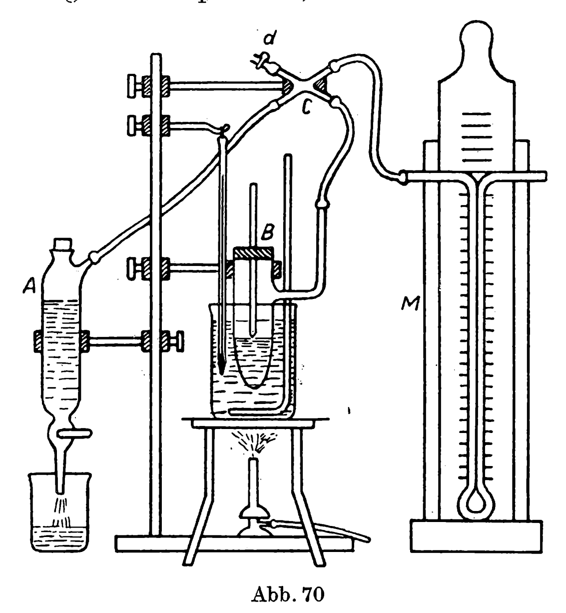


Abb. 70

Kreuzstück mit dem Alkohol-Manometer M[1]) und mit dem Luftraum des dicht abgeschlossenen Gefäßes B, das etwas von der zu untersuchenden Flüssigkeit enthält, verbunden ist. Durch ein Loch im Stopfen wird in dieses Gefäß eine sogenannte „Spitze" gesteckt. Sie besteht aus einem Glasrohr, dessen unteres Ende zu einer kleinen Öffnung ausgezogen ist. Diese „Spitze" wird so weit in das Gefäß geschoben, bis sie die Oberfläche der zu untersuchenden Flüssigkeit berührt. Das Gefäß B wird in ein Glas mit Wasser gestellt, das mit einem Bunsenbrenner erwärmt werden kann. Das vierte

[1]) Die Spiegelskala des Manometers kann zur bequemeren Ablesung nach oben oder unten verschoben werden.

Ansatzrohr d des Kreuzstückes verbindet über einen Hahn die ganze Apparatur mit der Atmosphäre.

Wenn man nach dem Schließen des Ansatzrohres d den Hahn des Aspirators etwas öffnet, beginnt das Wasser langsam auszufließen, und hierdurch wird im oberen Teil des Aspirators und somit auch in dem Gefäß B und in dem linken Schenkel des Manometers der Luftdruck erniedrigt. Bei einer bestimmten Druckerniedrigung wird durch den Atmosphärendruck in das Gefäß B aus der „Spitze" eine Luftblase gestoßen. Das geschieht gerade dann, wenn die Druckdifferenz zwischen dem Atmosphärendruck und dem Druck im Inneren des Gefäßes B, die durch die Höhendifferenz in den Schenkeln des Manometers angezeigt wird, gleich dem durch die Oberflächenspannung der zu untersuchenden Flüssigkeit erzeugten Druck ist, der die sich bildende Blase zusammenzudrücken versucht.

Bezeichnen wir die Druckdifferenz mit H und die Oberflächenspannung der zu untersuchenden Flüssigkeit mit α, dann besteht zwischen ihnen im Moment des Abreißens der Blase folgende Beziehung:

$$\alpha = AH, \tag{1}$$

wobei A ein Proportionalitätsfaktor ist, der von den Ausmaßen der „Spitze" abhängt, d. h. eine konstante Größe für die gegebene Anordnung darstellt. Zu ihrer Bestimmung muß man diesen Versuch mit irgendeiner Flüssigkeit durchführen, deren Oberflächenspannung gut bekannt ist, z. B. mit Wasser. Dann erhält man, wenn man den entsprechenden Wert für H_0 und α_0 in die Gleichung (1) einsetzt:

$$A = \frac{\alpha_0}{H_0}. \tag{2}$$

Hat man so die Apparatekonstante bestimmt, kann man zur Bestimmung der Oberflächenspannung jeder beliebigen Flüssigkeit übergehen. Wir erhalten jetzt für sie:

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{H_0} H. \tag{3}$$

Die Messung. Die Bestimmung der Apparatekonstanten. Man setzt die Anordnung, wie in der Abbildung gezeigt, zusammen, gießt in den Aspirator bis zum Ansatzrohr Wasser und in das Gefäß B so viel destilliertes Wasser, wie in der Abbildung eingezeichnet ist, öffnet den Hahn an dem Ansatzrohr d und stellt damit in der Apparatur Atmosphärendruck her. Die Flüssigkeit nimmt dabei in beiden Schenkeln des Manometers die gleiche Höhe ein. Man verschiebt die Manometerskala, bis ihr Nullpunkt mit der Höhe des Alkohols in den Schenkeln zusammenfällt. Dann schließt man d, öffnet den Hahn des Aspirators um so viel, daß die Änderung des Druckes genügend langsam erfolgt und man die Höhendifferenz im Moment des Abreißens der Blase leicht ablesen kann.

Wenn sich die Blasen mit konstanter Frequenz bilden, beginnt die Ablesung beider Schenkel des Manometers. Man liest mindestens für zehn Blasen die Höhendifferenzen ab und nimmt daraus das Mittel.

Gleichzeitig liest man die Temperatur im Wasserglas ab, in dem das Gefäß B steht.

Setzt man in die Formel (2) den erhaltenen Wert H_0 und den aus Tabellen oder Kurven entnommenen Wert α_0 für die gegebene Temperatur ein, so erhält man die Apparatekonstante.

Die Bestimmung der Abhängigkeit der Oberflächenspannung α von der Konzentration der Lösung. Man gießt das Wasser aus dem Gefäß B aus und füllt B mit einer Lösung von Methylalkohol in Wasser von bestimmter Konzentration. Dabei empfiehlt es sich, um Fehler zu vermeiden, das Gefäß und vor allem die „Spitze" vorher mit dieser Lösung auszuspülen. Man bestimmt, wie im ersten Fall, die Höhe H und findet aus der Formel (3) die entsprechende Oberflächenspannung α.

Gleiche Messungen führt man mit einer Reihe von Lösungen bekannter Konzentration aus und fertigt aus den erhaltenen Werten eine graphische Darstellung der Abhängigkeit der Oberflächenspannung α von der Konzentration an.

Die Bestimmung der Abhängigkeit der Oberflächenspannung α von der Temperatur. Man spült das Gefäß B und füllt es mit Xylol, erwärmt das Wasser im Becherglas, in dem dieses Gefäß steht, auf 80 bis 90° C, läßt es langsam erkalten und führt alle 10° C eine Messung durch. Das Manometer muß dabei so weit wie möglich vom Bunsenbrenner entfernt und mit der Rückseite zu ihm stehen.

Hat man für mehrere Temperaturen α bestimmt, so fertigt man eine graphische Darstellung der Abhängigkeit der Oberflächenspannung α von der Temperatur an.

Aufgabe 30

Die Bestimmung des Koeffizienten der inneren Reibung von Flüssigkeiten mit dem Kapillarviskosimeter

Zubehör: 1. Anordnung, 2. Stativ, 3. großes Becherglas, 4. Pipette, 5. Pyknometer, 6. Stoppuhr, 7. Thermometer, 8. eine Reihe von Flüssigkeiten.

Die Theorie. Wenn in einer sich bewegenden Flüssigkeit verschiedene Schichten verschiedene Geschwindigkeiten besitzen, so wirken zwischen den Schichten Kräfte der inneren Reibung. Das Experiment zeigt, daß die Kraft der inneren Reibung proportional der Größe der Oberfläche s und dem Geschwindigkeitsgradienten $\frac{dv}{dn}$ (der Abnahme der Geschwindigkeit v je Längeneinheit in der Richtung senkrecht zur Geschwindigkeit) ist, d. h., daß

$$f = \eta s \frac{dv}{dn}, \tag{1}$$

wobei η der Proportionalitätsfaktor ist, der *der Koeffizient der inneren Reibung* oder *die dynamische Viskosität* genannt wird.

Es gibt verschiedene Methoden zur Bestimmung dieser Größe. Weiter unten (Aufgabe 30, 31 und 32) werden drei verschiedene Methoden angeführt, die die Gleichung (1) benutzen.

Das Fließen einer zähen Flüssigkeit durch eine Kapillare. Wir lassen die zähe Flüssigkeit durch eine Kapillare von der Länge l und dem Radius r fließen und bezeichnen die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in einem gegebenen Punkt mit v, den Abstand dieses Punktes von der Achse der Kapillare mit y und nehmen an, daß die Größe v in allen gleich weit von der Rohrachse liegenden Punkten gleich ist.

Wir nehmen aus der Flüssigkeit ein zylindrisches Volumenelement heraus. In Übereinstimmung mit der Formel (1) ist die auf die seitliche Oberfläche des Zylinders wirkende Kraft der inneren Reibung offensichtlich gleich

$$f = \eta\, 2\pi y l \frac{dv}{dy},$$

wobei y der Radius und l die Länge des herausgenommenen Zylinders bedeuten. Bei eingestellter Geschwindigkeitsverteilung ist die Kraft f gleich der Druckdifferenz auf die Grundflächen des Zylinders. Deshalb kann man schreiben:

$$-\eta 2\pi y l \frac{dv}{dy} = \Delta p \pi y^2$$

oder

$$dv = -\frac{\Delta p}{2\eta l} y\, dy.$$

Integrieren wir die letzte Gleichung, so erhalten wir:

$$v = -\frac{\Delta p}{2\eta l}\frac{y^2}{2} + A,$$

wobei A eine Integrationskonstante ist. Zur Bestimmung der Größe von A nehmen wir an, daß die Geschwindigkeit an der Wand des Rohres ($y = r$) gleich Null[1]) ist. Daraus folgt

$$A = \frac{\Delta p}{2\eta l}\frac{r^2}{2}$$

oder

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l}(r^2 - y^2). \tag{2}$$

Die Beziehung (2) gibt das Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt des Rohres an. Benutzt man diese Beziehung, so kann man leicht das Volumen q der in der Zeiteinheit durch die Kapillare fließenden Flüssigkeit ausrechnen.

Offensichtlich ist

$$q = \int_0^r v\, 2\pi y\, dy.$$

[1]) Das ist richtig, wenn die Flüssigkeit die Oberfläche des Rohres benetzt.

Setzen wir hierin den Wert für v aus der Formel (2) ein und integrieren, so erhalten wir

$$q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 l \eta}. \tag{3}$$

Diese Beziehung ist unter dem Namen POISEUILLE*sche Gleichung* bekannt. Benutzt man sie und kennt man die Größen q, r, l und Δp, so kann man den Wert des Koeffizienten η ausrechnen.

Es ist jedoch bequemer, die POISEUILLEsche Gleichung für die Bestimmung der relativen Werte des Koeffizienten der inneren Reibung zu benutzen. Wenn wir nämlich zwei Flüssigkeiten nehmen (die entsprechenden Größen von der einen bezeichnen wir mit 0 und von der anderen mit 1) und die Zeiten des Ausfließens t_0 und t_1 gleicher Volumen Q dieser Flüssigkeiten ($Q = q \cdot t$) durch ein und dieselbe Kapillare messen (gleiches v und l), so erhalten wir in Übereinstimmung mit der Formel (3)

$$Q = q_0 t_0 = \frac{\pi r^4 \Delta p_0 t_0}{8 l \eta_0}$$

und

$$Q = q_1 t_1 = \frac{\pi r^4 \Delta p_1 t_1}{8 l \eta_1}.$$

Teilen wir die zweite durch die erste Gleichung, so erhalten wir:

$$1 = \frac{\Delta p_1}{\Delta p_0} \cdot \frac{t_1}{t_0} \cdot \frac{\eta_0}{\eta_1}$$

oder

$$\eta_1 = \eta_0 \frac{t_1}{t_0} \cdot \frac{\Delta p_1}{\Delta p_0}. \tag{4}$$

Wenn die Flüssigkeit unter dem Einfluß der Schwerkraft ausfließt, dann ist

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta p_0} = \frac{d_1}{d_0},$$

wobei d_0 und d_1 die Dichten der Flüssigkeiten bedeuten. Damit können wir die Beziehung (4) in folgender Form schreiben:

$$\eta_1 = \eta_0 \frac{t_1}{t_0} \cdot \frac{d_1}{d_0}. \tag{5}$$

Kennt man also die Ausfließzeiten t_1 und t_0 der beiden Flüssigkeiten und ihre Dichten d_1 und d_0, so kann man den relativen Koeffizienten der inneren Reibung $\frac{\eta_1}{\eta_0}$ bestimmen. Entnimmt man aus Tabellen den Wert für η_0, kann man auch den absoluten Wert η_1 berechnen.

Die Beschreibung der Anordnung. Die Anordnung stellt ein U-förmiges Glasrohr $abeCd$ (Abb. 71) dar, dessen breiter Schenkel ab mit der Verbreiterung b endet und dessen anderer Schenkel aus einer Kapillare e besteht, auf der eine Kugel C sitzt, die oben in ein breites Rohr d übergeht. Unter der Kugel und über ihr werden auf die Rohre d und e zwei Markierungen m und n angebracht, die ein bestimmtes Volumen der Flüssigkeit abgrenzen, deren Ausflußzeit bei dem Versuch gemessen werden soll.

Das Rohr wird mit der Klemme K am Stativ S befestigt und in das mit Wasser gefüllte Becherglas G so weit eingetaucht, daß die Oberfläche des Wassers höher als die Markierung m steht. Die Anordnung muß durch ein Lot senkrecht gestellt werden. Ein Thermometer T wird ebenfalls in das Glas G getaucht.

Die Messung. Vor der Messung wird das U-Rohr gut mit Wasser und dann noch etwas mit der zu untersuchenden Flüssigkeit durchgespült. Nach dem Senkrechtstellen des Rohres wird mit einer Pipette ein bestimmtes, bei allen Versuchen gleichbleibendes Volumen der zu untersuchenden Flüssigkeit in den breiten Schenkel *ab* (Abb. 71) gegossen. Dann saugt man durch den Gummischlauch f, der auf dem Rohr d sitzt, die Flüssigkeit vorsichtig so weit hoch, daß die Kugel C bis über die Markierung m gefüllt ist. Man gibt den Gummischlauch frei, beobachtet das Ausfließen der Flüssigkeit, drückt in dem Moment auf die Stoppuhr, wenn der Meniskus die Markierung m passiert, und stoppt sie, wenn der Meniskus die Markierung n passiert. Man führt mehrere solcher Zeitmessungen durch und bestimmt somit die Zeit t_1 des Ausfließens der Flüssigkeit vom Volumen der Kugel C. Danach führt man den gleichen Versuch auch mit Wasser durch und bestimmt die Ausflußzeit t_0.

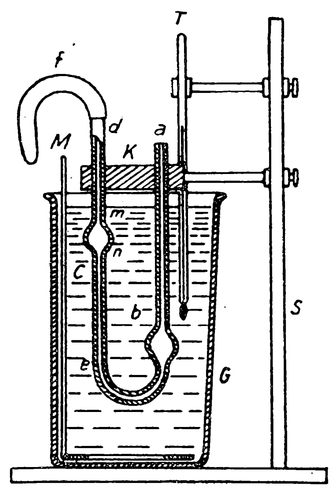


Abb. 71

Anschließend bestimmt man die Dichte d der untersuchten Flüssigkeit (bei der gleichen Temperatur, die auch beim Versuch vorherrschte). Dazu taucht man das mit Flüssigkeit gefüllte Pyknometer (Beschreibung siehe Aufgabe 7) in das Becherglas, wartet 15 Minuten, füllt es genau bis zu seiner Markierung auf (mit Hilfe des Filterpapiers entfernt man das Überschüssige oder füllt mit der Pipette das Fehlende nach). Man nimmt das Pyknometer heraus, trocknet es sorgfältig ab und bestimmt das Gewicht der in ihm enthaltenen Flüssigkeit. Genauso wird auch das Gewicht des Wassers im Pyknometer bestimmt.

Aus der Masse Q der Flüssigkeit und w des Wassers wird die wahre Dichte nach der Formel

$$\varrho = \frac{Q}{w}(\delta - \lambda) + \lambda$$

bestimmt. Hierbei bezeichnet man mit δ die Dichte des Wassers bei der Versuchstemperatur (ist aus der Tabelle zu entnehmen) und mit λ die Dichte der Luft. Sie kann gleich 0,0012 g/cm³ gesetzt werden (siehe Aufgabe 7). Die Versuche werden mit Lösungen von NaCl (7 % und 12 %) und von NH_4NO_3 (20 % und 40 %) durchgeführt.

Der gesuchte Reibungskoeffizient η wird nach der Formel (5) bestimmt:

$$\eta = \eta_0 \frac{d \cdot t_1}{\delta \cdot t_0}.$$

Hierbei ist η_0 der Koeffizient der inneren Reibung von Wasser. Er wird einer Tabelle entnommen.

Aufgabe 31

Die Bestimmung des Koeffizienten der inneren Reibung von Flüssigkeiten nach der Stokesschen Methode

Zubehör: 1. Glaszylinder mit Flüssigkeit, 2. Meßmikroskop mit Okularmikrometer, 3. Stoppuhr, 4. Lampe, 5. Quecksilber oder Kugeln aus der Woodschen Legierung, 6. Glasstab zum Transport der Quecksilbertropfen, 7. Maßstab.

Über die innere Reibung siehe Aufgabe 30.

Die Theorie der Methode. Auf eine feste Kugel, die in einer zähen Flüssigkeit fällt, wirken drei Kräfte: die Schwerkraft, der Auftrieb (Archimedessches Prinzip) und die der Geschwindigkeit entgegenwirkende Kraft, die durch die innere Reibung der Flüssigkeit verursacht wird. Wir müssen hier unterstreichen, daß nicht die Reibung der Kugel an der Flüssigkeit eine Rolle spielt, sondern die Reibung der einzelnen Flüssigkeitsschichten aneinander. Die der Kugeloberfläche benachbarte Schicht bewegt sich mit der gleichen Geschwindigkeit wie die Kugel, die anderen mit immer kleiner werdender Geschwindigkeit.

Wenn die Kugel in einer Flüssigkeit fällt, deren Ausdehnung in allen Richtungen unbegrenzt ist, und dabei keine Wirbel hinter sich läßt (kleine Fallgeschwindigkeit und kleine Kugel), dann ist ihr Widerstand, wie Stokes gezeigt hat, gleich

$$f = 6\pi\eta v r, \tag{1}$$

wobei η den Koeffizienten der inneren Reibung der Flüssigkeit, v die Geschwindigkeit der Kugel und r ihren Radius bedeutet. Die Ableitung dieser Formel ist ziemlich schwierig und kann deshalb nicht in diesem Buch behandelt werden. Sie ist aber in der Spezialliteratur zu finden, die am Ende dieser Aufgabe angeführt ist. Doch kann man die Beziehung in dieser Form bis auf eine Konstante finden, wenn man eine Dimensionsbetrachtung anstellt.

Der Versuch zeigt, daß der Widerstand um so größer wird, je größer der Koeffizient der inneren Reibung η, der Radius r und die Geschwindigkeit v der fallenden Kugel sind. Deshalb können wir schreiben:

$$f = A\,\eta\,r^x v^y. \tag{2}$$

Es gilt aber

$$f = \eta s \frac{dv}{dn} \tag{3}$$

[siehe Formel (1), Aufgabe 30]. Vergleicht man die Beziehungen (2) und (3)

miteinander, so sieht man leicht ein, daß $r^x \cdot v^y$ die Dimension von $s \cdot \frac{dv}{dn}$ besitzen muß. Weil aber

$$[r^x \cdot v^y] = \left[\mathrm{cm}^x \cdot \frac{\mathrm{cm}^y}{\mathrm{sec}^y}\right] = \left[\frac{\mathrm{cm}^{x+y}}{\mathrm{sec}^y}\right]$$

und

$$\left[s \cdot \frac{dv}{dn}\right] = \left[\mathrm{cm}^2 \cdot \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec} \cdot \mathrm{cm}}\right] = \left[\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{sec}}\right],$$

so ist

$$\left[\frac{\mathrm{cm}^{x+y}}{\mathrm{sec}^y}\right] = \left[\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{sec}}\right],$$

woraus folgt

$$x + y = 2, \quad -y = -1,$$

d. h.

$$y = 1, \quad x = 1.$$

Folglich ist

$$f = A\eta v r. \tag{1'}$$

Den Faktor A kann man nicht nach dieser Methode bestimmen. Man erhält dafür 6π, wenn man die Aufgabe der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten löst.

Fällt eine Kugel in einer Flüssigkeit, so greifen alle drei Kräfte in vertikaler Richtung an: die Schwerkraft nach unten, der Auftrieb und der Widerstand nach oben. Der Widerstand nimmt mit zunehmender Geschwindigkeit der Kugel zu, und die Kugel erreicht eine solche Geschwindigkeit, bei der die Summe der drei Kräfte gleich Null ist. Dann bewegt sich die Kugel wegen ihrer Trägheit mit der konstanten Geschwindigkeit v_0. Für diesen Fall erhalten wir:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g - \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_1 g - 6\pi\eta r v_0 = 0. \tag{4}$$

Hierbei ist ϱ die Dichte der Kugel, ϱ_1 die Dichte der Flüssigkeit und g die Schwerebeschleunigung. Lösen wir die Gleichung (4) nach dem Koeffizienten der inneren Reibung auf, so erhalten wir:

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{\varrho - \varrho_1}{v_0} g r^2. \tag{5}$$

Sind die auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Größen bekannt, so kann man den Koeffizienten der inneren Reibung der Flüssigkeit, in die die Kugel geworfen wird, bestimmen.

Praktisch ist es unmöglich, das Fallen der Kugel im unbegrenzten Medium zu beobachten, weil sich die Flüssigkeit stets in irgendeinem sie begrenzenden Gefäß befindet. Wenn die Kugel in der Längsachse eines zylindrischen Gefäßes mit dem Radius R fällt, so führt die Berücksichtigung der Gefäßwände zu folgendem Ausdruck für die Viskosität:

$$\eta = \frac{2}{9} g r^2 \frac{\varrho - \varrho_1}{v_0\left(1 + 2{,}4\frac{r}{R}\right)}. \tag{6}$$

Dabei werden die Begrenzungen durch die Oberfläche der Flüssigkeit und den Boden des Gefäßes in dieser Formel nicht berücksichtigt.

Die Beschreibung der Anordnung. Die Anordnung besteht aus einem Glaszylinder (Abb. 72), der mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt ist und zwei horizontale Markierungen d und d' besitzt, die voneinander den Abstand l cm haben. (Die obere Markierung muß um 5 bis 8 cm niedriger liegen als die Oberfläche der Flüssigkeit.) Der Zylinder steht auf einer Unterlage, die durch Drehen ihrer Fußschrauben horizontal gestellt werden kann. Zur Senkrechtstellung des Zylinders benutzt man ein Lot.

Die Messung. Zur Messung des Koeffizienten der inneren Reibung von Flüssigkeiten, z. B. von Ölen, verwendet man sehr kleine Kugeln aus der WOODschen Legierung (oder Quecksilber). Der Durchmesser dieser Kugeln wird mit einem Mikroskop mit Okularmikrometer gemessen, das vorher geeicht worden ist. Dazu werden die Kugeln mit einer Pinzette aus einer mit Öl gefüllten Schale genommen, auf den Objektträger gelegt und beides auf den Tisch des Mikroskops gebracht. Die Kugel wird im Mikroskop scharf eingestellt und die Skalenteile am Okularmikrometer abgelesen. Bei der Messung muß man darauf achten, daß der Objektträger nicht mit Öl bedeckt ist, weil sonst die Kugel nicht scharf eingestellt werden kann.

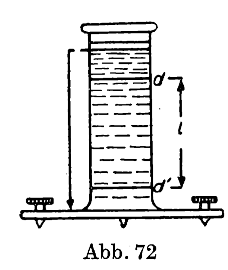


Abb. 72

Hat man den Durchmesser dieser Kugel gemessen, so bringt man sie mit der Pinzette in Achsennähe des Zylinders mit der Flüssigkeit, stellt das Auge in die Ebene der ersten Markierung ein und läßt die Kugel fallen. Im Moment des Durchganges der Kugel durch die Markierung drückt man auf die Stoppuhr. Dann bringt man das Auge analog in die Ebene der zweiten Markierung und stoppt die Uhr, wenn die Kugel diese Markierung passiert. Bei der Beobachtung des Fallens der Kugeln ist es dienlich, die Anordnung von der Seite des Beobachters her mit einer Lampe zu beleuchten. Um eine Erwärmung der Flüssigkeit zu vermeiden, darf man sie jedoch nicht zu nahe an das Gefäß stellen. Der Versuch muß mit verschiedenen Kugeln mindestens zehnmal durchgeführt werden.

Die Ausrechnung. Nehmen wir an, daß die Kugel beim Durchgang durch die obere Markierung schon eine konstante Geschwindigkeit besitzt, so ist sie

$$v_0 = \frac{l}{t},$$

wobei t die Zeit bedeutet, in der die Kugel zwischen den Markierungen fällt. Setzt man in die Formel (6) die Werte v_0, r, R, g und ebenfalls ϱ und ϱ_1 ein, so erhält man den Wert für den Koeffizienten der inneren Reibung.

Da die Zähigkeit der Flüssigkeiten sich stark mit der Temperatur ändert, muß man die Zimmertemperatur aufschreiben, die während des Versuches herrscht.

Spezialliteratur

M. PLANCK: „Einführung in die Mechanik deformierbarer Körper". Verlag S. Hirzel, Leipzig 1922, S. 178ff.

Aufgabe 32

Die Bestimmung des Koeffizienten der inneren Reibung von Flüssigkeiten mit der Dämpfungsmethode

Zubehör: 1. Anordnung, 2. Stoppuhr, 3. geeichte Scheibe, 4. Gefäße mit Benzol und Toluol, 5. Schublehre.

Die Beschreibung der Methode. (Über die innere Reibung siehe Aufgabe 30). Wenn man ein zylindrisches mit einer Flüssigkeit gefülltes Glas um seine vertikale Achse Drehschwingungen ausführen läßt, dann klingen diese Schwingungen mit der Zeit ab. Wir nehmen an, daß die Schwingungen durch Verdrillen des Aufhängefadens um einen kleinen Winkel hervorgerufen worden sind. Die Anfangsenergie der elastischen Deformation des Fadens geht während des Schwingungsprozesses durch Reibung verloren. Diese Reibung setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Betrachten wir den Hauptanteil, der auf die Reibung im Inneren der Flüssigkeit entfällt:

Die Grenzschicht der Flüssigkeit führt infolge Haftens ihrer Teilchen an der Innenwand die gleiche Bewegung aus wie das Glas selbst. Sie vollführt Drehschwingungen mit der gleichen Amplitude und Schwingungsdauer wie auch das Glas. Die folgende Schicht wird infolge der inneren Reibung von der Grenzschicht mitgerissen und vollführt Drehschwingungen mit der gleichen Schwingungsdauer, aber mit einer anderen Amplitude und Phase. In der Achse des Glases bleiben die Teilchen in Ruhestellung. Somit entsteht im Inneren der Flüssigkeit ein Gradient der Winkelgeschwindigkeit längs der Achse und eine zähe Schubwelle, die sich, gedämpft von der seitlichen Oberfläche, zur Achse und vom Boden des Glases zur freien Oberfläche der Flüssigkeit ausbreitet.

Da ein Gradient der Winkelgeschwindigkeit vorhanden ist, treten in Übereinstimmung mit dem NEWTONschen Gesetz der inneren Reibung Kräfte auf, zu deren Überwindung Energie der elastischen Deformation des Fadens verbraucht wird. Folglich werden die Schwingungen gedämpft vor sich gehen.

Doch ruft das Vorhandensein der inneren Reibung noch eine andere Erscheinung hervor: die Schwingungsdauer des Glases mit Flüssigkeit ist größer als ohne Flüssigkeit. Denn infolge des Auftretens der Reibungskräfte reißt das Glas bei seiner Bewegung eine bestimmte Flüssigkeitsmenge mit, d. h., sein Trägheitsmoment wächst, und die Schwingungsdauer wird entsprechend größer als bei einem leeren Glas.

Der zweite, viel kleinere Teil der Energie der elastischen Deformation des Fadens wird durch die Reibung an Luft und an den Stellen der Befestigung des elastischen Fadens verbraucht.

So sieht in groben Zügen das physikalische Bild der Drehschwingungen eines mit einer zähen Flüssigkeit gefüllten Glases aus.

Die mathematische Analyse dieses Prozesses ist sehr kompliziert und wird auf die Lösung eines Systems von Differentialgleichungen der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten zurückgeführt. Es hat sich gezeigt, daß man aus der Beobachtung des logarithmischen Dekrementes der Dämpfung und der Schwingungsdauer des Zylinders die sogenannte kinematische Viskosität der

Flüssigkeit, die in das Gefäß eingefüllt wird, bestimmen kann. [*Kinematische Viskosität* ist das Verhältnis der dynamischen (gewöhnlichen) Viskosität zu der Dichte der Flüssigkeit.] Dabei benutzt man die Beziehungen

$$\nu = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K}{MR}\right)^2 \cdot \frac{\left(\delta - \frac{\tau}{\tau_0}\delta_0\right)^2}{\tau\sigma^2}, \tag{1}$$

$$\sigma = 1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{\delta}{2\pi} - a + \frac{2R}{H}\left(b - c\frac{\delta}{2\pi}\right), \tag{2}$$

$$y = \frac{2\pi}{\tau\nu^*}\cdot R^2. \tag{3}$$

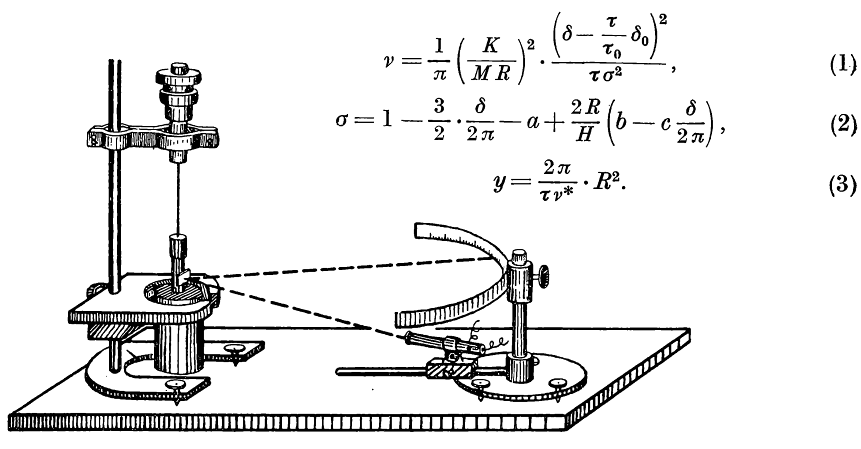


Abb. 73

Hierbei ist ν die kinematische Viskosität der untersuchten Flüssigkeit, K das Trägheitsmoment des leeren Glases mit Deckel und Spiegel, bezogen auf seine Achse, M die Masse der im Glase befindlichen Flüssigkeit, R der innere Radius des Glases, τ_0 die Schwingungsdauer des ganzen aufgehängten Systems (doch ohne Flüssigkeit), δ das logarithmische Dekrement der Dämpfung der Schwingungen des ganzen Systems mit Flüssigkeit im Glase, τ die Periode dieser Schwingungen, δ_0 das logarithmische Dekrement der Dämpfung der Schwingungen des Systems ohne Flüssigkeit im Glase, ν^* der angenäherte Wert der kinematischen Zähigkeit, den man aus der Formel (1) erhält, wenn man darin $\sigma = 1$ setzt, H die Höhe der Flüssigkeit im Glase und a, b und c Zahlenwerte, die, wie die Funktion y, aus den am Ende des Buches angeführten Kurven (siehe Tabelle 17) entnommen werden.

Die Formel (1) ist für ν anwendbar, wenn

$$R\sqrt{\frac{2\pi}{\tau\nu}} \geqq 10.$$

Die Beschreibung der Anordnung und die Messung. Die Anordnung (Abb. 73) besteht aus einem Stativ, das einen an einem Stahldraht aufgehängten Zylinder trägt, einer Beleuchtungseinrichtung und einer gebogenen Skala. Das obere Ende des Drahtes ist an einem Torsionskopf und das untere am Deckel des Zylinders befestigt. Der Zylinder trägt den Spiegel und kann durch eine besondere Vorrichtung arretiert werden.

Der von der Lampe kommende Lichtstrahl wird am Spiegel reflektiert und zu einem schmalen hellen Streifen auf der gebogenen Skala abgebildet (Lichtzeiger). Die Einstellung des Lichtzeigers auf den Nullpunkt der Skala geschieht

durch Drehen des Torsionskopfes, der um die vertikale Achse drehbar ist und mit einer seitlich angebrachten Schraube festgestellt werden kann.

Um dem Zylinder einen Drehimpuls zu erteilen, wird der Torsionskopf langsam um einen kleinen Winkel gedreht und schnell wieder in die Ausgangsstellung zurückgebracht.

In dieser Aufgabe wird die Bestimmung der Viskosität von Wasser und Benzol gefordert. Dazu wird das Dekrement der Dämpfung und die Schwingungsdauer des Zylinders mit und ohne Flüssigkeit bestimmt und ebenfalls die anderen Größen, die in die Formel (1) eingehen.

Zur Bestimmung des axialen Trägheitsmomentes K des leeren Glases mit Deckel wird die Schwingungsdauer des Zylinders mit einer Scheibe bekannten Trägheitsmomentes gemessen, die die Masse m und den Radius r besitzt. Die Berechnung des Trägheitsmomentes geschieht nach den Formeln

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{K}{f}} \quad \text{(für den Zylinder ohne Scheibe)}$$

und

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{K+I}{f}} \quad \text{(für den Zylinder mit Scheibe)},$$

wobei $I = \frac{1}{2} m r^2$ das Trägheitsmoment der Scheibe bedeutet. Daraus erhält man für K:

$$K = I \frac{T_1^2}{T_2^2 - T_1^2}.$$

Der innere Radius des Glases wird durch unmittelbares Ausmessen mit der Schublehre, die Masse der Flüssigkeit im Glase durch Wägung und die Höhe der Flüssigkeit durch Berechnung aus der Dichte der Flüssigkeit, ihrer Masse und dem Radius des Glases bestimmt. Die Schwingungsdauer wird mit einer Uhr aus der Messung von 30 bis 40 aufeinanderfolgenden Schwingungen bestimmt. Das logarithmische Dekrement der Dämpfung wird als der natürliche Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender Amplituden eines Vorzeichens bestimmt. Die Größen dieser Amplituden werden auf der Skala abgelesen.

Bevor man dem Zylinder einen Drehimpuls erteilt, muß man ihn so entarretieren, daß er in keinerlei Schwingungen gerät.

Das Anschrauben des Glases an den Deckel darf man nur bei arretiertem Deckel ausführen.

Die Ausrechnung. Die Ausrechnung geschieht nach dem Iterationsverfahren. Besonders einfach errechnet sich der angenäherte Wert für die kinematische Viskosität, wenn man in der Formel (1) $\sigma = 1$ setzt. Man erhält dann die erste Näherung. Einen genauen Wert findet man, wenn man vorher den Wert für y bestimmt, durch diesen Wert aus der Kurve (siehe Tabelle 17) die Größen a, b und c findet, aus diesen die Größe σ bestimmt und sie in die Formel (1) einsetzt. Das ist die zweite Näherung. Einen noch genaueren Wert für die kinematische Viskosität kann man finden, wenn man die dritte Näherung ausführt. Bei diesem Verfahren wird das logarithmische Dekrement der Dämpfung δ graphisch aus dem Tangens des Neigungswinkels der Geraden

$\ln A_n = \ln A_0 - \delta n$ bestimmt. Dabei ist auf der Abszisse die Nummer der Schwingung n und auf der Ordinate der natürliche Logarithmus der dieser Nummer entsprechenden Amplitude der Schwingung aufgetragen.

Diese Methode der Messung der Viskosität (kinematisch) hat E. G. SCHWIDKOWSKI ausgearbeitet. Sie wird angewendet zur Messung der Zähigkeit geschmolzener Metalle bei hohen Temperaturen.

Spezialliteratur

E. G. SCHWIDKOWSKI: „Die Messung der Zähigkeit geschmolzener Metalle". Bote der Moskauer Staatsunivers. Nr. 12 (1950), 43 (Е. Г. Швидковский, Измерение вязкости разплавленных металлов. Вестник МГУ, 12, стр. 43, 1950).

Aufgabe 33

Die Gesetze der BROWNschen Bewegung und die Bestimmung der Größe suspendierter Teilchen

Zubehör: 1. Mikroskop hoher Vergrößerung mit einer Anzahl Objektträger und Deckgläser, 2. Lampe, 3. Objektmikrometer, 4. Zeichenapparat, 5. Immersionsflüssigkeit, 6. Emulsion von Gummigutt, 7. Stoppuhr, 8. Nadel, 9. Meßzirkel, 10. Maßstab mit genauer Millimeterteilung, 11. Filterpapier.

Die Theorie der Erscheinung. Ein Teilchen aus Gummigutt (fast kugelförmig), das sich in einer Flüssigkeit befindet, erleidet von den es umgebenden Molekülen der Flüssigkeit Stöße. Das Teilchen ist so klein (Durchmesser $\approx 10^{-5}$ cm), daß sich die auf dieses Teilchen durch die Moleküle von allen Seiten übertragenen Impulse nicht in jedem gegebenen Moment kompensieren. Unter der Einwirkung dieser Impulse beginnt das Teilchen eine ungeordnete Bewegung, die die BROWN*sche Bewegung* genannt wird, auszuführen. Dieses Teilchen gibt seinerseits bei seiner Bewegung Energie an die es umgebenden Moleküle ab, und weil es noch genügend groß ist (seine lineare Ausdehnung ist annähernd tausendmal größer als die Ausdehnung der Moleküle), kann man auf das Teilchen das STOKESsche Gesetz von der Bewegung einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit anwenden.

Die ungeordnete BROWNsche Bewegung des Teilchens unterliegt folgendem Gesetz (EINSTEIN): Wenn man die Lage des Teilchens nach bestimmten Zeitintervallen beobachtet, so ist das mittlere Verschiebungsquadrat des Teilchens der Größe des ausgewählten Zeitintervalls proportional. Dabei hängt der Proportionalitätsfaktor von der Gaskonstanten, der absoluten Temperatur, der Zähigkeit der Flüssigkeit und dem Radius der Teilchen ab. Weiter unten wird die Ableitung dieser Abhängigkeit gegeben.

Wir betrachten die Projektion der Verschiebung des Teilchens auf irgendeine Richtung. Die Bewegungsgleichung des Teilchens kann geschrieben werden:

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = F_1 + F_2 .$$

Hierbei ist m die Masse des Teilchens, F_1 die aus allen Stößen der Flüssigkeitsmoleküle resultierende Kraft und F_2 der von der Viskosität der Flüssigkeit herrührende, die Bewegung des Teilchens hemmende Widerstand:

$$F_2 = -k\frac{dx}{dt}.$$

Nach dem STOKESschen Gesetz ist $k = 6\pi\eta r$ (das Teilchen wird als kugelförmig angenommen; siehe Aufgabe 31), wobei η die Viskositätskonstante, r der Teilchenradius und $\frac{dx}{dt}$ seine Geschwindigkeit bedeuten. Offensichtlich lautet damit die Bewegungsgleichung des Teilchens:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_1 - k\frac{dx}{dt}. \tag{1}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit x, so erhalten wir:

$$mx\frac{d^2x}{dt^2} = F_1x - kx\frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

Weil aber

$$x\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{dt^2}(x^2) - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \tag{3}$$

und

$$x\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}(x^2) \tag{4}$$

ist, erhalten wir, wenn wir (3) und (4) in (2) einsetzen,

$$\frac{m}{2}\cdot\frac{d^2}{dt^2}(x^2) - m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = F_1x - \frac{1}{2}k\frac{d}{dt}(x^2). \tag{5}$$

Uns interessieren nur die Mittelwerte dieser Größen, die man in dem Zeitintervall t beobachten kann. Weil die Bewegung völlig chaotisch vor sich geht, ist der gemittelte Wert des Produktes F_1x gleich Null. Bezeichnen wir

$$\frac{d}{dt}(\overline{x^2}) = l\,[1],$$

so erhalten wir:

$$-\frac{kl}{2} = \frac{m}{2}\cdot\frac{dl}{dt} - m\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}. \tag{5'}$$

Das letzte Glied der Gleichung (5′) stellt die doppelte mittlere kinetische Energie des Teilchens bei der BROWNschen Bewegung dar. Wenden wir auf seine Bewegung die Gesetze des idealen Gases an, so finden wir aus dem Vergleich der CLAPEYRONschen Gleichung mit der kinetischen Theorie der Gase:

$$\frac{1}{2}mc^2 = \frac{3RT}{2N}.$$

Betrachten wir die Komponente der Geschwindigkeit längs einer Achse (der X-Achse), so erhalten wir:

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{RT}{N}, \tag{6}$$

[1]) Der Querstrich bedeutet, daß der Mittelwert der darunterstehenden Größe genommen wird.

wobei N die LOSCHMIDTsche Zahl, T die absolute Temperatur der Flüssigkeit und R die universelle Gaskonstante bedeuten. Setzen wir (6) in (5′) ein, so finden wir:

$$-\frac{kl}{2}=\frac{m}{2}\cdot\frac{dl}{dt}-\frac{RT}{N}, \tag{7}$$

woraus folgt

$$\frac{dl}{l-\frac{2RT}{Nk}}=-\frac{k}{m}dt.$$

Integrieren wir diese Gleichung von 0 bis t, so erhalten wir:

$$l-\frac{2RT}{Nk}=C\cdot e^{-\frac{k}{m}t}, \tag{8}$$

wobei C eine Integrationskonstante ist.

Wenn die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Beobachtungen des Teilchens genügend groß ist, kann man das auf der rechten Seite der Gleichung stehende Glied vernachlässigen, das ergibt:

$$l=\frac{2RT}{Nk} \tag{9}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{x^2}\right)=\frac{2RT}{6\pi\eta rN}.$$

Integrieren wir die letzte Gleichung (die Integrationskonstante ist Null, weil für $t=0$ auch $x=0$ ist), so erhalten wir einen Ausdruck für das mittlere Verschiebungsquadrat eines Teilchens bei der BROWNschen Bewegung:

$$\overline{x^2}=\frac{2RT}{6\pi\eta rN}t. \tag{10}$$

Das Hauptziel der Arbeit (Übung 1) ist die Prüfung dieses Gesetzes, d. h. die Prüfung der Proportionalität zwischen dem mittleren Verschiebungsquadrat und der Beobachtungsdauer. Die zweite Übung besteht in der Bestimmung der Größe der Teilchen, die eine BROWNsche Bewegung ausführen.

Die Beschreibung der Geräte und Anordnungen. Über das Mikroskop siehe Aufgabe 72.

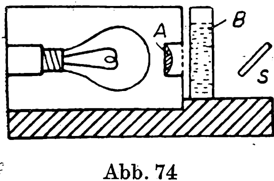


Abb. 74

Die Beleuchtungseinrichtung besteht aus einer Lampe, die in einem Kasten steckt (Abb. 74). Ihr Licht wird durch einen Kondensor A gesammelt, geht durch eine Küvette mit Wasser, die die Wärmestrahlung absorbiert und fällt auf den Spiegel S des Mikroskops als ein nahezu paralleles Strahlenbündel.

Der Paraboloid-Kondensor. Weil die in dieser Aufgabe zu beobachtenden Teilchen des Gummigutts eine Größe besitzen, die an der Grenze des Auflösungsvermögens des Mikroskops liegt, benutzt man in der vorliegenden Anordnung ein ultramikroskopisches Beobachtungsverfahren, das mit einem

Paraboloid-Kondensor arbeitet (Abb. 75). Dieser Kondensor gibt uns die Möglichkeit, die Kugeln des Gummigutts (ihr Radius ist von der Größenordnung 0,5 μ) im Mikroskop als leuchtende Punkte auf dunklem Untergrund zu beobachten.

Der Strahlengang im Paraboloid-Kondensor ist in der Abb. 75 gezeigt. Die ausgezogenen Linien stellen die zur Beleuchtung dienenden Strahlen und die gestrichelten die am Objekt gebeugten Strahlen dar. Das parallele Strahlenbündel fällt auf den plankonvexen Glaskörper P, dessen Oberfläche (seitlich) ein Rotationsparaboloid darstellt. Dabei werden die Mittelstrahlen kleiner Apertur (von 0 bis 1,1) durch den Schirm B abgehalten. Die Randstrahlen mit großer Apertur (von 1,1 bis 1,4) werden an der seitlichen Oberfläche des Paraboloids reflektiert und gehen durch die Immersionsflüssigkeit F, den Objektträger, das Präparat und das Deckglas. An der obersten Oberfläche des Glases werden die Strahlen total reflektiert und treten durch die gleiche untere Fläche des Kondensors wieder aus, durch die sie eingetreten sind.

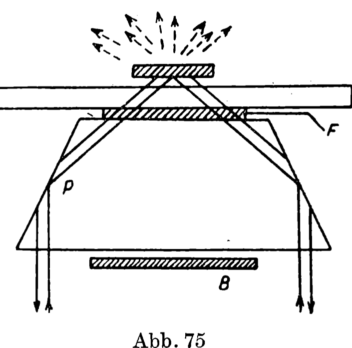


Abb. 75

Treffen die Strahlen jedoch auf ihrem Wege im Präparat (oder in der Immersionsflüssigkeit und auf den Oberflächen des Objektträgers und des Deckglases) auf Teilchen auf, deren Größe mit der Wellenlänge vergleichbar ist, so werden sie durch Beugung gestreut. Ein Teil von ihnen gelangt in das Mikroskop und erzeugt ein Beugungsbild in der Form leuchtender Punkte oder heller Ringsysteme. Die Form dieses Bildes gibt, allgemein gesagt, nicht genau die Form des Teilchens wieder, weil es für eine ähnliche Abbildung notwendig ist, daß das Hauptmaximum des Beugungsbildes, und nach Möglichkeit auch noch mehrere Nebenmaxima, in das Mikroskop fallen. Dies ist in dem gegebenen Falle nicht erfüllt. Nimmt man jedoch von der Forderung, ein auch nur annähernd ähnliches Bild des Gegenstandes zu erhalten, Abstand, und strebt man nur danach, sein Vorhandensein und seine Lage nachzuweisen, so ist die beschriebene Anordnung völlig ausreichend.

Der Paraboloid-Kondensor ist unter dem Tischchen des Mikroskops anmontiert. Mit Hilfe einer Schraube kann er in seiner Höhe einreguliert werden. Die Fassung des Kondensors enthält eine Irisblende. Um ihre Öffnung zu verändern, wird ein kleiner Spezialhebel betätigt. Will man den Paraboloid-Kondensor seitlich entfernen, muß man ihn an der Schraube so weit herunterdrehen, bis er vom Führungsstab, der von unten an dem Tischchen des Mikroskops befestigt ist, gleitet.

Der Zeichenapparat. Das Prinzip seiner Wirkungsweise geht schon aus der Abb. 76 hervor. Über dem Okular des Mikroskops ist ein Glaswürfel *acbd* angebracht, dessen Diagonalschnitt *ab* auf der zum Auge zugewandten Seite versilbert ist. Die Mitte des Schnittes ist unversilbert gelassen. Durch sie fallen die Strahlen aus dem Mikroskop in das Auge. Gleichzeitig sieht das

Auge das Bild des Papierblattes B über den Spiegel A und das versilberte Stück des Schnittes ab.

Diese Anordnung wird an dem Tubus des Mikroskops mit Hilfe eines Klemmringes K und der Schraube S befestigt (Abb. 77). Die versilberte Fläche im Würfel schränkt das Gesichtsfeld des Mikroskops wesentlich ein. Dieser Nachteil wird teilweise dadurch beseitigt, daß sich der Würfel über dem Okular mit Hilfe der Schrauben L und H verschieben läßt.

Die Helligkeit der Abbildung des Papiers kann durch ein Drehen der Kappe R verändert werden, die an ihrer seitlichen Fläche sechs Fenster hat, von denen fünf mit Graugläsern verschiedener Durchlässigkeit versehen sind.

Die Helligkeit der durch das Mikroskop erzeugten Abbildung wird ebenfalls durch solche Gläser verändert, die in die Scheibe B eingesetzt sind. Der Würfel kann zusammen mit den lichtschwächenden Anordnungen in die punktiert gezeichnete Stellung (mit Hilfe der Schraube H) herausgedreht werden.

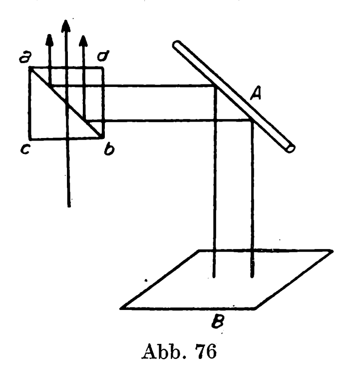


Abb. 76

Die Messung. Die Anfertigung des Präparates. In die Vertiefung (Höhlung) des Objektträgers, die vorher sorgfältig ausgewischt worden ist, werden mit einer Pipette 3 bis 4 Tropfen suspendierten Gummigutts gebracht. Das Präparat wird mit einem sauberen Deckglas bedeckt, wobei man darauf achten muß, daß darunter keine Luftblase entsteht. Der überflüssige Teil der Flüssigkeit, der zwischen den Glasplättchen herausquillt, wird mit Filterpapier entfernt.

Die Anordnung. Man stellt das Mikroskop auf die Plattform der Beleuchtungseinrichtung (man prüfe nach, ob die Küvette mit Wasser gefüllt ist), bringt auf das obere Glas des Paraboloid-Kondensors die Immersionsflüssigkeit und legt das Präparat auf das Mikroskoptischchen. Die Höhe des Paraboloid-Kondensors muß so eingestellt werden, daß sich zwischen ihm und dem Objektträger eine dünne Schicht der Immersionsflüssigkeit ohne Luftblasen bildet. Dabei muß man darauf achten, daß der Objektträger auf dem Tischchen und nicht auf dem Kondensor liegt, weil man letzteren sonst beschädigen würde. Außerdem muß völlige Sauberkeit sowohl des Präparates als auch der Oberflächen des Paraboloid-Kondensors gewährleistet sein, weil kleinste Verunreinigungen Beugungsbilder hervorrufen können, die die Beobachtung der Gummiguttteilchen stark erschweren.

Der Tubus des Mikroskops wird soweit wie möglich hochgeschoben und an ihm der Zeichenapparat befestigt. Das Mikroskop wird bei herausgedrehtem Würfel des Zeichenapparats scharf eingestellt. Bei der Scharfeinstellung muß man sehr vorsichtig sein, um das Deckglas nicht zu zerdrücken. Unter den Spiegel des Zeichenapparats wird ein glattes weißes Stück Papier gelegt, und man muß zu erreichen versuchen, daß durch den Würfel gleichzeitig die Teilchen des Gummigutts und die Spitze der Nadel auf dem Untergrund

des Papiers gut zu sehen sind. Dabei soll man das Auge nicht zu nahe an den Würfel heranbringen.

Zur Feststellung gleicher Zeitintervalle, z. B. 5 Sekunden, dient entweder eine Stoppuhr oder ein Metronom.

Das Aufzeichnen des Weges der Teilchen. Man wählt ein gut beobachtbares sich bewegendes Teilchen aus, bringt sein Bild (durch den Zeichenapparat) mit der Nadelspitze zur Deckung und folgt mit ihr dem sich bewegenden Teilchen. Alle 5 Sekunden wird die Stellung des Teilchens auf dem Papier markiert. Der zweite Beobachter schreibt an jeden Einstich mit spitzem Bleistift eine möglichst kleine Zahl. Um nicht zu verwechseln, welche Zahl zu welchem Einstich gehört, muß man die Zahl zuerst und nach Möglichkeit auch weiterhin stets von einer bestimmten Seite, z. B. links oder rechts vom

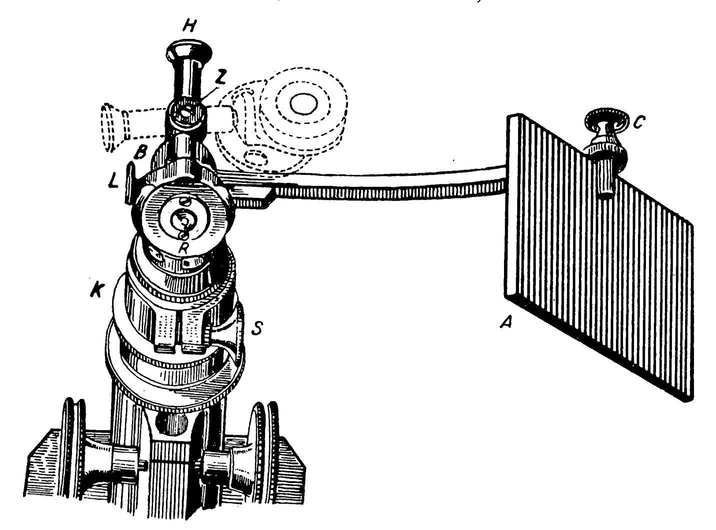


Abb. 77

Einstich, hinschreiben. Man muß ebenfalls darauf achten, daß das Papier sich während des Versuches nicht verschiebt (mit Reißzwecken befestigen). Wenn das beobachtete Teilchen sich dem Rande des Gesichtsfeldes des Zeichenapparates nähert, muß man mit Hilfe der Schrauben L und H den Würfel verschieben (Abb. 77).

Verschiebt sich das Teilchen in der Höhe, so verschwimmt sein Bild. Man muß dann mit der Mikrometerschraube des Mikroskops die Schärfe nachstellen.

Da eine statistische Gesetzmäßigkeit nachgewiesen werden soll, wird das Ergebnis um so genauer ausfallen, je mehr Punkte man aufgenommen hat. Jedoch ist die Möglichkeit, eine große Anzahl von Punkten für ein Teilchen zu erhalten, durch folgende Umstände eingeschränkt: Das Teilchen verschwindet ziemlich schnell aus dem Gesichtsfeld des Mikroskops, und bei großer Dichte

der Einstiche kann man die Teilchen leicht verwechseln. Das erschwert die Auswertung der erhaltenen Ergebnisse.

Man kann diese beiden Schwierigkeiten folgendermaßen umgehen: Wenn das Teilchen sich merklich dem Rand des Gesichtsfeldes des Mikroskops nähert, muß man das Präparat um so viel verrücken, daß das Teilchen erneut in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheint. Danach werden die Markierungen fortgesetzt. Die Verschiebung der Teilchen während des erneuten Einrichtens des Präparates wird natürlich nicht gezählt. Hierbei ist aber zu befürchten, daß beim Verrücken des Präparates, sobald man das beobachtete Teilchen aus den Augen läßt, eine Verwechslung mit irgendeinem anderen Teilchen passieren kann. Die zweite Schwierigkeit läßt sich einfach durch schnelles Auswechseln des Papierblattes mit einem anderen beheben.

Für jedes beobachtete Teilchen kann man sich auf 20 bis 30 Einstiche beschränken.

Der Versuch muß 2- bis 3mal wiederholt werden. Nach Beendigung des Versuches muß die Immersionsflüssigkeit sorgfältig vom Paraboloid-Kondensor entfernt werden. Der Kondensor selbst wird heruntergeschraubt und bis zum Anschlag zur Seite gedreht. Danach muß man mit dem Objektmikrometer und einem Maßstab (der Maßstab wird an die Stelle des Papiers gelegt) die Linearvergrößerung der Anordnung bestimmen.

Die Auswertung der Meßergebnisse. Die Prüfung des EINSTEINschen Gesetzes. Der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Einstichen stellt die vergrößerte Abbildung der Projektion der resultierenden Verschiebung des Teilchens auf die Fokalebene während des entsprechenden Zeitintervalls (5 Sekunden) dar. Für die Prüfung des EINSTEINschen Gesetzes muß man die Projektion des mittleren Verschiebungsquadrats auf die Fläche, d. h., das mittlere Quadrat des Abstandes zwischen aufeinanderfolgenden Einstichen oder das mittlere Quadrat der Projektion des Abschnittes zwischen zwei aufeinanderfolgenden Einstichen auf irgendeine Achse finden. Den Abstand zwischen zwei Einstichen kann man nur dann unmittelbar messen, wenn die Bewegung der Teilchen während der Versuchszeit wirklich ungeordnet verlief, d. h., daß keine Vorzugsrichtung für die Bewegung des Teilchens (z. B. Strömung) festgestellt werden konnte. Ist eine Strömung vorhanden, so muß man ihre Komponente durch Projektion der Abstände zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten mit Hilfe eines Dreiecks auf eine senkrecht zur Strömungsrichtung verlaufende Achse ausschalten und das mittlere Quadrat der entsprechenden Projektion bilden.

Die Abstände zwischen den Einstichen mit den Nummern n und $n + 2$, $n + 1$ und $n + 3, \ldots, n + k$ und $n + k + 2$, und entsprechend n und $n + 3$, $n + 1$ und $n + 4$, $n + k$ und $n + k + 3$ (oder zwischen ihren Projektionen) ergeben offensichtlich die entsprechenden Projektionen der Verschiebung des Teilchens während 10 und 15 Sekunden. Der Mittelwert ihrer Quadrate muß in Übereinstimmung mit dem EINSTEINschen Gesetz zweimal und dreimal so groß sein wie das entsprechende mittlere Verschiebungsquadrat während 5 Sekunden.

Die Bestimmung des Teilchenradius. (Kann nur bei genügend genauer Übereinstimmung der Versuchsergebnisse mit dem EINSTEINschen

Gesetz durchgeführt werden.) Der Radius der Teilchen kann aus der Formel (10), die das EINSTEINsche Gesetz wiedergibt, berechnet werden. In dieser Formel ist $\overline{x^2}$ die Projektion des mittleren Verschiebungsquadrats der Teilchen auf irgendeine Achse. Die Beobachtungszeit betrage dabei t Sekunden. Wenn der Abstand L zwischen zwei Einstichen unmittelbar gemessen wurde, muß man die Beziehung benutzen:

$$\overline{L^2} = 2\overline{x^2}.$$

Um den wahren Wert von L und x zu erhalten, muß man natürlich die Vergrößerung des Mikroskops berücksichtigen.

Spezialliteratur

1. CL. SCHAEFER: „Einführung in die theoretische Physik", Bd. II. Verlag W. de Gruyter, Berlin 1953.
2. A. SOMMERFELD: „Vorlesungen über theoretische Physik", Bd. V: Thermodynamik und Statistik. Dietrichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1952.

Literatur

1. L. BERGMANN und CL. SCHAEFER: „Lehrbuch der Experimentalphysik", Bd. I. Verlag W. de Gruyter, Berlin 1954.
2. L. BERGMANN, CL. SCHAEFER und W. KLIEFOTH: „Grundaufgaben des physikalischen Praktikums". B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1948.
3. S. E. FRISCH und A. W. TIMOREWA: „Lehrgang der allgemeinen Physik", Bd. I. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955.
4. CHR. GERTHSEN: „Physik, ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen". Volk und Wissen Verlags-GmbH, Berlin/Leipzig 1948.
5. E. GRIMSEHL: „Lehrbuch der Physik", Bd. I: Mechanik, Wärmelehre, Akustik. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1955.
6. F. KOHLRAUSCH: „Praktische Physik", Bd. I. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1953.
7. R. W. POHL: „Einführung in die Mechanik, Akustik und Wärmelehre". Verlag J. Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955.
8. A. RECKNAGEL: „Physik", Mechanik. VEB Verlag Technik, Berlin 1955.
9. W. SCHALLREUTER: „Einführung in die Physik", Bd. II. Verlag W. Knapp, Halle (Saale) 1953.
10. W. H. WESTPHAL: „Physik", ein Lehrbuch. Verlag J. Springer, Berlin 1950.
11. W. H. WESTPHAL: „Physikalisches Praktikum". Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig 1952.

DRITTER TEIL

ELEKTRIZITÄT

Aufgabe 34

Der elektrolytische Trog

Zubehör: 1. Galvanometer mit Schaltschnüren und Sonden, 2. metallische verschiedenförmige Elektroden, 3. Kasten mit Sand, 4. Zylinder und Ring aus einem Dielektrikum.

Einführung. Bekanntlich ist das elektrostatische Feld in jedem Punkte des Raumes durch die Größe der Feldstärke $\mathfrak{E}$ und der Größe des elektrostatischen Potentials V charakterisiert. Die Richtung des Vektors der Feldstärke in jedem Punkte des Feldes und die Potentialverteilung des Feldes kann man besonders anschaulich darstellen, wenn man die Begriffe der Kraftlinien und der Flächen gleichen Potentials, der sogenannten *Äquipotentialflächen,* benutzt.

Mit *Kraftlinien* des elektrostatischen Feldes bezeichnet man solche Linien, deren Tangenten in jedem Punkte mit dem Vektor der Feldstärke, d. h. mit der Richtung der Kraft, die auf eine positive Ladung in demselben Punkte des Feldes wirkt, zusammenfallen. Übereinstimmend mit dem physikalischen Sinn des Begriffes: „Potential", stehen die Kraftlinien stets senkrecht auf den Äquipotentialflächen. So stehen z. B. die Kraftlinien auf der Oberfläche eines Leiters, der sich in einem elektrostatischen Feld befindet, senkrecht, weil ein Leiter in jedem Punkte seines Volumens das gleiche Potential besitzt.

An der Trennfläche zweier Medien mit den Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2 erfüllen die Komponenten von $\mathfrak{E}$ bekanntlich folgende Grenzbedingungen:

$$E_{t_1} = E_{t_2}; \qquad \varepsilon_1 E_{n_1} = \varepsilon_2 E_{n_2}.$$

Hierbei sind E_t die tangentiale und E_n die normale Komponente des Vektors $\mathfrak{E}$ im ersten und im zweiten Medium. Folglich müssen die Winkel zwischen den Kraftlinien (genauer die Winkel zwischen den Tangenten an sie) und den Normalen der Trennfläche die Bedingung erfüllen:

$$\varepsilon_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = \varepsilon_2 \operatorname{tg} \alpha_2.$$

In diesem Falle spricht man von einer Brechung der Kraftlinien.

An der Trennfläche der Dielektrika ändern sich ebenfalls die Richtungen der Tangenten an die Äquipotentialflächen. Die Winkel zwischen den Tangenten und der Richtung der Trennflächennormalen sind durch die Beziehung verknüpft:

$$\varepsilon_1 \operatorname{ctg} \beta_1 = \varepsilon_2 \operatorname{ctg} \beta_2.$$

Weil die Kraftlinien zu den Äquipotentialflächen orthogonal sind, gilt:

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Genauer werden alle diese Fragen in den Lehrbüchern der Physik behandelt, die sich mit den Grundlagen der Elektrostatik befassen. Man muß nur im Auge behalten, daß manche Lehrbücher unter Kraftlinien des elektrischen Feldes Linien verstehen, die den Richtungen des Vektors der dielektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ und nicht den der Feldstärke $\mathfrak{E}$ entsprechen. Doch läßt sich diese Darstellungsmethode mit der Beschreibung der vorliegenden Aufgabe ohne Schwierigkeiten vergleichen.

Die experimentelle Untersuchung des elektrostatischen Feldes an den einfachsten Beispielen und seine Beschreibung mit Hilfe der erwähnten Charakteristiken (Kraftlinien und Äquipotentialflächen) stellen den Inhalt dieser Aufgabe dar.

Der praktischen Ausführung der Aufgabe müssen folgende wesentliche Bemerkungen vorausgeschickt werden:

Daß die Kraftlinien zu den Äquipotentialflächen orthogonal sind, erleichtert sowohl die experimentellen als auch die theoretischen Untersuchungen des elektrostatischen Feldes. Sobald man nämlich die Werte des Vektors der elektrischen Feldstärke gefunden hat, lassen sich die Äquipotentialflächen wesentlich leichter bestimmen. Umgekehrt gilt auch: Ist die Lage der Äquipotentialflächen gefunden, so lassen sich leicht die Kraftlinien des Feldes einzeichnen. Die letzte Möglichkeit findet praktische Anwendung.

In der Tat ist es experimentell und theoretisch wesentlich leichter, den Potentialverlauf im elektrischen Feld als seine Feldstärke zu messen und zu berechnen, wenn auch die unmittelbare Messung und Berechnung der Feldstärke selbst möglich ist. Eine große Zahl von elektrischen Meßgeräten, in erster Linie die auch in unserer Aufgabe benutzten Sonden, messen in Verbindung mit Elektrometern die Potentialdifferenz zwischen den verschiedenen Punkten des Feldes und nicht die Feldstärke. Die theoretische Berechnung der Potentialverteilung als einer skalaren Größe ist leichter als die Berechnung des Vektorfeldes $\mathfrak{E}$.

Deshalb wird auch in der vorliegenden Aufgabe die Potentialverteilung des Feldes gemessen und nicht seine Feldstärke. Im Endergebnis werden die Kraftlinien orthogonal zu den experimentell gefundenen Äquipotentialflächen eingezeichnet.

Die Untersuchung eines elektrostatischen Feldes durch Sonden ist jedoch schwierig. Deshalb wird in dieser Aufgabe die Untersuchung eines elektrostatischen Feldes unbewegter Ladungen ersetzt durch die Untersuchung des zeitlich konstanten (stationären) Feldes eines elektrischen Stromes. Dazu muß in dem zu untersuchenden Teil des Raumes das Feld der Ladungen (die auf der Oberfläche des vom Strom umflossenen Leiters sitzen) seiner Struktur nach mit dem elektrostatischen Feld zusammenfallen.

Zeigen wir das eben Gesagte an einem einfachen Beispiel: Wir nehmen zwei konzentrische metallische Kugeln. Sind beide Kugeln aufgeladen, so herrscht in der *Kugelzone* zwischen ihnen ein elektrostatisches Feld bekannter Konfiguration, das nur durch die Ladung der inneren Kugel bestimmt ist. Die Äquipotentialflächen sind in diesem Falle konzentrische Kugeln, die Kraftlinien sind radial gerichtet, und die Feldstärke nimmt mit $\frac{1}{R^2}$ ab. Nun füllen

wir die Zone zwischen den Kugeln mit einer homogenen leitenden Substanz, die eine sehr viel kleinere Leitfähigkeit besitzen möge als die Kugeln. Erzeugen wir zwischen den Kugeln durch Anlegen einer Batterie die gleiche Potentialdifferenz wie im ersten Fall, dann fließt natürlich durch die Kugelzone ein konstanter Strom.

Bekanntlich treten bei einem mit konstantem Strom durchflossenen homogenen Leiter keine Raumladungen auf. Das bedeutet, daß das Feld in der Zone zwischen den Kugeln genauso aussieht wie das von *nur* statisch aufgeladenen Kugeln ohne leitende Substanz in der *Kugelzone*.

Deshalb können wir die Untersuchung des elektrostatischen Feldes zwischen aufgeladenen Leitern durch die Untersuchung des elektrostatischen Feldes eines konstanten Stromes zwischen den gleichen Leitern ersetzen, wenn die Potentiale dieser Leiter konstant gehalten werden und wenn eine Beziehung zwischen den Leitfähigkeiten der Substanz und den Leitern besteht, die Annahmen über die Äquipotentialflächen zu machen gestattet.

Die angeführte Ersetzung der Untersuchung eines Feldes unbewegter Ladungen durch die Untersuchung des Feldes eines stationären Stromes bringt große experimentelle Vorteile mit sich. Denn, führen wir in das leitende Medium als Sonden einfache metallische Elektroden ein, so erhalten wir automatisch eine Angleichung der Potentiale der Sonde und des Punktes des Feldes, an dem die Sonde eingeführt worden ist[1]).

Die Sonden können in diesem Fall mit stromanzeigenden und nicht mit elektrostatischen Instrumenten verbunden werden. Anodenbatterien sorgen für die Konstanz der Potentiale des Feldes. Man muß hierbei beachten, daß der Stromkreis der Sonden einen höheren Widerstand besitzen muß als das Medium zwischen den Punkten, an denen diese Sonden stehen, sonst wird beim Einschalten der Sonden das Feld verzerrt.

Die praktische Ausführung einer derartigen Meßmethode geht aus der Beschreibung der in dieser Aufgabe verwendeten Anordnung hervor.

Die Beschreibung des Experimentes. Zur Untersuchung des qualitativen Bildes eines elektrostatischen Feldes wird folgende Methode verwendet: In einen Holzkasten, der mit feuchtem Sand gefüllt ist, werden metallische Elektroden gestellt. Die konstante Potentialdifferenz zwischen ihnen wird durch eine Gleichstromquelle erzeugt. Der feuchte Sand besitzt, verglichen mit Metallen, eine unwesentliche Leitfähigkeit. Deshalb kann man die Elektroden

---

[1]) Wendet man die Sondenmethode in einem nicht leitenden Medium an, z. B. in Luft, so kann eine automatische Angleichung des Potentials des Punktes des Feldes und der an diesem Punkte eingeführten Sonde nicht erfolgen. Um diese Angleichung herbeizuführen, muß eine Möglichkeit geschaffen werden, damit elektrische Ladungen zur Sonde fließen (oder von ihr abfließen) können. Das kann im einfachsten Fall durch die Anwendung einer *Flammensonde* realisiert werden. Die Flammensonde ist ein enges Rohr, durch das man während des Betriebes Leuchtgas schickt und an seiner Öffnung entzündet. Das Rohr ist durch einen Draht mit einem Elektrometer verbunden. Die in der Flamme befindlichen Ionen (und Elektronen) gleichen das Potential der Sonde und des Punktes des Feldes, an dem die Sonde steht, aus. Eine vollkommenere Sonde für nicht leitende Medien stellt eine Anordnung dar, die die Leitfähigkeit des Mediums durch ein radioaktives Präparat erzeugt. Eine wichtige Anwendung findet die Sondenmethode bei der Untersuchung nicht homogener elektrischer Felder, wie sie beim Durchgang eines elektrischen Stromes durch Gase auftreten.

als Äquipotentialflächen auffassen. Das bildet die prinzipiell notwendige Bedingung dafür, daß das elektrische Feld eines stationären Stromes seiner Form nach gleich dem elektrostatischen Feld zwischen denselben Elektroden ist. Man läßt durch den Sand einen konstanten Strom fließen. Um die Potentialverteilung zu untersuchen, nimmt man zwei spitze metallische Sonden, die mit einem Galvanometer als Nullinstrument verbunden sind[1]). Die eine Sonde davon wird an irgendeinem Punkte des Sandes vertikal hineingesteckt, während man mit der anderen auf dem Sand solche Punkte sucht, für die das Galvanometer keinen Ausschlag zeigt. Verbindet man diese Punkte durch eine Kurve, so erhält man auf der Oberfläche des Sandes eine Äquipotentiallinie.

Auf die gleiche Weise kann man eine ganze Schar von Äquipotentialkurven gewinnen. Da diese Äquipotentialkurven zu den Kraftlinien orthogonal sind, kann man, wie schon oben gesagt, leicht die erhaltene Kurvenschar durch Kraftlinien graphisch vervollständigen und damit ein vollständiges qualitatives Bild des elektrostatischen Feldes erhalten.

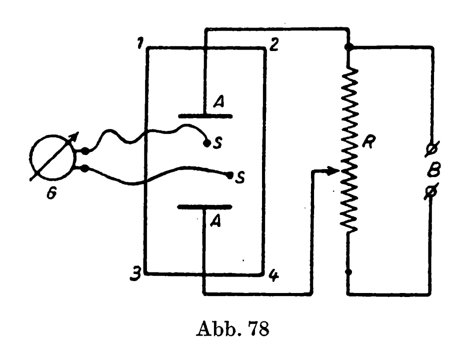


Abb. 78

Die beschriebene Methode zur Untersuchung des elektrostatischen Feldes hat nicht nur anschauliche Bedeutung, sondern ist auch in der Praxis stark verbreitet. Sie findet praktische Nutzanwendung bei der Untersuchung komplizierter elektrostatischer Felder, deren genaue Berechnung wegen der komplizierten Randbedingungen sehr schwierig ist (Mehrelektrodenröhren bei einem Fehlen von Raumladungen, elektrostatische Linsen, Photoelektronen-Vervielfacher). Dabei hat das Ähnlichkeitsgesetz der Potentialfelder, das die Untersuchung eines Feldes in größerem Maßstab erlaubt, prinzipiellen Wert. Das Ähnlichkeitsgesetz besagt: Wenn alle Ausmaße der Elektroden, die das Feld erzeugen, und alle Abstände zwischen ihnen im gleichen Verhältnis verändert werden, bleibt die Struktur des Feldes die gleiche (das gleiche gilt auch für einige Probleme der Hydrodynamik und Wärmeleitung). Bei genauerer Untersuchung eines Feldes wird es gewöhnlich im vergrößerten Maßstab in einer mit einem Elektrolyten gefüllten Wanne erzeugt. Die Stellung der Sonde wird auf Papier mit einem Schreiber fixiert, der mit der Sonde verbunden ist (Storchschnabel). Die „Anzeige" der Sonde wird an einem elektrischen Meßinstrument abgelesen, mit dem die Sonde verbunden ist.

Das bei dieser Aufgabe benutzte Schaltbild ist in Abb. 78 dargestellt, wobei *AA* die Elektroden, *B* die Gleichstromquelle mit einer Spannung von 10 V,

[1]) Mit Galvanometer als Nullinstrument wird ein Zeigergalvanometer bezeichnet, dessen Nullpunkt so auf der Skala liegt, daß der Zeiger symmetrisch nach beiden Seiten, je nach der Stromrichtung im Galvanometer, ausgelenkt werden kann.

SS die Sonden, *G* das Nullinstrument (Galvanometer), *R* den Spannungsteiler, *1, 2, 3, 4* den Umriß des Sandkastens bezeichnen.

Die Messung. 1. Man zeichnet in den Sand und dann in das Protokollheft die Äquipotentiallinien des Feldes zwischen zwei mit dem Spannungsteiler verbundenen Platten, die parallel zueinander aufgestellt sind und im Sand das Feld eines Plattenkondensators nachbilden[1]).

2. Man drückt zwischen die Platten einen metallischen Zylinder in den Sand und zeichnet erneut die Äquipotentialkurven auf.

3. Man legt in einem gewissen Abstand voneinander zwei metallische Kugeln auf den Sand, drückt sie bis zur Hälfte hinein und legt an sie eine Spannung. (Dieses System der Elektroden kann man als einen elektrischen Dipol ansehen.) Wie oben, zeichnet man wieder die Äquipotentialkurven auf.

4. In die Darstellungen der Äquipotentialkurven aller untersuchten Felder zeichnet man die Kraftlinien ein, die zu den Äquipotentialkurven orthogonal verlaufen.

Spezialliteratur

A. von Weiss: „Übersicht über die theoretische Elektrotechnik", 1. Teil: Die physikalisch-mathematischen Grundlagen. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, Leipzig 1954.

Aufgabe 35

Die Eichung eines Amperemeters und eines Voltmeters

Irgendein Meßinstrument eichen bedeutet, die Übereinstimmung zwischen den Skalenteilen und den Werten einer auf dieser Skala abgelesenen Größe festzulegen. Es ist bequem, die Ergebnisse der Eichung in Form einer Eichkurve, d. h. einer graphischen Abhängigkeit der abgelesenen Skalenteile von der zu messenden Größe, darzustellen. Die Eichkurve gestattet es, den Wert der Skalenteilstriche des Gerätes zu bestimmen; er ist eine Konstante, wenn das Ergebnis der Eichung als eine Gerade dargestellt werden kann. Der Wert der Skalenteilstriche des Gerätes ist in diesem Falle zahlenmäßig gleich dem Tangens des Neigungswinkels der Geraden mit der Abszissenachse.

Übung 1

Die Eichung eines Amperemeters

Zubehör: 1. Amperemeter, 2. Akkumulator, 3. Stöpselrheostat, 4. Schalter.

Die Beschreibung der Anordnung. Um ein Amperemeter zu eichen, muß man durch dieses einen Strom bekannter Stärke schicken und die Anzeige des

---

[1]) Mit dem Spannungsteiler stellt man zwischen den Platten (oder anderen Elektroden) eine solche Potentialdifferenz ein, daß der Zeiger des Galvanometers bei einem Abstand von etwa 1 cm zwischen den Sonden (in Feldrichtung) nicht über den Rand der Skala hinausschlägt.

Amperemeters mit den Werten dieser Stromstärke vergleichen. Eine der Eichmethoden besteht darin, daß das Amperemeter in einen Stromkreis geschaltet wird, der einen bekannten Widerstand enthält und dessen Stromquelle eine bekannte Urspannung[1]) (elektromotorische Kraft) besitzt. Dann kann die Stromstärke in diesem Kreis nach dem OHMschen Gesetz ausgerechnet und die Anzeige des Amperemeters mit diesen ausgerechneten Werten der Stromstärke verglichen werden.

Eine andere Möglichkeit, ein Amperemeter zu eichen, besteht darin, daß es zusammen mit einem anderen schon vorher geeichten Amperemeter hintereinander in einen Stromkreis geschaltet wird und die Anzeigen beider Geräte miteinander verglichen werden. Den Ausgangspunkt bei der Eichung stromanzeigender Instrumente bildet der Vergleich ihrer Anzeige mit der Größe der elektrischen Ladung, die in der Zeiteinheit durch das Instrument fließt. Die Elektrizitätsmenge aber wird aus der chemischen Wirkung des Stromes bestimmt. Damit werden wir uns bei der Beschreibung der Aufgabe 45 näher befassen.

In der vorliegenden Aufgabe wird die erste der eben beschriebenen Methoden zur Eichung eines Amperemeters benutzt. Das Schaltbild des dafür benötigten Stromkreises ist in Abb. 79 dargestellt. Darin bezeichnet A das Amperemeter, R den Stöpselrheostaten, K den Schalter zum Schließen des Stromkreises und B den Akkumulator, der in diesem Falle als Stromquelle dient und dessen Klemmenspannung bekannt ist. Die Akkumulatoren sind im allgemeinen keine Stromquellen mit einer genau bestimmten Klemmenspannung, und bei genauen elektrischen Messungen verwendet man statt ihrer sogenannte *Normalelemente* (siehe Beschreibung der Aufgabe 41). Die Akkumulatoren werden bei genauen Messungen nur als Hilfsstromquellen benutzt, deren Klemmenspannung nicht in die Berechnungen der Meßergebnisse eingeht[2]). Jedoch vermögen die Normalelemente keine großen Ströme zu liefern, die z. B. zur Eichung grober technischer Instrumente (wie man sie auch zu Messungen im Praktikum benutzt) benötigt werden. Aus diesem Grunde wird in dieser Aufgabe ein Akkumulator verwendet.

Die Stromstärke im Kreis des Amperemeters kann aus der Formel

$$I = \frac{E}{R + \varrho}$$

errechnet werden, wobei E die Urspannung des Akkumulators, R den in den Stromkreis geschalteten Widerstand des Stöpselrheostaten und ϱ den Wider-

---

[1]) Hierbei, wie auch im weiteren, muß man zwischen der Urspannung und der Klemmenspannung (Arbeitsspannung) unterscheiden. Die Stromstärke beträgt nach dem OHMschen Gesetz:

$$I = \frac{E}{R_a + R_i},$$

wobei I die Stromstärke, E die Urspannung, R_a der äußere Widerstand und R_i der innere Widerstand der Stromquelle bedeuten. Nur in dem Fall $R_i \ll R_a$ kann man $I = \frac{E}{R_a}$ setzen, wie es hier im weiteren getan wurde. (Anm. d. Übers.)

[2]) Für genaues Arbeiten benutzt man besser mit Säure und nicht mit Lauge gefüllte Akkumulatoren, weil erstere eine konstantere Spannung liefern.

stand des Amperemeters bedeuten. Den Widerstand des Akkumulators und der Schaltschnüre kann man vernachlässigen, weil sie nur einige hundertstel Ohm betragen. Der Widerstand des Amperemeters ist direkt am Gerät und die Urspannung des Akkumulators auf einem Täfelchen, das auf dem Labortisch liegt, bezeichnet.

Die Messung. Man verbindet das Instrument, wie es das Schaltschema der Abb. 79 zeigt, mit den Schnüren und liest, ohne den Strom einzuschalten, die Stellung des Zeigers des Amperemeters auf der Skala ab. Das ist der Nullpunkt des Instrumentes. Er braucht nicht mit dem nullten Teilstrich der Skala des Instrumentes zusammenzufallen.

Dann stellt man den Rheostaten auf maximalen Widerstand ein[1]), schließt mit dem Schalter den Stromkreis, liest ab und schreibt die erste Anzeige des Amperemeters auf.

Es kann sich herausstellen, daß, wenn der Akkumulator nicht gut geladen ist, sich die Anzeige des Instrumentes mit der Zeit (in 20 bis 30 Sekunden) ändert. Dann muß der Akkumulator durch einen anderen ersetzt werden.

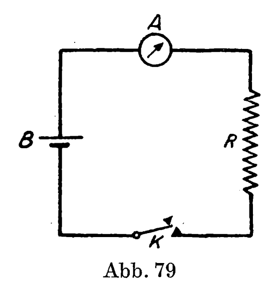


Abb. 79

Man verkleinert nun den Widerstand des Rheostaten, indem man die Stöpsel wieder zurück in die Vertiefungen steckt. Sie müssen mit einer leichten Drehung ohne großen Druck hineingesteckt werden, um einen sicheren Kontakt mit den beiden Hälften der geschlitzten Vertiefung zu garantieren. Der Widerstand muß so verändert werden, daß der Zeiger des Amperemeters sich jedesmal um 3 bis 5 Teilstriche auf der Skala des Instrumentes verschiebt. Die Ablesungen auf der Skala werden auf 0,1 Teilstrich genau durchgeführt. Die Verkleinerung des Widerstandes geschieht bei geschlossenem Stromkreis, um die Tätigkeit des Akkumulators durch mehrmaliges Schalten nicht zu unterbrechen; denn dies würde zu Änderungen seiner Spannung führen.

Es muß hier bemerkt werden, daß, obwohl das Prinzip, die Stromquelle nach Möglichkeit konstant zu belasten, bei den Messungen eingehalten werden soll, es nicht dazu führen darf, daß der Akkumulator sehr lange Zeit angeschlossen bleibt und sein Energievorrat nutzlos verbraucht wird. Bei jeder Unterbrechung des Meßganges muß sofort der Stromkreis am Schalter unterbrochen werden. Man muß sich stets vergegenwärtigen, daß das Umstecken der metallischen Stöpsel mit der Hand bei geschlossenem Stromkreis nur bei kleinen Spannungen möglich ist. Das ist zwar in dieser Aufgabe erfüllt, doch in den meisten anderen Fällen unzulässig.

Der Widerstand des Rheostaten wird durch Hineinstecken der Stöpsel in ihre Plätze herabgesetzt. Man kann den Widerstand aber nur dann ganz

[1]) Die Einstellung eines bestimmten Widerstandes geschieht bei einem Stöpselrheostaten durch Herausziehen der entsprechenden Stöpsel aus den geschlitzten Vertiefungen. Ein Stöpsel stellt die Verbindung zwischen zwei Metallklötzen her und schließt damit die darunterliegende Widerstandsspule kurz. Der Widerstand jeder Spule ist am Rheostaten abzulesen. Der maximale Widerstand wird durch das Herausziehen aller Stöpsel erreicht.

herausnehmen, wenn das Amperemeter selbst einen genügend großen Widerstand besitzt und die Schaltung von einer niedervoltigen Stromquelle gespeist wird. Bei der Eichung eines unbekannten Instrumentes darf man den Widerstand des Rheostaten nicht völlig herausnehmen, weil der Widerstand des Amperemeters sehr klein sein kann und sein Einschalten ohne Vorwiderstand einem Kurzschluß entsprechen würde.

Die Ergebnisse der Eichung werden graphisch dargestellt (nach den gemachten Aufzeichnungen). Auf der Abszissenachse werden die Ablesungen von der Skala des Gerätes und auf der Ordinatenachse die errechneten Werte der Stromstärke abgetragen. Die die eingezeichneten Meßpunkte verbindende Kurve wird *die Eichkurve des Instrumentes* genannt. Mit ihrer Hilfe kann man im weiteren die Stromstärke ermitteln, die jeder beliebigen Ablesung des Instrumentes entspricht. Weicht die aufgezeichnete Kurve nur wenig von einer Geraden ab, so hat es Sinn, den Wert eines Skalenteilstriches zu bestimmen, der dann für die gesamte Skala gleich ist.

Übung 2

Die Eichung eines Voltmeters

Zubehör: 1. Voltmeter, 2. Batterie, 3. Stöpselrheostat, 4. Schalter.

Die Beschreibung der Anordnung. Um ein Voltmeter zu eichen, muß man an dieses bekannte Spannungen anlegen und seine Anzeigen mit den Werten dieser Spannungen vergleichen. Eine Kontrolle der Spannungswerte kann durch Vergleich mit einem parallelgeschalteten, früher geeichten, genauen Instrument vorgenommen werden. In der vorliegenden Aufgabe wird ein anderes Verfahren benutzt. Es besteht darin, daß man verschiedene, doch stets bekannte Spannungen von einem Spannungsteiler abgreift, der mit einer Stromquelle bekannter Urspannung verbunden ist. Ein solcher Spannungsteiler, in Wirklichkeit ein Stöpselrheostat, ist in Abb. 80, zusammen mit einer angeschlossenen Batterie (Quelle mit bekannter Urspannung E), einem zu eichenden Voltmeter V und dem Schalter K dargestellt. Aus der Schaltung sieht man, daß an dem Stück ab des Teilers, zu dem das Voltmeter parallel geschaltet ist, der Spannungsabfall nur einen Teil der Urspannung der Batterie, an die der Teiler angeschlossen ist, darstellt. Dies ist die Aufgabe eines Spannungsteilers — eines Gerätes, das man zur Messung schwacher Ströme in der Praxis sehr oft verwendet.

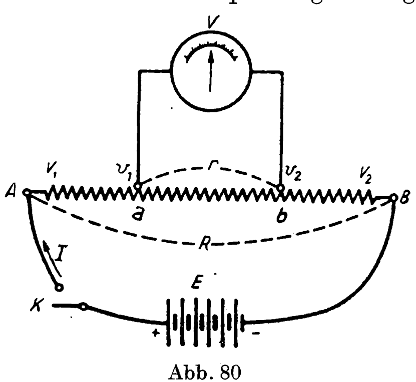


Abb. 80

Zur Eichung des Voltmeters muß man die Größe E und die für das Voltmeter abgegriffene Teilspannung kennen. Der Widerstand eines Voltmeters

beträgt sogar für Instrumente zur Messung niedriger Spannungen einige hundert Ohm und erreicht für genauere oder hohe Spannungen messende Instrumente einige zehntausend Ohm. Deshalb fließt durch ein Voltmeter stets ein sehr kleiner Strom, und es kann daher den Widerstand des Stückes *ab* im Verhältnis zum Gesamtwiderstand des Stöpselrheostaten nicht wesentlich verändern.

In einem solchen Fall kann die am Teiler abgegriffene Spannung besonders einfach bestimmt werden. Vernachlässigen wir aus dem eben angeführten Grunde die Verzweigung des Stromes an dem Stück *ab*, so können wir nach dem OHMschen Gesetz finden, daß der Spannungsabfall am Widerstand r dem Verhältnis aus dem Widerstand des Stückes *ab* zu dem Gesamtwiderstand des ganzen Rheostaten proportional ist:

$$e = \frac{r}{R} E .$$

Ist der Widerstand ϱ des Voltmeters mit dem Widerstand des Stückes r vergleichbar, so ist die Größe des Spannungsabfalls an diesem Stück gleich

$$e = \frac{E}{\frac{R-r}{\varrho} + \frac{R}{r}} .$$

Diese Formel kann man leicht ableiten, wenn man berücksichtigt, daß jetzt das benutzte Stück des Teilers *ab* mit dem Widerstand des Voltmeters geshuntet ist und sie zusammen den Widerstand

$$Z = \frac{r\varrho}{r+\varrho}$$

bilden. Dann wird der Spannungsabfall am Teilerstück durch die Formel

$$e = \frac{Z}{R-r+Z} E = \frac{r\varrho E}{(r+\varrho)\left(R-r+\frac{\varrho r}{\varrho+r}\right)}$$

ausgedrückt, aus dem man nach einer Umrechnung die oben angeführte Formel erhält.

Benutzt man als Stromquelle mit bekannter Urspannung Akkumulatorbatterien, so gilt alles in der vorigen Übung dazu Gesagte. Jedoch können in dieser Übung schon Normalelemente verwendet werden, weil der Spannungsteiler nur wenig Strom entnimmt.

Die Messung. Man stöpselt den als Spannungsteiler dienenden Rheostaten auf mindestens 100 Ω und schaltet das Voltmeter parallel zu 1 Ω. Man schreibt den Nullpunkt des Voltmeters auf. Dann schaltet man den Stromkreis ein und notiert die Anzeige des Voltmeters. Man kombiniert die Stellungen der Stöpsel oder steckt sogar die Schnüre vom Voltmeter an verschiedene Klemmen des Rheostaten und verändert den Widerstand des Stückes *ab* so, daß die Anzeige des Voltmeters sich jedesmal um 10 bis 12 Teilstriche der Skala erhöht. Alle Umstellungen der Stöpsel können bei geschlossenem Stromkreis ausgeführt

werden, doch muß der Stromkreis beim Umstecken der Schnüre an den Klemmen des Rheostaten unbedingt unterbrochen werden.

Nach ausgeführter Messung errechnet man für jede Ablesung am Voltmeter die Größe der an ihm liegenden Spannung e. Dann fertigt man eine Eichkurve an. Dazu trägt man auf der Abszissenachse die abgelesenen Skalenteile des Voltmeters und auf der Ordinatenachse die errechneten Werte der Größe e auf. Verbindet man die so eingetragenen Meßpunkte mit einer durchgehenden Kurve, so erhält man die Eichkurve für das Voltmeter. Wenn die Eichkurve sich als geradlinig erweist, wird der Wert der Skalenteilstriche des Voltmeters bestimmt, der nur in diesem Falle eine Konstante ist.

Bei Vorlegen des Protokolls dieser Aufgabe müssen die Studenten die Konstruktion der benutzten Meßinstrumente und die Methoden zur Änderung ihrer Meßbereiche (Shunten des Amperemeters und Vorschalten eines Zusatzwiderstandes zum Voltmeter) kennen.

Spezialliteratur

H. LAPORTE: „Die Messung von elektrischen Spannungen und Strömen aller Art". Verlag W. Knapp, Halle (Saale) 1950.

Aufgabe 36

Die Messung eines Widerstandes mit einer Gleichstrombrücke

Zubehör: 1. zu messende Widerstände, 2. Galvanometer, 3. Stöpselrheostat, 4. Stromquelle (Akkumulator), 5. Kommutator für die Brückenzweige der Schaltung, 6. Widerstandsdraht, 7. Doppeltaster.

Die Aufgabe besteht darin, sich mit der klassischen Methode der Messung eines Widerstandes mit einer Brückenschaltung vertraut zu machen.

Die Beschreibung der Anordnung. Die Brückenschaltung für Gleichstrom, die häufig WHEATSTONEsche Brücke genannt wird, stellt ein geschlossenes Viereck dar, das aus den Widerständen R, X, r_1 und r_2 (Abb. 81), die miteinander verbunden sind, besteht. In die eine Diagonale dieser Schaltung wird die Stromquelle gelegt und in die zweite ein empfindliches Galvanometer. Die zweite Diagonale wird als *Brücke* im eigentlichen Sinne bezeichnet. Der ganze Meßprozeß mit dieser Schaltung besteht darin, die Brücke stromlos zu machen. Daher wurde der Name für die ganze Anordnung genommen. Die Brücke im eigentlichen Sinne braucht nicht unbedingt aus zwei Schaltschnüren und einem Galvanometer zu bestehen, die die Diagonale der Schaltung bilden. In einigen Fällen ist sie viel komplizierter aufgebaut und enthält außer dem Galvanometer noch Widerstände (siehe z. B. Aufgabe 40, in dem die sogenannte Doppelbrücke verwendet wird).

Bei einem willkürlichen Verhältnis der Brückenwiderstände zueinander fließt natürlich durch das Galvanometer ein Strom. Doch existiert, wie man durch einfache Rechnung zeigen kann (siehe Literatur am Ende der Aufgabe),

ein bestimmtes Verhältnis zwischen den Widerständen, bei dem die durch das Galvanometer fließende Stromstärke Null wird, obwohl in allen anderen Zweigen der Brücke die Stromstärke nicht verschwindet. Das erwähnte Verhältnis zwischen den Widerständen, die die sogenannten *Brückenzweige* bilden, lautet:

$$\frac{X}{R} = \frac{r_1}{r_2},$$

woraus folgt

$$X = R\frac{r_1}{r_2}. \tag{1}$$

Diese Beziehung kann man dazu benutzen, irgendeinen der vier Widerstände, die in den Brückenzweigen liegen, zu bestimmen, wenn die anderen drei bekannt sind. Deshalb besteht das Wesentliche des Meßprozesses mit der Brückenschaltung darin, daß man die Größen X, R, r_1 und r_2, die diese Beziehung erfüllen, experimentell bestimmt.

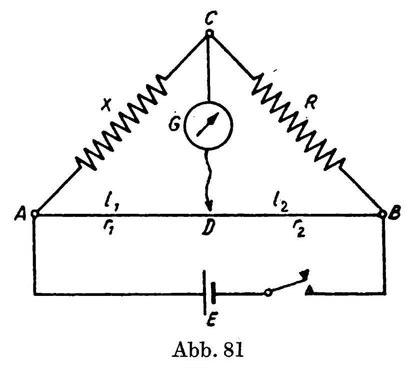


Abb. 81

Die Brückenschaltung wird folgendermaßen angewendet: In den einen Brückenzweig wird der bekannte Widerstand R (z. B. ein Stöpselrheostat), in den anderen der zu messende Widerstand X und in den dritten und vierten Brückenzweig die beiden Widerstände r_1 und r_2 eingeschaltet. Da in die Endformel für X nicht die absoluten Größen von r_1 und r_2 eingehen, sondern ihr Verhältnis, so benutzt man für sie einen metallischen Draht (Widerstandsdraht), der längs einer Millimeterskala gespannt ist. Die Stromverbindung vom Galvanometer zu diesen Widerständen wird durch einen Schleifkontakt hergestellt, der längs des Drahtes verschoben werden kann. Daher werden die Widerstände r_1 und r_2 von den Drahtstücken rechts und links vom Schleifkontakt gebildet. Dieser Schleifkontakt gestattet es, die Größen der Widerstände r_1 und r_2, die proportional den Längen l_1 und l_2 sind (siehe Abb. 81), und damit auch ihr Verhältnis, das in den Ausdruck für X eingeht, leicht zu verändern.

Der Meßprozeß besteht also bei der Brückenschaltung in der Einstellung des Stöpselrheostaten R (nahe an die Größe des zu messenden Widerstandes) und in der Auffindung einer Stellung des Schleifkontaktes, bei der kein Strom durch das Galvanometer fließt. Dieser Prozeß wird *die Abgleichung der Brücke* genannt, und die Brücke ist *abgeglichen*, wenn durch das Galvanometer kein Strom fließt.

Bildet man das Verhältnis von l_1 und l_2, das man am Meßdraht bei abgeglichener Brücke abgelesen hat, und kennt man R, so kann man den unbekannten Widerstand X finden.

Die praktische Ausführung einer Brückenschaltung ist in Abb. 82 dargestellt. Diese Schaltung besitzt alle in Abb. 81 dargestellten Elemente, doch

ist sie in einigen Details verfeinert. Vor allem hat die Schaltung einen Kommutator K erhalten, der den Platzwechsel der Widerstände, die in die Zweige der Brücke geschaltet sind, gestattet, ohne die Schaltschnüre, die diese Widerstände verbinden, umstecken zu müssen. Der Kommutator (Abb. 83) besteht aus einer in vier Teile zerschnittenen Metallplatte, die an jeder ihrer Ecken eine Klemme zum Befestigen der Schaltschnüre besitzt. Die für die verschiedenen Umschaltungen der Widerstände der Brückenschaltung notwendigen Verbindungen werden durch Stöpsel hergestellt, die zwischen die vier Teile der Metallplatte gesteckt werden.

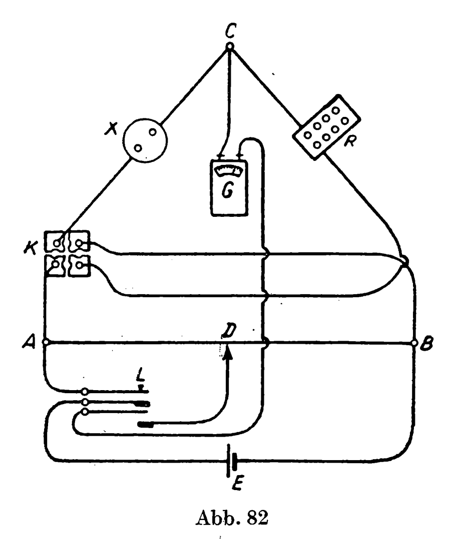


Abb. 82

Die Widerstände müssen deshalb kommutiert werden, weil der Widerstandsdraht in seiner ganzen Länge nicht gleichmäßig ist und deshalb auch das Verhältnis der Widerstände r_1 und r_2 nicht genau dem Verhältnis der Längen l_1 und l_2 entspricht. Bei der endgültigen Berechnung des unbekannten Widerstandes nimmt man den arithmetischen Mittelwert jeder der Größen l_1 und l_2, die man bei den zwei Stellungen des Kommutators erhalten hat.

Der zweite Unterschied zwischen der praktisch verwendeten und der prinzipiellen Brückenschaltung besteht darin, daß ein Doppeltaster (Abb. 84 und L in Abb. 82) benutzt wird, mit dem man nicht nur die Stromquelle, sondern auch den Stromkreis des in die Brücke eingeschalteten Galvanometers ein- und ausschalten kann. Der Doppeltaster besteht aus einer Ebonitplatte,

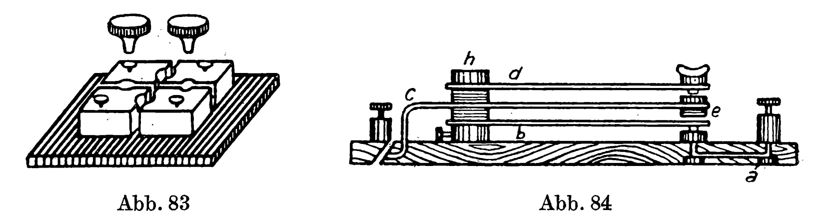


Abb. 83 Abb. 84

auf der ein Messingblättchen a mit einer Klemme und der Ebonitstab h befestigt sind. In diesen Stab sind drei federnde Messingblättchen b, e und d, die mit Klemmen versehen sind, isoliert voneinander eingelassen. Beim Druck auf das obere Blättchen des Tasters entsteht eine Verbindung sowohl zwischen a und b als auch zwischen c und d, da zwischen b und c die Ebonit-einlage e sitzt, die den Druck auf die unteren Blättchen überträgt. Die Wir-

kungsweise des Tasters besteht darin, daß durch einen Druck zuerst die Blättchen c und d und damit selbstverständlich auch die an den Klemmen befestigten Drähte verbunden werden und dann die Blättchen a und b und die mit ihnen verbundenen Drähte. Beim Verringern des Druckes auf den Taster werden die Verbindungen zeitlich in umgekehrter Reihenfolge gelöst.

Der Sinn einer solchen Einrichtung ist darin zu suchen, daß der Galvanometerkreis, der an die unteren Blättchen angeschlossen ist, nach dem Anschließen der Stromquelle geschlossen und umgekehrt vor dem Abschalten der Stromquelle geöffnet wird. Damit wird das Galvanometer nur dann angeschlossen, wenn die Brückenschaltung in Betrieb ist. Es entstehen nämlich im Moment des Ein- und Ausschaltens der Stromquelle induzierte Spannungen. Die durch diese Spannungen hervorgerufenen zusätzlichen Stöße können groß genug sein, um das Galvanometer zu beschädigen.

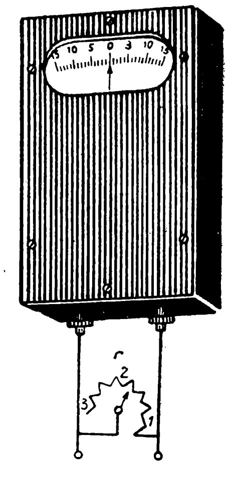


Abb. 85

Endlich ist der Brückenteil selbst dadurch kompliziert, daß das Galvanometer durch einen veränderlichen Widerstand geshuntet ist. Der veränderliche Shunt dient dazu, die Brücke zuerst bei einem kleinen Strom durch das Galvanometer ins Gleichgewicht zu setzen, um sein Meßsystem vor starken Stößen zu bewahren. Entsprechend der Güte des Abgleichs wird der Widerstand vergrößert. Die endgültige Einstellung der Brücke geschieht bei geöffnetem Shunt.

Es wird ein Zeigergalvanometer mit einem Drehspulsystem verwendet, das eine Empfindlichkeit von der Größenordnung 10^{-6} A/Skalenteil besitzt und dessen Nullpunkt in der Mitte der Skala liegt, so daß der Zeiger nach beiden Seiten ausschlagen kann (Abb. 85). Unter dem Zeiger des Galvanometers ist ein Spiegelstreifen (unterhalb der Skala) angebracht. Zur richtigen Ablesung muß das Auge des Beobachters so gestellt werden, daß der Zeiger und sein Bild im Spiegel zusammenfallen. Dann liegen das Auge des Beobachters, der Zeiger und sein Bild in einer Ebene, die senkrecht zur Skalenebene steht.

Bei genaueren Messungen mit der Brückenschaltung benutzt man Spiegelgalvanometer, und die Widerstände r_1 und r_2 sind keine Abschnitte eines Meßdrahtes, sondern Stöpselrheostaten, die für den Abgleich der Brücke zwar nur diskontinuierlich, aber in sehr kleinen Stufen verändert werden können.

Die Messung. Nach der Zusammenstellung der Schaltung wird der Shunt des Galvanometers auf den kleinsten Widerstand eingestellt und am Rheostaten einige $10^1\ \Omega$ gestöpselt. Den Schleifkontakt der Brücke stellt man auf die Mitte der Skala ein und schließt für kurze Zeit die Stromquelle und das Galvanometer an[1]). Dabei wird der Zeiger des Galvanometers aus der Nullpunktslage ausgelenkt.

[1]) Man darf auch die abgeglichene Brücke nicht längere Zeit unter Strom halten, weil sich alle Teile der Schaltung erwärmen und eine Änderung der Widerstände hervorrufen.

Durch Änderung des Widerstandes des Stöpselrheostaten erreicht man den Zustand der kleinsten Ablenkung des Zeigers, ohne dabei die Stellung des Schleifkontaktes zu ändern. Wenn die Änderung des Widerstandes um 1 bis 2 Ω keine Verkleinerung der Auslenkung des Zeigers mehr ergibt, wird diese Auslenkung durch die Verschiebung des Schleifkontaktes beseitigt. Hat man die Stellung des Schleifkontaktes gefunden, bei der das geshuntete Galvanometer beim Druck auf den Taster keinen Ausschlag mehr zeigt, so erhöht man allmählich den Widerstand des Shuntes. Dabei stellt man jedesmal den Schleifkontakt so ein, daß beim Druck auf den Taster die Auslenkung des Galvanometerzeigers unmerklich wird.

Die Messung wird bei geöffnetem Shunt beendet.

Nach dieser ersten Messung wird die Stellung der Stöpsel des Kommutators so verändert, daß die Widerstände R und X ihren Platz in den Brückenzweigen tauschen, und erneut eine Messung in der oben beschriebenen Weise durchgeführt.

Danach ändert man den Widerstand des Stöpselrheostaten um annähernd $\pm 10\%$ und wiederholt den ganzen Meßzyklus von neuem.

Der aus allen diesen Messungen gebildete Mittelwert stellt das Endergebnis des Versuches für einen Widerstand dar. Im Protokoll müssen die Ablesungen an dem Meßdraht, die Widerstände des Stöpselrheostaten, die Ausrechnungen des Widerstandes X aus den einzelnen Messungen, der Mittelwert für X und der Meßfehler enthalten sein.

Bei der Ausführung dieser Aufgabe müssen (mindestens) zwei unbekannte Widerstände einzeln, der Widerstand beider in Hintereinander- und in Parallelschaltung bestimmt werden. Die Ergebnisse dieser letzten beiden Messungen müssen mit den nach den Formeln für Hintereinander- und Parallelschaltung berechneten Ergebnissen verglichen werden, in die die Werte der einzeln gemessenen Widerstände eingesetzt worden sind.

Mit der einfachen Wheatstoneschen Brücke können Messungen bis zu einer Genauigkeit von 0,1 Ω durchgeführt werden. Ein Nachteil dieser Schaltung ist, daß die Schaltschnüre sich in unkontrollierbarer Weise zu dem zu messenden Widerstand und dem des Stöpselrheostaten addieren. Dieser Nachteil ist in der Schaltung der Doppelbrücke (Aufgabe 40) beseitigt. Prinzipiell wird er vermieden, wenn eine Kompensationsmethode zur Messung eines Widerstandes verwendet wird.

Das Problem der Empfindlichkeit der Brückenschaltung beim Gebrauch in verschiedenen Bereichen ist ziemlich kompliziert, und seine Diskussion führt über den Rahmen dieses Buches hinaus.

Spezialliteratur

Siehe Literatur zu Aufgabe 35.

Aufgabe 37

Die Abhängigkeit des Widerstandes der Metalle von der Temperatur

Zubehör: 1. Widerstandsdraht aus dem zu untersuchenden Metall, 2. Thermostat mit mechanischem Rührer, 3. Brückenschaltung zur Messung des Widerstandes (dazu Galvanometer und Akkumulator).

Der elektrische Widerstand eines Leiters hängt von seiner Temperatur ab. Bei Metallen nimmt er mit der Erwärmung, bei Elektrolyten mit der Abkühlung zu. Am einfachsten läßt sich die Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur durch

$$R_t = R_0 (1 + \alpha t + \beta t^2)$$

ausdrücken, wobei R_0 und R_t die Werte des Widerstandes für 0° C und für t° C bedeuten; α und β sind Konstanten des jeweiligen Metalls, die aus Versuchen ermittelt werden, und t die Temperatur.

Um die Konstanten α und β zu bestimmen, muß man den Widerstand bei drei Temperaturen messen.

Näherungsweise darf man die Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur als linear betrachten:

$$R_t = R_0 (1 + \alpha t). \tag{1}$$

In diesem Fall braucht man für die Bestimmung der Konstante α den Widerstand nur bei zwei Temperaturwerten zu messen.

Die Bestimmung der Abhängigkeit des Widerstandes des Metalles von der Temperatur und die Bestimmung der Konstante α bilden den Inhalt der vorliegenden Aufgabe.

Die Kenntnis der Abhängigkeit des Widerstandes des Metalles von der Temperatur ist für die Experimentalphysik und die Technik von großer Wichtigkeit; denn die meisten genauen Temperaturmessungen werden zur Zeit mit Hilfe sogenannter *Widerstandsthermometer* durchgeführt. Diese bestehen aus einem Widerstandsdraht (gewöhnlich Platin), dessen Temperaturabhängigkeit in besonderen Thermostaten festgelegt worden ist. Nach einer solchen Eichung erlaubt die Messung des Widerstandes dieses Thermometers, die Raumtemperatur zu bestimmen, in dem sich das Thermometer befindet. Dieses Verfahren der Temperaturmessung erweist sich als viel genauer und bequemer als die Anwendung von Quecksilber- oder anderer Flüssigkeitsthermometer. Der Anwendungsbereich eines Widerstandsthermometers ist unvergleichlich breiter als der eines Quecksilberthermometers. So läßt sich ein Platinthermometer in dem Bereich von $-263°$ C bis $+1000°$ C anwenden[1]). Es bereitet keine Schwierigkeit, mit den Widerstandsthermometern die Temperatur bis auf einige hundertstel Grad genau zu bestimmen. Unter besonders günstigen Versuchsbedingungen kann man mit Hilfe eines solchen Thermometers Temperaturdifferenzen von einigen zehntausendstel Grad registrieren.

Die Beschreibung der Anordnung. Der elektrische Teil der Anordnung besteht aus einer etwas abgeänderten Schaltung der in Aufgabe 38.1 beschriebenen

---

[1]) Höhere Temperaturen werden mit optischen Methoden und Thermoelementen (siehe Aufgabe 42) gemessen; mit letzteren bis $\approx 1700°$ C.

Brücke. Der Thermostat für die Erwärmung des zu untersuchenden Widerstandes ist ein Wasserbehälter (Abb. 86), in den ein U-förmiges Glasrohr *CD*, der elektrische Ofen *E* und der Rührer *M* getaucht sind. Im unteren Teil des U-förmigen Rohres liegt eine Spirale *KL* aus dem zu untersuchenden Platindraht[1]). Die Enden der Spirale sind durch das Glas hindurch in die vertikalen Schenkel des Rohres geführt und mit den Elektroden *P* und *Q*, von denen Verbindungsdrähte zur Brücke führen, verbunden. Die Spirale wird in die Brücke mit Hilfe der Klemmen geschaltet, die zur Messung eines Widerstandes vorgesehen sind.

Der Strom des Ofens kann so einreguliert werden, daß der Thermostat auf die gewünschte Temperatur gebracht und dann konstant gehalten werden kann.

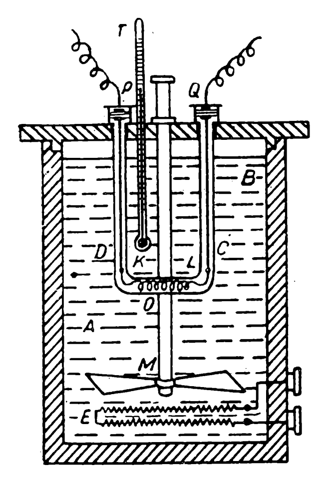


Abb. 86

Es ist klar, daß der Versuch nicht den Temperaturkoeffizienten des Widerstandes liefert, sondern die Werte des Widerstandes selbst, aus denen dann die Größe α errechnet werden muß.

Die Messung. Man beginnt die Messung bei Zimmertemperatur. Die Temperatur wird unter ständiger Tätigkeit des Rührers *M* am Thermometer *T* abgelesen. Gleich nach der Temperaturablesung wird mit der Brücke[2]) der Widerstand des Drahtes bestimmt. Man macht mehrere Ablesungen bei Zimmertemperatur und findet aus allen den mittleren Wert des Widerstandes R_{t_1}. Dann erhöht man die Temperatur des Thermostaten um etwa 20° C, stellt die Stromstärke so ein, daß die Temperatur konstant bleibt und führt die gleiche Anzahl von Ablesungen am Thermometer und der Brücke durch. Man erhält den mittleren Wert des Widerstandes R_{t_2}.

Man erwärmt weiter und führt analoge Messungen in gleichen Temperaturintervallen bis zu 90 bis 95° C durch. Man erhält die Mittelwerte der Widerstände R_{t_1}, R_{t_2}, R_{t_3}, ...

Dann schaltet man den Ofen ab und führt die gleichen Messungen in umgekehrter Richtung durch (beim Abkühlen). Die erhaltenen Mittelwerte werden mit R'_{t_1}, R'_{t_2}, R'_{t_3}, ... bezeichnet.

Die Ausrechnung. Nach Beendigung der Messungen bildet man den Mittelwert des Widerstandes für jede vorliegende Temperatur, wobei man dafür die

---

[1]) In den Thermostaten können auch einige Drahtwiderstände aus verschiedenen Metallen getaucht werden. Dann muß bei dem Meßprozeß von einem Widerstand auf den anderen umgeschaltet werden. Geschieht dieses schnell genug, so gelingt es, den Widerstand aller Drähte bei ein und demselben Temperaturwert zu messen.

[2]) In der vorliegenden Aufgabe wird zur Messung des Widerstandes eine der WHEATSTONEschen Brücke ähnliche Anordnung verwendet, die nach dem Schema einer sogenannten Universalbrücke geschaltet ist. Sie wird genauer in der Aufgabe 38 beschrieben und ist in Abb. 87 und 88 zu ehen.

beim Erwärmen und beim Abkühlen des Thermostaten erhaltenen Meßergebnisse benutzt.

Der gesuchte Wert des Temperaturkoeffizienten des Widerstandes α ergibt sich aus dem Verhältnis des Widerstandes bei der am verläßlichsten gemessenen Temperatur zu dem Widerstand bei der Anfangstemperatur:

$$\alpha = \frac{\Delta R}{\Delta t \cdot R_{t_{\text{Zimmer}}}}.$$

Die Meßergebnisse werden graphisch dargestellt. Man trägt die Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur auf und stellt in einer Tabelle die Werte des Koeffizienten α zusammen, die aus verschiedenen Werten von R_t berechnet sind.

Aufgabe 38

Die Abhängigkeit des Widerstandes der Elektrolyte von der Temperatur

Zubehör: 1. Universalbrücke nach Wheatstone, 2. Kopfhörer, 3. Akkumulator, 4. Gefäß für die zu untersuchende Flüssigkeit, 5. Thermostat mit Rührer und Thermometer.

Die elektrische Leitfähigkeit der Elektrolyte hängt von ihrer Temperatur ab. Sie wächst mit zunehmender Temperatur. Die Gründe des Anwachsens sind: Die Zunahme des Dissoziationsgrades der Elektrolyte mit zunehmender Temperatur und das Kleinerwerden der Viskositätskonstanten der Flüssigkeit mit der Erwärmung. Der Dissoziationsgrad der Elektrolyte bestimmt die Zahl der dissoziierten Moleküle, d. h. die Zahl der Ionen im Elektrolyten, die die Träger der elektrischen Ladungen sind. Die elektrische Leitfähigkeit der Elektrolyte hängt nicht nur von der Zahl der Ionen in 1 cm^3 ab, sondern auch noch von ihrer Beweglichkeit, und letztere ist der mit zunehmender Temperatur abnehmenden Viskosität umgekehrt proportional. Deshalb wirken beide Faktoren in gleicher Richtung und bewirken eine Erhöhung der elektrischen Leitfähigkeit der Elektrolyte mit zunehmender Temperatur, d. h. eine Erniedrigung des Widerstandes mit zunehmender Temperatur.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Messung der Abhängigkeit des Widerstandes eines Elektrolyten von der Temperatur.

Die Abhängigkeit des Widerstandes der Elektrolyte von der Temperatur kann man mit folgender angenäherter Formel darstellen (siehe ebenfalls die Beschreibung der Aufgabe 37):

$$R_t = R_0 (1 - \alpha t),$$

wobei R_t und R_0 die Widerstände bei den Temperaturen t_2 und t_1 bedeuten. Der Koeffizient α trägt die Bezeichnung *Temperaturkoeffizient* des Widerstandes. Die aufgeführte lineare Beziehung gibt nicht genau die Abhängigkeit des Widerstandes der Elektrolyte von der Temperatur wieder, und die aus ihr für verschiedene Werte der Temperatur gefundene Größe α erweist sich nicht

als eine völlig konstante Größe. Das weist darauf hin, daß der angeführte Ausdruck nur begrenzt anwendbar ist. Doch kann man in kleinen Temperaturintervallen auch eine lineare Beziehung zwischen R_t und R_0 annehmen.

Die Messung des Widerstandes der Elektrolyte wird gewöhnlich mit Hilfe der sogenannten *Universalbrücke* durchgeführt, die an Stelle einer Gleichstromquelle durch einen Summerwechselstrom gespeist wird. Anstatt des Galvanometers wird in diesem Falle ein empfindlicher Kopfhörer benutzt, mit dessen Hilfe der Summerton abgehört wird. Die Anwendung eines Wechselstromes bei der Messung des Widerstandes eines Elektrolyten ist deshalb notwendig, weil unter der Einwirkung eines Gleichstromes eine Polarisation der Elektroden durch die Produkte der Elektrolyse verursacht wird und der gemessene Widerstand nicht dem wahren Wert des Widerstandes des gesamten Elektrolyten entspricht. Außer durch die Polarisation der Elektroden wird die Messung noch wesentlich dadurch gestört, daß bei dem Durchgang eines Gleichstromes die Zusammensetzung des Elektrolyten durch Elektrolyse allmählich verändert wird.

Die Arbeit mit der Wechselstrombrücke wird dadurch kompliziert, daß man dabei, allgemein gesagt, nicht nur den Ohmschen Widerstand der Schaltungselemente, sondern auch ihre induktiven und kapazitiven Widerstände berücksichtigen muß. Das mit dem Elektrolyten gefüllte und mit Elektroden versehene Gefäß stellt einen Kondensator dar. Wenn die Brücke abgeglichen ist, ergibt der aus Messungen ermittelte Wert des Widerstandes des Elektrolyten, streng gesagt, nicht seinen Ohmschen Widerstand. Daher wird die Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit oder des spezifischen Widerstandes komplizierter. (Im vorliegenden Fall werden die kapazitiven Effekte nicht berücksichtigt.) Jedoch kann ein mögliches Auftreten von nicht kompensierter Phasendifferenz zwischen den Spannungen in den verschiedenen Brückenzweigen zu einem unscharfen Minimum des Tones in dem Kopfhörer führen. Die kapazitiven Effekte können durch das Einschalten einer Kapazität, parallel zum anderen Brückenzweig, kompensiert werden.

Die Beschreibung der Anordnung. Die Universalbrücke nach WHEATSTONE unterscheidet sich von der einfachen, mit Gleichstrom gespeisten Brücke dadurch, daß sie es gestattet, die Messung sowohl mit Gleich- als auch mit Wechselstrom durchzuführen. Bei der Messung mit Wechselstrom wird in den Kreis der Stromquelle (Abb. 87) ein kleiner Summer J mit einem mechanischen Unterbrecher geschaltet, der ein periodisches Öffnen und Schließen des Stromkreises bewirkt. Der hierbei erzeugte Wechselstrom kann keine Ablenkung des elektromagnetischen Systems eines Galvanometers bewirken. Deshalb wird anstatt des Galvanometers ein Kopfhörer T angeschlossen, in dem dieser Strom ein charakteristisches Summen erzeugt. Das Aufhören dieses Summens zeigt, ähnlich wie der auf dem Nullpunkt stehende Zeiger des Galvanometers, an, daß die Brücke ATB stromlos ist. Es ist natürlich bequemer, an Stelle des Summers einen Tongenerator zu benutzen. (In der Abb. 87 ist die Schaltung der Brücke dar-

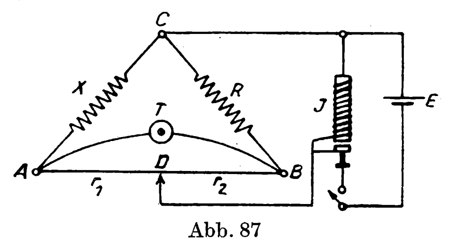


Abb. 87

gestellt, die von einem Summer gespeist wird.) Es muß bemerkt werden, daß, obwohl die Stromquelle und die Stromanzeige hier ihre Plätze gewechselt haben (im Vergleich zu der gewöhnlichen Brücke), die Bedingung der Strom-

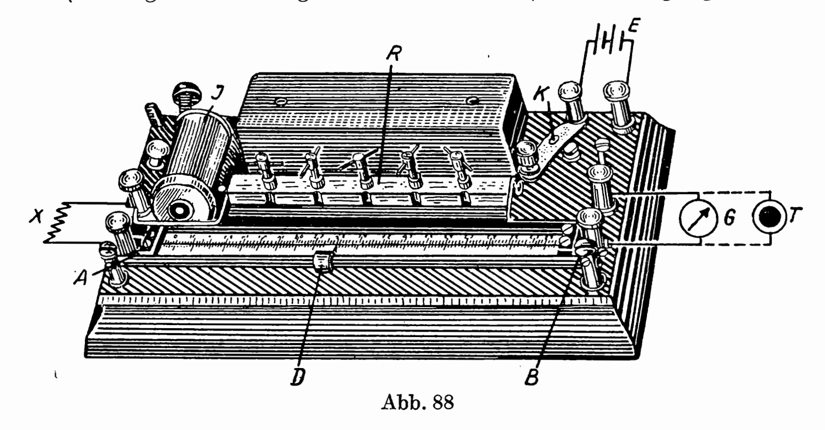


Abb. 88

losigkeit im Kopfhörerkreis, wie leicht einzusehen ist, die gleiche bleibt, und zwar:

$$X = R\frac{r_1}{r_2}.$$

Will man die Universalbrücke mit Gleichstrom benutzen, so genügt es, den Kopfhörer durch ein Galvanometer zu ersetzen und den Summer J auszuschalten. Praktisch wird dieses erreicht durch Umstellen des Kontaktschalters K [der auf dem Deckel des Kastens angebracht ist, in welchem sich die Brücke befindet (Abb. 88)] auf den Kontakt „Galv", wenn man die Brücke mit Gleichstrom, und auf den Kontakt „Tel", wenn man die Brücke mit Wechselstrom betreibt. An die Klemmen, die mit dem Zeichen $\frac{\text{„Tel"}}{\text{„Galv"}}$ bezeichnet sind, wird entsprechend der Kopfhörer T oder das Galvanometer G angeschlossen und an die Klemmen, die durch X bezeichnet sind, der zu messende Widerstand. In dieser Ausführung wird die Universalbrücke für die Aufgabe 37 benutzt.

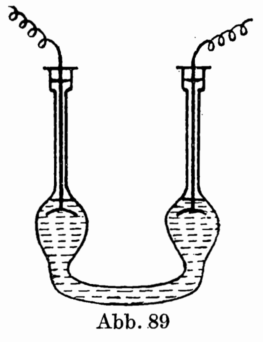


Abb. 89

Die Brücke besitzt noch eine weitere Besonderheit: Ihre Skala hat eine Einteilung, die sofort das Verhältnis der Abschnitte angibt. Das erleichtert die Auswertung erheblich.

Das Gefäß für die zu untersuchende Flüssigkeit (Abb. 89) besteht aus einem U-förmigen Glasrohr, in das nicht oxydierende metallische Elektroden eingetaucht werden. Der Thermostat (Abb. 90), in den dieses Gefäß KL getaucht wird, wird mit Strom erwärmt. An seinem Boden befindet sich der Rührer M, der durch einen Motor in Drehung versetzt wird. Außerdem taucht in den Thermostaten das Thermometer T ein.

Die Aufstellung der Anordnung für die Versuchsdurchführung ist aus Abb. 88 ersichtlich.

Die Messung. Wenn die Anordnung zusammengeschaltet ist und die Flüssigkeit die Temperatur des Thermostaten angenommen hat, wird der Summer eingeschaltet, der Schleifkontakt D (Abb. 88) in die Mitte der Skala AB gestellt und der Widerstand R so gestöpselt, daß der Ton im Kopfhörer so leise wie möglich ist.

Dann stellt man den Schleifkontakt D so ein, daß der Ton im Kopfhörer verschwindet, liest seine Stellung auf AB ab, stöpselt einen anderen Widerstand R und stellt erneut den Kontakt D auf das Tonminimum ein. Der wahre Wert von X ergibt sich als das Mittel aus den beiden einzeln erhaltenen X-Werten.

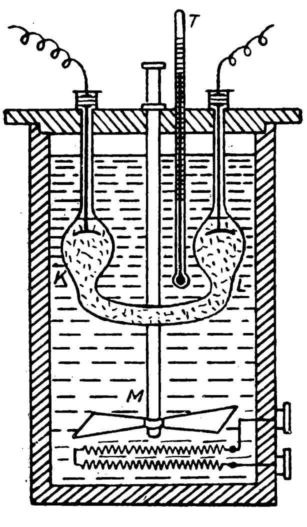


Abb. 90

Zwischen diesen Einstellungen wird die Temperatur t an dem im Thermostaten befindlichen Thermometer abgelesen.

Dann wird die Temperatur des Thermostaten durch Vergrößern oder Verkleinern der Stromstärke des Ofens verändert. Wenn sich in dem Thermostaten eine neue konstante Temperatur ausgebildet hat, wird eine neue Messung des Widerstandes der Flüssigkeit auf die eben beschriebene Weise vorgenommen. Der Versuch wird für einige Temperaturen in Intervallen von 10° C wiederholt.

Alle Messungen werden bei abnehmender Temperatur bis zu Zimmertemperatur wiederholt. Das Absinken der Temperatur wird durch natürliche Abkühlung des Thermostaten nach dem Abschalten des Ofens bewirkt.

Die Meßergebnisse des Widerstandes bei verschiedenen Temperaturen werden als Funktion der Temperatur graphisch dargestellt.

Die Größe α erhält man aus dem Ausdruck

$$\alpha = \frac{\Delta R}{\Delta t \cdot R_{t_{\text{Zimmer}}}}.$$

Die spezifische elektrische Leitfähigkeit des Elektrolyten kann man berechnen, wenn die Maße der Flüssigkeitssäule bekannt sind. Diese können direkt an der Anordnung abgelesen werden.

Aufgabe 39

Die Messung des Widerstandes eines Galvanometers und des inneren Widerstandes eines galvanischen Elementes

Um den Widerstand eines Galvanometers und den inneren Widerstand eines galvanischen Elementes zu messen, benutzt man eine Gleichstrombrücke (siehe Aufgabe 36), bei der einige Änderungen in der Verteilung seiner einzelnen Teile vorgenommen worden sind.

Übung 1

Die Messung des Widerstandes eines Galvanometers

Zubehör: 1. Das zu untersuchende Galvanometer, 2. Meßdraht, 3. Stöpselrheostat, 4. Schiebewiderstand, 5. Schalter und Taster, 6. Batterie.

Die Beschreibung der Anordnung. Die Aufstellung der einzelnen Geräte ist aus der Abb. 91 zu entnehmen. Der Strom fließt vom Element E über den Widerstand LM mit dem Gleitkontakt m. An die Punkte L und m sind die Enden der einen Diagonale $ALmB$ der Brücke angeschlossen, und in der anderen Diagonale CD befindet sich der Taster K_1. Das Galvanometer, dessen Widerstand X gemessen werden soll, liegt in einem der Brückenzweige, und die Widerstände R, r_1 und r_2 bilden die übrigen drei Zweige der Brücke. Durch Änderung der Stellung des Gleitkontaktes m am Schiebewiderstand LM verändern wir die Potentialdifferenz $(v_1 - v_2)$ von Null, wenn der Kontakt m mit L zusammenfällt, bis zu einem bestimmten Maximum, wenn er mit M zusammenfällt. Dadurch wird die Stromstärke geändert, die durch das System fließt, und damit auch die Stromstärke, die durch das Galvanometer fließt. Diese Regelung ist notwendig, da hierbei, im Gegensatz zur gewöhnlichen Brückenschaltung, das Galvanometer dauernd unter Strom steht. Die Stärke des Stromes darf die höchstzulässige Größe für dieses Galvanometer nicht überschreiten.

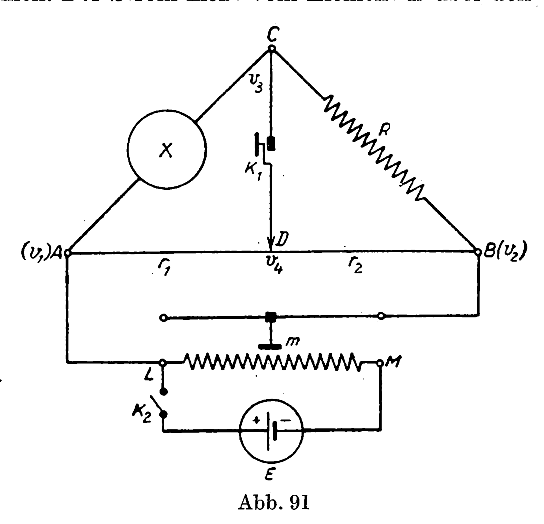


Abb. 91

Diese Anordnung, bei der die Stromquelle parallel zum Widerstand geschaltet ist, dient zur Spannungsteilung der Batterie E. In Schwachstrom-Meßanordnungen ist dieses Verfahren als eine bequeme Methode der Spannungs-

regulierung sehr verbreitet. Ihre Anwendung kann man am Beispiel einer ganzen Reihe von elektrischen Aufgaben, die in diesem Buch beschrieben sind, studieren.

Wenn die Potentiale v_3 und v_4 gleich sind, verschwindet der Strom in der Diagonale CD, und deshalb hat das Schließen und Öffnen des Tasters K_1 keine Änderung der Stromstärke in den Brückenzweigen und damit auch im Zweig des Galvanometers X zur Folge. Mit anderen Worten, bei Gleichheit von v_3 und v_4 ruft das Schließen des Tasters K_1 keine Änderung des Ausschlages des Galvanometers hervor. Für die Gleichheit der Potentiale v_3 und v_4 gilt bei der Gleichstrombrücke die Formel (siehe Aufgabe 36.1)

$$X = R\frac{r_1}{r_2}, \qquad (1)$$

aus der der zu messende Widerstand X des Galvanometers unmittelbar bestimmt werden kann, wenn R und das Verhältnis $\frac{r_1}{r_2}$ bekannt sind.

Deshalb kann die Brückenschaltung für die Messung eines Widerstandes nicht nur dann benutzt werden, wenn das Galvanometer in die Diagonale der Brücke eingeschaltet ist, sondern auch, wenn es in einem der Brückenzweige liegt. In diesem Falle muß man bei den Messungen die Konstanz der Galvanometeranzeige beim Druck auf den Taster in der Diagonale anstreben. Ein solches Verfahren ist besonders für die Messung des Galvanometerwiderstandes geeignet, weil es das Einschalten eines zweiten Galvanometers in die Diagonale der Schaltung unnötig macht, d. h., man kann die Messung allein mit dem zu untersuchenden Galvanometer ausführen.

Die Aufgabe wird also darauf zurückgeführt, die Größen R, r_1 und r_2 so auszuwählen, daß beim Druck auf den Taster K_1 keine Änderung des Galvanometerausschlages mehr erfolgt. Dann wird der Widerstand X des Galvanometers nach der Formel (1) bestimmt.

Die Messung. Man schaltet die Anordnung nach dem Schema der Abb. 91 zusammen und stöpselt den Widerstand R auf die Hälfte seines Maximalwertes. Den Gleitkontakt m des Spannungsteilers stellt man nahe an den Punkt L heran und den Schleifkontakt D auf die Mitte des Meßdrahtes ein.

Man schließt den Schalter K_2 und verschiebt den Kontakt m so weit, bis der Galvanometerzeiger ungefähr um die Hälfte der Skala ausgelenkt ist.

Beim Druck auf den Taster K_1 beobachtet man, nach welcher Richtung sich der Galvanometerausschlag verändert und verkleinert oder vergrößert entsprechend dem Widerstand R des Stöpselrheostaten. Allmählich sucht man einen solchen Widerstand R zu finden, bei dem sich der Galvanometerausschlag beim Druck auf den Taster gar nicht ändert.

Wenn der Widerstand R des Stöpselrheostaten sich dabei nur in großen Intervallen ändern läßt, muß die endgültige Einstellung auf die Konstanz der Galvanometerauslenkung durch Verschieben des Schleifkontaktes D in eine der beiden Richtungen erfolgen.

Im letzteren Fall haben wir

$$\frac{X}{R} = \frac{l_1}{l_2},$$

wobei l_1 und l_2 die Längen der beiden Abschnitte des Meßdrahtes bedeuten.

Wenn auf das Rähmchen des zu untersuchenden Galvanometers zwei Spulen gewickelt sind, so müssen die Widerstände X' und X'' jeder Spule bestimmt werden.

Übung 2

Die Messung des inneren Widerstandes eines Elementes

Zubehör: 1. das zu untersuchende galvanische Element, 2. Meßdraht, 3. Stöpselrheostat, 4. Galvanometer, 5. Schiebewiderstand, 6. Schalter und Taster.

Die Beschreibung der Anordnung. Das Schaltschema für die Messung des inneren Widerstandes eines galvanischen Elementes (Abb. 92) gleicht dem einer Gleichstrombrücke (siehe Aufgabe 36), doch unterscheidet es sich in der Verteilung der Ströme über die Brückenzweige und dem Prinzip der Benutzung dieses Schemas von der gewöhnlichen Benutzung der Gleichstrombrücke.

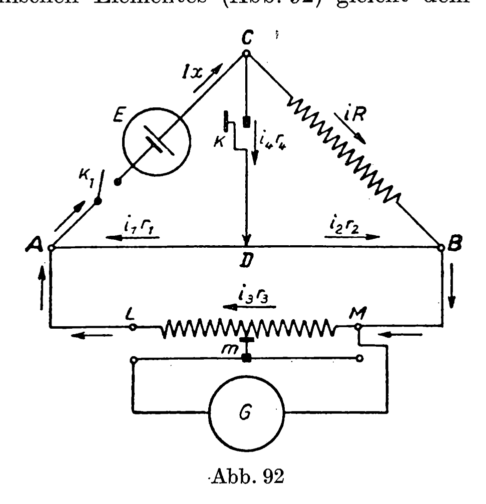


Abb. 92

Das Wesen dieser Schaltung besteht darin, daß beim Drücken des Tasters K, der in der Diagonalen der Brücke liegt, keine Änderung der durch das Galvanometer G fließenden Stromstärke entsteht. Wenn das erreicht ist, tritt die bekannte Verhältnisgleichung in Kraft, die die vier Widerstände in den Zweigen der Brücke verbindet. In einem davon liegt nun das galvanische Element mit dem unbekannten inneren Widerstand. Weiter unten ist die Theorie der Arbeitsweise dieser Schaltung dargelegt. Der in dem Schaltbild (Abb. 92) dargestellte Schiebewiderstand r_3 spielt die Rolle eines veränderlichen Shuntes des Galvanometers.

Betrachten wir die Schaltung der Abb. 92, so sehen wir, daß das Galvanometer G in den Nebenzweig Mm der Diagonale $AmMB$ geschaltet ist. In der Diagonale CD liegt der Taster K und in dem Zweig AC das galvanische Element E, dessen Widerstand X gemessen werden soll. Mit den Buchstaben X, R, $r_1, \ldots, r_4$ sind die Widerstände und mit I, i, $i_1, \ldots, i_4$ die Stromstärken bei geschlossenen Schaltern K und K_1 bezeichnet. Die Pfeile geben die Richtung der Ströme an.

Das erste Kirchhoffsche Gesetz bei geschlossenen Schaltern K und K_1 ergibt für die Punkte C, A, B:

$$I = i + i_4, \quad I = i_1 + i_3, \quad i_3 = i + i_2$$

oder

$$i = I - i_4, \quad i_1 = I - i_3, \quad i_2 = i_3 - i = i_3 - I + i_4.$$

Das zweite KIRCHHOFFsche Gesetz ergibt unter den gleichen Bedingungen für die Wege $ACBMLA$ und $ADBMLA$:

$$E = Ix + iR + i_3 r_3, \quad 0 = i_2 r_2 + i_3 r_3 - i_1 r_1.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$E = Ix + (I - i_4) R + i_3 r_3 = I(x + R) + i_3 r_3 - i_4 R,$$

$$0 = (i_3 - I + i_4) r_2 + i_3 r_3 - (I - i_3) r_1 =$$

$$= -I(r_1 + r_2) + i_3 (r_1 + r_2 + r_3) + i_4 r_2.$$

Nehmen wir an, daß das Loslassen des Tasters K die Stromstärke i_3 und damit auch den Strom, der durch das Galvanometer fließt, nicht ändert, und öffnen wir K, dann muß gelten: $i_3 = \text{const}$, $i_4 = 0$ und $E = \text{const}$, doch wird sich I im allgemeinen in I' ändern. Wir erhalten also:

$$I(x + R) + i_3 r_3 - i_4 R = I'(x + R) + i_3 r_3,$$

$$i(r_1 + r_2) - i_3 (r_1 + r_2 + r_3) - i_4 r_2 = I'(r_1 + r_2) - i_3 (r_1 + r_2 + r_3)$$

oder

$$(I - I')(x + R) = i_4 R,$$

$$(I - I')(r_1 + r_2) = i_4 r_2.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$\frac{x + R}{r_1 + r_2} = \frac{R}{r_2}$$

oder

$$\frac{x}{R} = \frac{r_1}{r_2}. \tag{2}$$

Das heißt, wenn das Öffnen und Schließen des Tasters K in der einen Diagonalen CD keinen Einfluß auf die Stromstärke i_3 in der anderen hat, gilt die Beziehung (2).

Wenn der Widerstand R besonders groß gewählt wird, ist fast der gesamte Strom i_3 durch den Strom bedingt, der über CDB fließt, weil das Potential des Punktes D höher liegt als das des Punktes B und der Widerstand CDB kleiner ist als der Widerstand CB (der Widerstand der Zuleitungsdrähte wird vernachlässigt). In diesem Falle bewirkt ein Öffnen des Tasters K offensichtlich eine Verkleinerung des Galvanometerausschlages. Wenn andererseits der Widerstand R gleich Null ist, so kann man die Potentiale der Punkte D und B als fast gleich annehmen, und weil der Widerstand des Weges CDA wesentlich kleiner ist als der des Weges $CBMLA$ (der Schiebewiderstand LM wird zum Schutz des Galvanometers auf 200 bis 300 Ω eingestellt), wird das Öffnen des Tasters K offensichtlich in diesem Falle eine Erhöhung des Stromes, der durch das Galvanometer fließt, zur Folge haben. Wählen wir verschiedene Werte für R, einmal größere und einmal kleinere, und lassen wir allmählich die Differenz zwischen ihnen immer kleiner werden, so finden wir endlich ein solches R, bei dem das Öffnen des Tasters K keine Änderung des Galvanometerausschlages mehr bewirkt. In diesem Falle dürfen wir die Formel (2) anwenden.

Es ist klar, daß diese Methode der Messung des inneren Widerstandes eines Elementes nur dann anwendbar ist, wenn dieser im Vergleich mit dem Widerstand der Zuleitungsdrähte in den Brückenzweigen nicht zu klein ist. Deshalb kann man mit dieser Methode nicht den inneren Widerstand der Akkumulatoren messen, die unter normalen Bedingungen einen Widerstand von höchstens einigen hundertstel Ohm besitzen.

Die Messung. Man schaltet die Meßordnung bei geöffneten Schaltern K und K_1 zusammen.

Der Gleitkontakt m des Schiebewiderstandes LM wird auf den Punkt M gestellt, damit beim zufälligen Schließen dieser Schalter das Galvanometer nicht beschädigt wird. In der Brücke AB wird der Schleifkontakt D auf die Mitte der Teilung gestellt.

Man schließt die Schalter K und K_1 und schiebt den Gleitkontakt m so weit von M weg, bis der Galvanometerzeiger ungefähr auf der Mitte der Skala steht.

Man stöpselt den Rheostaten bewußt auf einen höheren Wert R als den des Widerstandes des Elementes, öffnet K bei geschlossenem K_1 und beobachtet, in welcher Richtung und um wieviel sich der Galvanometerausschlag ändert.

Durch allmähliches Verkleinern der Grenzen, d. h. durch Wahl der Widerstände zwischen 0 und R, erreicht man endlich, daß sich beim Öffnen und Schließen des Schalters der Galvanometerausschlag nicht ändert. Wenn es mit dem Stöpselrheostaten R allein nicht gelingt, nimmt man für einen genaueren Abgleich den Schleifkontakt D zur Hilfe und erreicht schließlich damit die Konstanz der Galvanometeranzeige.

Weil die Widerstände r_1 und r_2 den Längen der Brückenzweige l_1 und l_2 proportional sind, kann man den Widerstand x aus der Formel

$$x = R\frac{l_1}{l_2}$$

errechnen.

Spezialliteratur

Siehe Literatur zu Aufgabe 35.

Aufgabe 40

Die Bestimmung kleiner Widerstände mit Hilfe der Doppelbrücke[1])

Zubehör: 1. Doppelbrücke, 2. Galvanometer, 3. Anzahl zu messender Widerstände, 4. Akkumulator, 5. Maßstab, 6. Schublehre.

Die Beschreibung der Anordnung. Wenn mit Hilfe der Gleichstrombrücke kleine Widerstände gemessen werden sollen, die ihrer Größe nach vergleichbar mit den Widerständen der Zuleitungen und Kontakte sind, so wird das nach der allgemeinen Formel für die Brücke [Formel (1) der Aufgabe 36] errechnete Ergebnis fehlerhaft sein, und der Fehler wird um so größer sein, je kleiner der zu messende Widerstand, verglichen mit dem der Zuleitungsdrähte, ist.

1) Anm. d. Red.: THOMSON-Brücke.

Für die Messung **kleiner Widerstände** hat sich eine Methode durchgesetzt, die die in Abb. 93 wiedergegebene Schaltung benutzt. Mit dem Buchstaben X ist der zu messende kleine Widerstand bezeichnet. Diese Schaltung unterscheidet sich von der gewöhnlichen Brückenschaltung dadurch, daß das eine Ende der Brücke mit dem Galvanometer G an den zusätzlichen Kreis $NabP$, welcher die beiden, im Vergleich zu R und X großen Widerstände a und b enthält, angeschlossen ist. Die Widerstände A und B sind im Vergleich zu R und X ebenfalls groß. In einer solchen Schaltung ist der Einfluß des Widerstandes der Zuleitungen praktisch eliminiert.

Weil nämlich die Widerstände sowohl im Kreis $MAaN$ als auch in $PbBQ$ groß sind, ist die durch diese Zweige fließende Stromstärke im Vergleich zu der durch R und X fließenden klein. Deshalb ist der Spannungsabfall an den Zuleitungsdrähten in allen Teilen der Brücke, d. h. in den Teilen ML, LQ, NF und FP, klein im Vergleich zum Spannungsabfall sowohl an den Widerständen A, B, a, b als auch an R und X. Folglich müssen die Widerstände der Zuleitungsdrähte nur im Vergleich zu den Widerständen a, b und A, B, und nicht zu X und R, klein sein.

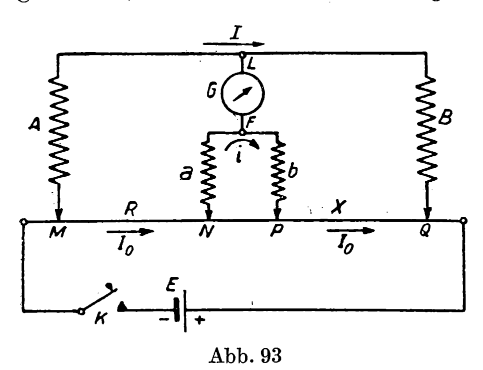


Abb. 93

Der Widerstand R besteht aus einem genau geeichten Draht, der über einen in Millimeter geteilten Maßstab gespannt ist. Der auf ihm abgegriffene Abschnitt zwischen den Punkten M und N kann durch Schleifkontakte verändert werden. Der Widerstand des ganzen Drahtes muß vorher bekannt sein. Die zu messenden unbekannten Widerstände X sind metallische Stäbe, die in besondere feste Klemmen eingespannt sind. Die Zuleitungsdrähte von den Widerständen b und B werden mit zwei verschiebbaren Klemmen („Schneiden") an dem Stab befestigt.

Durch Änderung der Widerstände A, B, a, b und R kann man erreichen, daß der Strom im Galvanometerkreis gleich Null wird. Dabei werden offensichtlich die Ströme in den Zweigen A und B, a und b, R und X paarweise gleich sein. Wir bezeichnen sie mit I, i, I_0.

Nach dem Kirchhoffschen Gesetz erhalten wir:

$$RI_0 + ai = AI$$

und

$$XI_0 + bi = BI,$$

woraus folgt

$$\frac{R}{X} = \frac{A}{B} \frac{I - \frac{a}{A} i}{I - \frac{b}{B} i}. \tag{1}$$

Wenn man die Widerstände a, A, b, B so wählt, daß

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B},$$

dann vereinfacht sich die Gleichung (1) wesentlich, und wir erhalten:

$$\frac{R}{X} = \frac{A}{B} \quad \text{oder} \quad X = \frac{B}{A} R.$$

Die Messung. Man schaltet die Anordnung nach der Abb. 93 zusammen, klemmt den zu messenden unbekannten Widerstand X zwischen P und Q ein und legt die gleichen Widerstände in die Zweige A und a und ebenso in die Zweige B und b. Durch gleichzeitige Veränderung von A und a kann man bei den Messungen folgende Verhältnisse einstellen:

$$\frac{B}{A} = \frac{b}{a} = \frac{10}{10} \quad \text{oder} \quad = \frac{10}{100} \quad \text{oder} \quad = \frac{10}{1000}.$$

Für jedes Verhältnis sucht man eine Stellung der Schleifkontakte auf R, bei der der Galvanometeranzeiger gar nicht ausgelenkt wird. Man schreibt sich jedesmal die Länge des geeichten Drahtabschnittes auf, der zwischen den Kontakten liegt.

Bei diesen Messungen darf man, genau wie beim Arbeiten mit der gewöhnlichen Brücke, den Stromkreis nur für kurze Zeit schließen.

Die Ausrechnung. Wenn man den Widerstand von 1 cm des geeichten Drahtes mit ω bezeichnet und seine Länge zwischen den verschiebbaren Kontakten mit l, dann müssen die endgültigen Berechnungen nach der Formel

$$X = \frac{B}{A} R = \frac{B}{A} l \omega$$

durchgeführt werden.

Die Bestimmung des spezifischen Widerstandes. Mit Hilfe des Maßstabes bestimmt man die Länge des zu untersuchenden Metallstabes, und mit der Schublehre mißt man an verschiedenen Stellen seinen Durchmesser. Als Größe des Durchmessers nimmt man den Mittelwert aus den Einzelmessungen.

Den spezifischen Widerstand ϱ berechnet man nach der Formel:

$$X = \varrho \frac{L}{\pi r^2},$$

wobei X der oben gemessene Widerstand des Drahtes, L die Länge des Stabes und r seinen Radius bedeuten.

Aufgabe 41

Die Messung der Urspannung eines galvanischen Elementes mit der Kompensationsmethode unter Benutzung eines Kapillarelektrometers

Zubehör: 1. Meßdraht, 2. Galvanometer, 3. Kommutator, 4. Doppeltaster, 5. Batterie, 6. DANIELL-Element, 7. LECLANCHÉ-Element.

Um die Urspannung zweier Elemente zu vergleichen, benutzt man meistens die Kompensationsmethode. Das Wesen dieser Methode besteht in folgendem: Schaltet man zwei Elemente mit den gleichen Polen zueinander in die Meßanordnung und bringt man den Strom, der durch das eine Element fließt, zum Verschwinden, dann kann man den Vergleich der Urspannung der Elemente durch den Vergleich bekannter Widerstände dieser Meßanordnung ersetzen. Diese Widerstände lassen sich aber mit großer Genauigkeit herstellen und vergleichen. Das Galvanometer dient hierbei als Nullinstrument, und die Eichung seiner Skala geht nicht in die Versuchsergebnisse ein. Ein anderer Vorteil dieser Methode besteht darin, daß die durch das untersuchte galvanische Element fließende Stromstärke fast Null ist und damit zu keinem Spannungsabfall innerhalb des Elementes führt. Denn bei den Verfahren, bei denen ein wesentlicher Meßstrom durch das untersuchte Element fließt, wird die zu messende Spannung an den Klemmen des Elementes erniedrigt. In der vorliegenden Methode kann die durch das Element fließende Stromstärke bis zu Werten der Größenordnung 10^{-9} bis 10^{-10} A herabgesetzt werden, wenn man ein Spiegelgalvanometer benutzt.

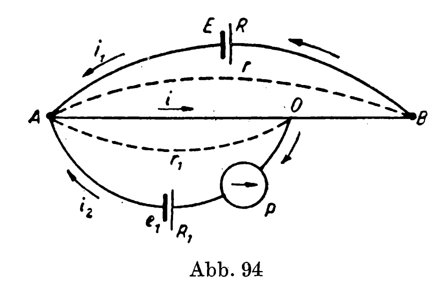


Abb. 94

Die Beschreibung der Methode und der Anordnung. Wir legen zwei Elemente mit den Urspannungen E und e_1 in die schematisch in Abb. 94 dargestellte Schaltung. Dabei werden zwei gleiche Pole der beiden Elemente im Punkte A verbunden. Wir suchen nun die Bedingung, die die Größen der Urspannung beider Elemente verknüpft für den Fall, wenn die Stromstärke im Galvanometerkreis gleich Null ist. Auf Grund der KIRCHHOFFschen Gesetze kann man schreiben: Für den Punkt A

$$i = i_1 + i_2,$$

für den Kreis $EAOB$

$$E = i_1 (R + r - r_1) + i r_1$$

und für den Kreis e_1AO

$$e_1 = i_2 (R_1 + \varrho) + i r_1.$$

Hierbei ist R der Widerstand des Teiles AEB, r der Widerstand des Meßdrahtes AB, r_1 der Widerstand des Teiles AO von ihm, R_1 der Widerstand des Teiles e_1AO und ϱ der Widerstand des Galvanometers; i, i_1 und i_2 sind die Ströme in den einzelnen Zweigen.

Wenn das in dem Kreis des Elementes e_1 liegende Galvanometer keinen Strom anzeigt ($i_2 = 0$), dann ist

$$i = i_1, \quad E = i(R + r), \quad e_1 = i r_1,$$

woraus folgt

$$e_1 = \frac{E r_1}{R + r}.$$

Wenn statt des Elementes e_1 ein anderes Element e_2 in die Meßanordnung geschaltet wird und der für die Stromlosigkeit des Galvanometers benötigte Widerstand von AO nun r_2 beträgt, dann gilt die Gleichung:

$$e_2 = \frac{E r_2}{r + R}.$$

Teilen wir die letzten beiden Gleichungen durcheinander, so erhalten wir:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Da die Widerstände r_1 und r_2 den entsprechenden Längen L_1 und L_2 des Teiles AO des Drahtes proportional sind, erhalten wir endgültig:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{L_1}{L_2}.$$

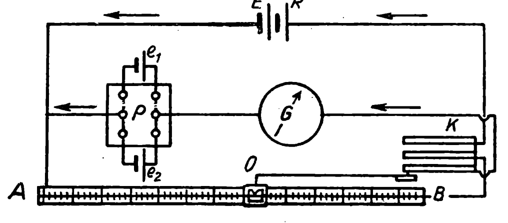


Abb. 95

Auf diesem Prinzip beruht die Methode des Vergleiches der Urspannungen e_1 und e_2 zweier Elemente.

Wie man aus der letzten Gleichung sieht, geht die Größe der Urspannung der Batterie E nicht in das endgültige Resultat des Vergleiches von e_1 und e_2 ein. Deshalb muß die Batterie E nur eine konstante Urspannung besitzen, die größer ist als die der beiden zu vergleichenden Batterien. Als eine solche Batterie wird mit Erfolg ein Akkumulator verwendet.

Man muß im Auge behalten, daß der Stromkreis nur für so kurze Zeit geschlossen werden darf, daß man gerade feststellen kann, ob durch das Galvanometer Strom fließt oder nicht. Sonst könnte eine Erwärmung der Zuleitungsdrähte auftreten, die ihren Widerstand ändert, und außerdem könnten sich die Urspannungen e_1 und e_2 der Elemente ändern, wenn sie stark polarisiert werden. Ebenfalls muß man beachten, daß das Schließen des Zweiges AOB dem Schließen des Galvanometerkreises vorausgehen muß. Sonst würde sogar bei richtiger Einstellung des Schleifkontaktes O das Galvanometer ausschlagen, weil der kompensierende Strom vom Element E im Meßdraht AOB fehlen würde. Das wird durch einen Doppeltaster erreicht, der den Kreis der Hilfsbatterie vor dem Kreis mit dem zu untersuchenden Element schließt.

Die Anordnung der Schaltelemente ist aus der Abb. 95 ersichtlich.

Die Elemente e_1 und e_2, deren Urspannungen verglichen werden sollen, sind mit Hilfe des Kommutators P so in den Galvanometerkreis geschaltet,

daß bei Umklappen des Schalthebels nach der einen Seite das Element e_1 und beim Umklappen nach der anderen das Element e_2 eingeschaltet wird.

Es sollen die Urspannungen zweier Elemente — des DANIELL- und des LECLANCHÉ-Elementes — gemessen werden. Das DANIELL-Element wird normalerweise in Einzelteile zerlegt aufbewahrt.

Die Messung. Man setzt das DANIELL-Element zusammen. Vorher wird der poröse Zylinder gut gewaschen, dann wird so viel verdünnte Schwefelsäure (1 Teil Säure auf 20 Teile Wasser) hineingegossen, bis er zu $^2/_3$ bis $^3/_4$ gefüllt ist. Man taucht den Zinkstab in den Zylinder und läßt ihn 5 bis 10 Minuten stehen, damit die Schwefelsäure in die Wände des Zylinders eindringt. Währenddessen stellt man in ein sauberes Becherglas einen Hohlzylinder aus Kupfer und gießt so viel konzentrierte Kupfersulfatlösung hinein, daß nach dem Eintauchen des porösen Zylinders die Höhe der Flüssigkeit im äußeren Glasgefäß etwas tiefer liegt als im inneren Zylinder. Nach dem Eintauchen des porösen Zylinders läßt man das Element einige Zeit stehen, da die Urspannung des DANIELL-Elementes sich nicht sofort, sondern erst allmählich einstellt.

Hat man die Meßanordnung zusammengeschaltet, so verschiebt man den Schleifkontakt O so lange, bis das Galvanometer beim Druck auf den Taster K keinen Strom mehr anzeigt. Man liest die Stellung des Kontaktes O auf der Skala ab, legt den Hebel des Kommutators P um und führt das gleiche für das zweite Element durch.

Zur Kontrolle wird die Größe des Widerstandes R durch Hintereinanderschalten kleiner Zusatzwiderstände zum Meßdraht verändert und die Messung erneut durchgeführt.

Aus den Meßergebnissen werden die Urspannungen beider Elemente errechnet. Wenn der Wert der Urspannung eines Elementes bekannt ist, kann man den des zweiten Elementes bestimmen.

Die Messung mit der Kompensationsmethode, die in der vorliegenden Aufgabe in der einfachsten Art aufgebaut wurde, ist zur Zeit die für ähnliche Messungen hauptsächlich benutzte Meßanordnung.

Die Beschreibung der Anordnung. Die Wirkungsweise des Kapillarelektrometers beruht auf der Eigenschaft des Quecksilbers, seine Oberflächenspannung zu verändern, wenn eine Potentialdifferenz zwischen seiner Oberfläche und einem angrenzenden anderen Medium vorhanden ist. Diese Veränderung gehorcht einem linearen Gesetz, wenn die Potentialdifferenz einige zehntel Volt nicht überschreitet. Befindet sich dabei das Quecksilber auf negativem Potential, so nimmt seine Oberflächenspannung zu.

In der Kapillare d (Abb. 96) liegt die Trennfläche (Meniskus) zwischen Quecksilber und angesäuertem Wasser. Die Krümmung dieses Meniskus, die durch die Höhendifferenz des Quecksilbers in der Kapillare und in dem breiten Rohr hervorgerufen wird, hängt von der Größe der Oberflächenspannung des Quecksilbers ab und verändert sich, wie schon gesagt, in Abhängigkeit von der Potentialdifferenz zwischen dem Quecksilber und dem angesäuerten Wasser. Wenn das Quecksilber in der Kapillare negativ aufgeladen ist und das Wasser positiv, so nimmt die Oberflächenspannung zu, und der Meniskus senkt sich in der Kapillare um so mehr, je höher die Potentialdifferenz ist. Wenn deshalb die Klemmen K und K' des Elektrometers zuerst

mit den Polen des einen und dann mit denen des anderen Elementes verbunden werden, läßt sich aus der beobachteten Stellung des Meniskus in der Kapillare auf das Verhältnis der Urspannungen dieser Elemente schließen.

Da aber die Änderung der Höhe des Quecksilbers nur in den Grenzen eines kleinen Bereiches der Skala dieser Anordnung linear ist, wird der Meniskus mit Hilfe eines horizontal liegenden Mikroskops, das mit einem Okularmikrometer ausgerüstet ist, beobachtet.

Die Klemmen K und K' werden mit den Polen der zu vergleichenden Elemente nicht unmittelbar verbunden, sondern es wird für den Vergleich nur ein kleiner Teil der Urspannung dieser Elemente (z. B. 0,01) von dem Spannungsteiler abgegriffen. Dazu schließt man das Element E an den vollen Widerstand des Stöpselrheostaten R (nicht kleiner als 10000 Ω) an und verbindet die Enden des Widerstandes r (etwa 100 Ω) mit K und K'.

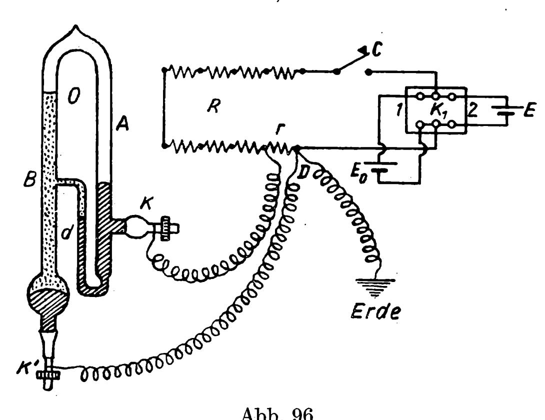


Abb. 96

Gewöhnlich werden die Urspannungen der Elemente mit den Normalelementen von CLARK und WESTON verglichen. Das letztere ist deshalb vorzuziehen, weil seine Urspannung E_0 fast unabhängig von der Temperatur ist. Sie ist gleich 1,0189 V. Die Abhängigkeit der Urspannung des CLARK-Elementes von der Temperatur wird durch folgende Formel dargestellt:

$$E_t = 1{,}4328 - 1{,}19 \cdot 10^{-3}(t - 15).$$

Der Versuchsaufbau ist aus der Abb. 96 zu ersehen. Hierin ist O das Elektrometer, E_0 das Normalelement und E das zu messende Element, K_1 der Kommutator, R der Stöpselrheostat von der Größenordnung 10000 Ω und C der Schalter. Die Klemme D des Widerstandes ist geerdet. Die Pole des Elementes und die Elektroden des Elektrometers müssen mit dem Kommutator und dem Widerstand so verbunden werden, wie in der Abb. 96 gezeigt ist.

Aus dem Widerstand müssen vorher alle Stöpsel herausgenommen werden und der Schalter C geöffnet sein. Erst dann darf man an das Zusammenschalten der Meßanordnung gehen. Dabei muß man mit dem Normalelement besonders vorsichtig umgehen und auf keinen Fall seine Pole auch nur für einen Moment kurz schließen. Denn dabei wird das Element beschädigt[1]).

Die Messung. Hat man die Anordnung zusammengeschaltet, stellt man den Kommutator auf die Stellung *1* und fixiert bei geöffnetem Schalter C mit dem

[1]) Der durch ein Normalelement mit Elektroden von üblicher Größe fließende Strom darf 10^{-4} A und bei längerem Arbeiten sogar 10^{-5} A nicht überschreiten.

Mikroskop die Stellung p_0 des Quecksilbermeniskus auf der Skala. Diese Stellung entspricht der Gleichheit der Potentiale K und K'. Dann schließt man C und fixiert nun die Stellung des Meniskus P_0, bei der zwischen K und K' eine Potentialdifferenz herrscht, die gleich

$$e_0 = \frac{rE_0}{R} \tag{1}$$

ist, wobei r der Widerstand des Teiles des Stöpselrheostaten ist, der in dem Kreis des Elektrometers liegt; R ist der Gesamtwiderstand. Da p_0 und P_0 der Oberflächenspannung proportional sind, erhalten wir:

$$e_0 = c\,(P_0 - p_0), \tag{2}$$

wobei mit c der Proportionalitätsfaktor bezeichnet ist.

Man legt den Bügel des Kommutators in die Stellung *2* um und liest die Stellung P des Meniskus für die jetzt herrschende Urspannung e ab.

Die Ausrechnung. Offensichtlich geht aus dem vorhergehenden

$$e = \frac{rE}{R} = c\,(P - p_0) \tag{3}$$

hervor. Auf Grund der Beziehungen (1), (2) und (3) kann man schreiben:

$$E : E_0 = e : e_0 = (P - p_0) : (P_0 - p_0).$$

Setzt man darin den Wert E_0 der Urspannung des Normalelementes ein, so findet man die Größe der Urspannung des anderen Elementes.

Mit dieser Methode, die zur Messung der Urspannung ein Kapillarelektrometer verwendet, erreicht man keine große Genauigkeit der Ergebnisse, weil die hierbei benutzten elektrokapillaren Erscheinungen wenig stabil sind, und weil das Kapillarelektrometer nicht als Null- sondern als Anzeigeinstrument verwendet wird, dessen Skala nicht geeicht worden ist. Dafür ist es aber in jeder Glasbläserwerkstatt leicht herzustellen. Diese Methode wird im allgemeinen nur zu orientierenden Messungen verwendet, während man für genaue Messungen potentiometrische Methoden anwendet.

Aufgabe 42

Die Eichung eines Thermoelementes und die Bestimmung seiner Thermokraft

Zubehör: 1. Eisen-Konstantan-Element, 2. Galvanometer mit der Empfindlichkeit 10^{-7} A/Skt, 3. zwei Reagenzgläser mit Petroleum, 4. zwei Messinggefäße, 5. zwei Thermometer von 0° bis 100° C, 6. elektrischer Ofen, 7. zwei Dreibeine, 8. Schirm, 9. Widerstand von etwa 100 Ω.

Wenn man aus zwei oder mehreren Drähten, die aus verschiedenen Metallen gefertigt sind, einen geschlossenen Kreis durch Schweißen oder Löten herstellt, so fließt durch diesen Kreis ein Strom, wenn die Temperatur nicht an allen Lötstellen gleich ist. Das Fließen des Stromes hängt mit dem Auftreten

von Thermokräften zwischen den Lötstellen der verschiedenen Leiter zusammen. Die Größe dieser Kräfte wird durch die Temperatur der Lötstellen bestimmt, und sie kompensieren sich nicht, wenn nicht alle Lötstellen die gleiche Temperatur besitzen. Zwei an ihrem einen Ende zusammengeschweißte Leiter werden als *Thermoelement* bezeichnet.

Wenn die Leiter auch an ihrem anderen Ende verbunden werden, kann die im Thermoelement auftretende Thermospannung E durch die durch den Kreis fließende Stromstärke I ausgedrückt werden:

$$E = I(R_i + R_a) = I R_0, \tag{1}$$

wobei R_i der innere Widerstand des Thermoelementes und R_a der äußere Widerstand des Kreises bedeuten.

Wenn R_i, im Vergleich zu R_a, so klein ist, daß seine Änderung bei Erwärmung den Gesamtwiderstand kaum verändert, kann man die Stromstärke der Thermospannung proportional annehmen. Letztere nimmt aber mit zunehmender Temperaturdifferenz der Lötstellen zu, wobei für kleine Temperaturdifferenzen (in der Größenordnung einiger 10^1 Grad) die Zunahme proportional zu diesen Differenzen erfolgt, d. h.

$$E = c(t_1 - t_0). \tag{2}$$

Dabei ist c die Thermokraft, die bei der Temperaturdifferenz von 1° C auftritt. Sie ist eine charakteristische Größe für jedes Metallpaar, aus dem das Thermoelement besteht.

Wenn der so erhaltene Thermostrom mit einem empfindlichen Galvanometer gemessen wird, ist die Auslenkung des Galvanometerzeigers, die der Stromstärke proportional ist, bei Erfüllung der Gleichungen (1) und (2) auch der Temperaturdifferenz proportional.

Auf dieser Erscheinung beruht die thermoelektrische Methode der Temperaturmessung.

Dafür hält man die eine Lötstelle des Thermoelementes auf konstanter Temperatur, bringt die andere mit dem Gegenstand, dessen Temperatur gemessen werden soll, in Berührung und liest den Ausschlag des Galvanometers ab. Will man die Temperatur in Celsius-Graden ablesen, so muß das Thermoelement vorher geeicht werden.

Zur Eichung wird die zweite Lötstelle in ein Medium mit veränderlicher, aber bekannter Temperatur getaucht und der entsprechende Galvanometerausschlag bestimmt. Die Ergebnisse werden entweder graphisch dargestellt, wobei man durch Interpolation die Zwischenwerte der Temperatur auch bei nicht strenger Proportionalität zwischen der Auslenkung und der Temperaturdifferenz (nichtlineare Kurve) erhalten kann, oder, wenn diese Proportionalität vorhanden ist, in Form der Formel

$$\alpha_n = \gamma(t_n - t_0), \tag{3}$$

wobei γ aus den Eichwerten α_n und t_n bestimmt wird:

$$\gamma = \frac{\alpha_n}{t_n - t_0}. \tag{4}$$

Die Konstanz dieser Größe (sie charakterisiert die Neigung der Geraden) für verschiedene α_n und t_n ist das Kriterium für die Formel (3).

Die thermoelektrischen Erscheinungen werden heutzutage sowohl in Laboratorien als auch in der Industrie zu Temperaturmessungen verwendet.

Für die Messung mittlerer Temperaturen (niedriger als 800° C) werden meistens folgende Thermopaare benutzt: Konstantan/Eisen, Konstantan/Kupfer, Nickel/Eisen, Nickel/Platin. Zur Messung der Temperaturen bis zu 1700° C verwendet man: Platin/Platin-Rhodium (Platinlegierung mit 10% Rhodium). Um geringe Erwärmungen nachzuweisen, beispielsweise hervorgerufen durch Absorption eines Lichtstromes, benutzt man Vakuum-Thermoelemente (nach einem Vorschlag von P. N. LEBEDEW). Mit guten Thermoelementen erreicht man bei einer Strahlungsleistung von 0,5 erg/sec eine Thermokraft von 1 μV. Die Hauptschwierigkeit bei einer genauen Temperaturmessung mit Thermoelementen besteht in der Inhomogenität der Legierungen, die große Thermokräfte erzeugen; reine Metalle erzeugen nur kleine Thermokräfte. Für genaue Temperaturmessungen hat das elektrische Widerstandsthermometer, das aus einem homogenen Platindraht besteht, das Thermoelement vollständig verdrängt.

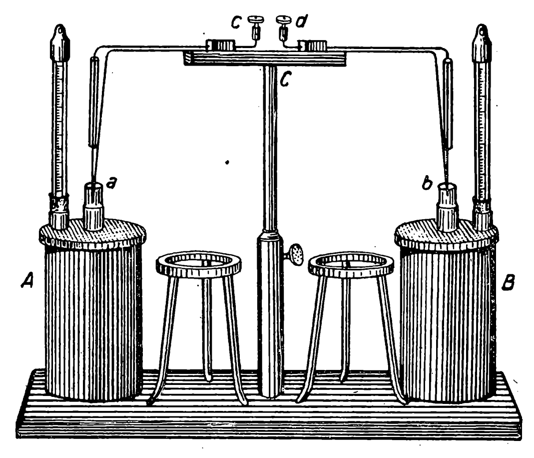


Abb. 97

Die Beschreibung der Anordnung. Das Thermoelement (Abb. 97) besteht aus zwei verschiedenartigen Drähten von etwa 1 mm Durchmesser, die an ihren Enden zusammengeschweißt oder -gelötet sind. Einer der Drähte ist durchschnitten und an den Klemmen *c* und *d* befestigt, an welche das Galvanometer angeschlossen wird. Bei der Messung muß man darauf achten, daß die Temperatur aller äußeren Kontakte gleich ist, weil sonst an ihnen auch Thermokräfte auftreten würden, die das Ergebnis fälschen würden. Die beiden Drähte des Thermoelementes sind an der Stütze *C* befestigt und können in verschiedene Höhen eingestellt werden. Um die Temperatur der einen Lötstelle konstant zu halten, wird sie in ein mit Petroleum oder Paraffinöl gefülltes Reagenzglas *a* getaucht, das seinerseits in dem mit schmelzendem Eis (oder mit Wasser von Zimmertemperatur) gefüllten Gefäß *A* steckt. Die Temperatur des Wassers muß dabei genau gemessen sein. Die andere Lötstelle wird auf irgendeine Art mit dem zu untersuchenden Körper in Berührung gebracht. Zur Eichung wird sie in das zweite Reagenzglas *b* getaucht, dessen Temperatur durch Erwärmen des Wassers in dem Gefäß *B* verändert werden

kann. Das Gefäß ist mit einem Thermometer und einem Rührer versehen. Der Rührer dient zur gleichmäßigen Verteilung der Temperatur in dem ganzen Volumen des Gefäßes.

Übung 1

Die Eichung des Thermoelementes

Man füllt die beiden Gefäße A und B mit Eis (oder Schnee) und gießt bis zum Rand Wasser hinein, damit alles Eis gleichmäßig schmilzt[1]), füllt die beiden Reagenzgläser mit Petroleum, taucht sie in diese Gefäße und verfolgt ihre Temperatur mit Thermometern, bis sie die Temperatur des Eises[2]) angenommen haben. Dann taucht man die Enden des Thermoelementes in die Reagenzgläser und schließt an seine Klemmen das Galvanometer an. Bei völliger Gleichheit der Temperatur in den Reagenzgläsern darf sein Zeiger nicht ausgelenkt werden. Der Schmelzpunkt des Eises[3]) wird als Anfangswert t_0 der Temperatur genommen.

Man erwärmt das Gefäß B durch eine elektrische Heizplatte um einige Grade, schaltet die Heizung ab, rührt dauernd das Wasser um und beobachtet den Galvanometerzeiger. Es wird einige Zeit dauern, bis sich auch im Petroleum ein Temperaturgleichgewicht eingestellt hat und der Galvanometerzeiger auf einem konstanten Wert stehenbleibt. Dieser Wert und die entsprechende Temperatur werden aufgeschrieben, denn langsam beginnt das Wasser des Gefäßes, und mit ihm das Petroleum, wieder abzukühlen.

Man setzt die Erwärmung bis zum Siedepunkt des Wassers in solchen Intervallen fort, läßt es danach wieder abkühlen und liest von Zeit zu Zeit ab. Wenn die Temperatur zu Anfang der Abkühlung zu stark fällt, so daß eine genaue Ablesung der entsprechenden Werte t und α nur schwer möglich ist, so verlangsamt man die Abkühlung durch schwaches Erwärmen des Gefäßes B.

Die Ergebnisse werden graphisch dargestellt. Auf der Abszissenachse wird $t - t_0$ abgetragen und auf der Ordinatenachse α. Wenn die erhaltene Abhängigkeit linear ist, bestimmt man nach der Formel (4) den Koeffizienten γ der Formel (3).

Übung 2

Die Bestimmung der Thermokraft eines Thermoelementes

Wie schon gesagt, ist die Konstante c der Formel (2) für jedes Thermopaar, aus dem das Thermoelement besteht, eine charakteristische Größe und gibt die Spannung an, die bei der Temperaturdifferenz zweier Lötstellen von 1° C entsteht. Je größer diese Konstante ist, desto empfindlicher ist das Thermoelement. Ihre Bestimmung erfolgt folgendermaßen: Man mißt den Ausschlag des Galvanometers α_0, der irgendeiner bestimmten Temperaturdifferenz $t - t_0$ entspricht, führt dann die gleiche Messung bei derselben Temperatur durch,

---

[1]) Wenn kein Eis vorhanden ist, können die Gefäße mit Wasser von Zimmertemperatur gefüllt werden. Es muß dann aber seine Temperatur genau gemessen werden.

[2]) oder des Wassers.

[3]) oder die Zimmertemperatur.

aber mit einem zusätzlichen Widerstand A_1 in Reihe mit dem Galvanometer. Dann erhält man den entsprechenden Ausschlag α_1. Bezeichnen wir mit R_0 den Widerstand des Kreises, der aus dem Thermoelement, dem Galvanometer und den Zuleitungen besteht, dann erhalten wir für den ersten Fall:

$$E = i\alpha_0 R_0,$$

und für den zweiten:

$$E = i\alpha_1 (R_0 + R_1),$$

wobei i die Empfindlichkeit des Galvanometers ist, d. h. die Stromstärke, die einen Ausschlag des Galvanometerzeigers um einen Skalenteil hervorruft. Setzt man für R_0 den Ausdruck ein, so erhält man

$$E = i \frac{\alpha_0 \alpha_1}{\alpha_0 - \alpha_1} R_1 .$$

Daraus folgt

$$c = \frac{E}{t - t_0} = \frac{i R_1}{t - t_0} \cdot \frac{\alpha_0 \alpha_1}{\alpha_0 - \alpha_1} . \tag{5}$$

Die Größe c wird gewöhnlich in μV/Grad angegeben.

Die Messung. Nach Beendigung der Meßreihe der ersten Übung wird das Gefäß B auf eine bestimmte Temperatur erwärmt und durch Regelung der Heizung für einige Minuten konstant gehalten.

Man liest α_0 am Galvanometer ab, schaltet sofort den Zusatzwiderstand R_1 ein und liest den neuen Ausschlag α_1 des Galvanometers ab. Die Temperatur muß für beide Ablesungen die gleiche geblieben sein.

Hat man die Temperatur t genau abgelesen, so setzt man die erhaltenen Werte in die Formel (5) ein und rechnet c aus.

Mit der hier angewendeten Methode zur Bestimmung der Thermokraft läßt sich keine hohe Meßgenauigkeit erzielen; ihr Vorteil besteht in der Einfachheit der verwendeten Apparatur. Genaue Messungen der Thermokraft können mit einer potentiometrischen Methode ausgeführt werden.

Spezialliteratur

F. Hennig: „Temperaturmessungen". Verlag J. A. Barth, Leipzig 1955.

Aufgabe 43

Die Wirkungsweise von Elektronenröhren

Zubehör: 1. Dreielektrodenröhre, 2. Stromquellen (Batterien von 6, 10 und 120 V), 3. Voltmeter für 6, 10 und 120 V, 4. Milliamperemeter für 10 mA, 5. Potentiometer, 6. Belastungswiderstand für den Anodenkreis.

Einführung. Zur Ausführung der vorliegenden Aufgabe müssen Kenntnisse über die Erscheinung der thermischen Emission von Elektronen und den Durchgang eines elektrischen Stromes durch das Vakuum im Raum zwischen

den Elektroden vorausgesetzt werden, wie sie in den Lehrbüchern der Experimentalphysik behandelt werden.

Der Aufbau der einfachsten Elektronenröhre ist schematisch in der Abb. 98 dargestellt. In einem evakuierten Kolben aus Glas oder Metall, in dem ein Restgasdruck von höchstens 10^{-7} mm Hg herrscht, sind die Elektroden der Röhre angeordnet. Auf dieser Zeichnung ist HH der Heizfaden aus Wolframdraht, von dem bei Stromdurchgang die thermische Emission der Elektronen ausgeht. C ist das Gitter (in Wirklichkeit ist es eine Spirale aus wenigen Windungen) und A die Anode der Röhre. Die Zuleitungen zu diesen Elektroden gehen durch den Fuß und sind mit den Stiften des Sockels verbunden.

Wenn man außerhalb der Röhre ihren Anodenkreis kurzschließt und den Heizstrom einschaltet, so ist der Anodenstrom nur sehr klein, und seine Stromstärke entspricht nicht der bei der Temperatur des Heizfadens möglichen Elektronenemission.

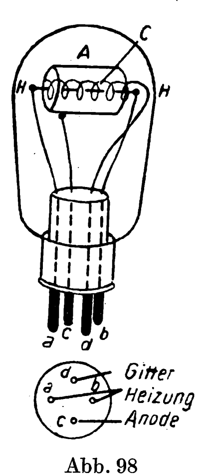


Abb. 98

Der Grund hierfür ist folgender: Liegt an der Röhre keine Anodenspannung, die ein Feld zwischen dem Faden (Kathode) und der Anode erzeugt und somit die Elektronen zur Anode hin beschleunigt, so bildet sich um den Faden herum eine negative Raumladung. Diese Ladung sperrt mit ihrem Feld, das von der Kathode zur Anode hin gerichtet ist, fast vollständig die Elektronenemission von der Oberfläche des geheizten Fadens. Erzeugt man jedoch durch Anschließen einer Anodenbatterie zwischen dem Faden und der Anode ein elektrostatisches Feld, das von der Anode zur Kathode gerichtet ist, so bewegen sich die Elektronen unter seinem Einfluß zur Anode, und durch die Röhre fließt ein beträchtlicher Strom. Wenn der Faden genügend Elektronen emittieren kann, hängt die Stärke des Anodenstromes von der an die Röhre angelegten Anodenspannung ab.

Die Abhängigkeit des Anodenstromes in einer Zweielektrodenröhre von der zwischen dem Faden und der Anode angelegten Spannung wird durch eine Formel ausgedrückt, die der Professor der Moskauer Universität Boguslawski eingeführt hat:

$$I = K\sqrt{\frac{2e}{m}}\sqrt{V^3}, \tag{1}$$

wobei e die Elektronenladung, m die Masse des Elektrons, K ein Proportionalitätsfaktor, der von der Form der Elektroden abhängt, und V die Anodenspannung bedeuten. Sind keine Leiter vorhanden, die dem Ohmschen Gesetz gehorchen, so nimmt der Anodenstrom proportional $V^{3/2}$ zu. Zur Abkürzung wird diese Formel als *$V^{3/2}$-Gesetz* oder die Boguslawski-Formel[1]) bezeichnet.

Bei einer bestimmten Spannung gelangen **alle** Elektronen, die bei einem vorgegebenen Heizstrom in der Zeiteinheit den Faden verlassen, zur Anode.

[1]) Anm. d. Red.: Langmuir-Schottkysches Raumladungsgesetz.

Durch weiteres Erhöhen der Anodenspannung nimmt dann die Stärke des Anodenstromes nicht mehr zu. Es tritt *Sättigung* des Anodenstromes auf, und das „$V^{3/2}$-Gesetz" verliert seine Gültigkeit.

Die Zahl der vom Faden in der Zeiteinheit emittierten Elektronen hängt von seiner Temperatur ab. Deshalb können wir durch Erhöhen der Temperatur des Heizfadens auch den Sättigungsstrom vergrößern. Die Abhängigkeit des Sättigungsstromes von der Temperatur des Fadens gibt die Formel[1]:

$$I_{\text{Sätt}} = S a \sqrt{T} e^{-\frac{b}{T}} \tag{2}$$

an, wobei S die Oberfläche des Fadens, T seine absolute Temperatur und a und b Konstante bedeuten, die von dem Material des Fadens abhängen.

Die Kurven, die die Abhängigkeit des Anodenstromes von der Anodenspannung bei bestimmter Temperatur des Heizfadens und konstantem Gitterpotential graphisch darstellen, werden *Anodenstrom-Anodenspannungs-Kennlinien* der Röhre genannt.

Kommen wir nun zur Erklärung der Rolle, die das Gitter spielt. Das auf dem Weg der Elektronen zwischen Faden und Anode angebrachte Gitter wirkt auf die Bewegung der Elektronen ein. Wenn man zwischen den Faden und das Gitter eine Batterie schaltet und damit zwischen ihnen eine bestimmte Potentialdifferenz schafft, so wirkt diese, je nach Vorzeichen, beschleunigend oder hemmend auf die Bewegung der Elektronen und verändert damit den Anodenstrom. Die Stärke des Anodenstromes hängt von der Gitterspannung stärker ab als von der Anodenspannung, weil das Gitter dem Faden viel näher liegt als die Anode. Deshalb bedarf es nur der Anlegung einer verhältnismäßig kleinen positiven Spannung an das Gitter, um zwischen ihm und der Kathode ein starkes Feld zu erzeugen und damit einen hohen Anodenstrom zu erreichen, und umgekehrt genügt eine kleine negative Gitterspannung, um den Anodenstrom völlig zu unterbrechen.

Die Kurven, die die Abhängigkeit des Anodenstromes von der Gitterspannung bei konstantem Anodenpotential darstellen, werden *Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien* genannt.

Bei der Messung des Anodenstromes ohne Gitterspannung muß man das Gitter mit der Kathode direkt verbinden, damit das Gitterpotential einen bekannten konstanten Wert während des ganzen Versuches annimmt. Unterläßt man dies, so sammeln sich Elektronen auf dem Gitter an, laden es negativ auf, und man muß einen besonderen Versuch durchführen, um das Gitterpotential zu bestimmen. Das Gitter der arbeitenden Röhre wird stets mit den entsprechenden Elementen der Schaltung, in der die Röhre liegt, verbunden.

Die Beschreibung der Anordnung. Für die Bestimmung der obenerwähnten Abhängigkeiten, oder, wie man auch sagt, für die *Aufnahme der Kennlinien* einer Röhre, wird diese nach der Abb. 99 mit Batterien und Meßinstrumenten verbunden. Darin bedeuten A, H und G Anode, Heizfaden und Gitter der Röhre, E_1, E_2 und E_3 Anoden-, Heiz- und Gitterbatterien, R_1, R_2 und R_3 die

[1]) Anm. d. Red.: RICHARDSONsches Gesetz.

Widerstände und Potentiometer, mit denen die Spannungen verändert werden können, und V_1, V_2 und V_3 die Voltmeter, mit denen die Anoden-, Heiz- und Gitterspannung gemessen werden (die Voltmeter müssen für folgende Spannungen bemessen sein: V_1 bis 150 V, V_2 bis 5 V und V_3 bis 10 V), *mA* ist ein Milliamperemeter, das den Anodenstrom anzeigt, und *B* ein Kommutator, der das Vorzeichen der Gitterspannung umzukehren gestattet. (Ist in dem Praktikumsraum eine Gleichstromleitung von 120 V vorhanden, so kann man damit die Batterie E_1 ersetzen. Das ist jedoch nur ratsam, wenn die Spannung in dieser Leitung konstant genug ist. Man kann auch einen stabilisierten Gleichrichter benutzen.) Das Voltmeter V_2, das den Spannungsabfall am Faden anzeigt, dient als Maß für die Heizstärke des Fadens, welche durch den Widerstand R_2 verändert wird. R_2 muß vor dem Einschalten des

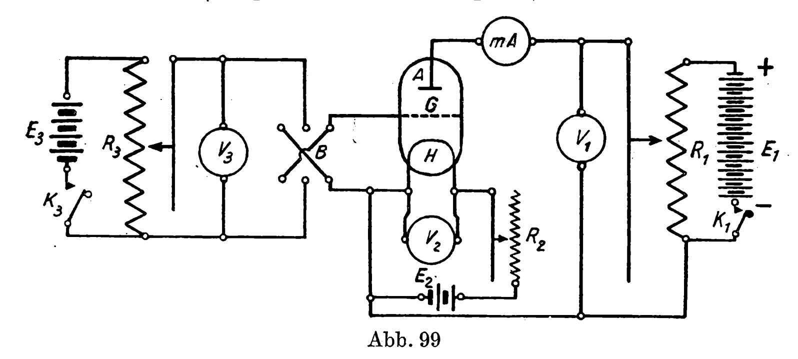


Abb. 99

Heizstromes (um ein Durchbrennen des Fadens zu vermeiden) auf seinen Maximalwiderstand eingestellt werden. Danach muß er so weit herausgenommen werden, wie es zum Arbeiten mit der Röhre erforderlich ist.

Sämtliche Schaltelemente dürfen nur bei geöffneten Schaltern verbunden werden.

Übung 1

Die Aufnahme der Anodenstrom-Anodenspannungs-Kennlinien der Röhre

Die Messung. 1. Man setzt die Schaltung nach der Abb. 99 zusammen, schaltet den Heizkreis ein und verkleinert den Heizwiderstand, bis man den für die benutzte Röhre angegebenen Maximalwert der Heizspannung erreicht.

2. Man bringt den Gleitkontakt des Potentiometers R_3 in die Stellung, bei der das Gitter mit dem Faden direkt verbunden ist, d. h. $V_3 = 0$.

3. Man vergrößert allmählich die Anodenspannung in Abständen von 5 V und mißt gleichzeitig die Stärke des Anodenstromes mit dem Milliamperemeter für jeden Wert der Anodenspannung.

4. Hat man auf diese Weise die Anodenstrom-Anodenspannungs-Kennlinie bei voller Heizung aufgenommen, verringert man den Heizstrom etwas, nimmt erneut die Kennlinie auf usw. Man muß solche Werte der Heizspannung einstellen, bei denen für hohe Anodenspannungen der Strom aufhört, von der

Anodenspannung abzuhängen[1]). Diese Erscheinung ist für das Arbeiten der Röhre charakteristisch und soll in dieser Übung studiert werden.

5. Genauso, wie man die Anodenstrom-Anodenspannungs-Kennlinie bei der Gitterspannung gleich Null aufgenommen hat, nimmt man die Kennlinien auch für andere konstante Werte der Gitterspannung auf. Dazu stellt man den Spannungswert auf $+1$, $+2$, $+3$ V und von -1 bis -7 V ein. Die Auswahl der Werte der Gitterspannung, bei denen die Messungen vorgenommen werden sollen, wird nach der Anweisung des Assistenten getroffen.

6. Man schaltet das Gitter von dem Spannungsteiler ab, von dem die Gitterspannung abgegriffen wird, und schließt es an die Anode der Röhre direkt an. Damit entsteht aus einer Triode eine Diode (wenngleich auch mit zwei der geometrischen Anordnung nach ungleichen Anoden). Unter diesen Bedingungen kann man eine Anodenstrom-Anodenspannungs-Kennlinie der Diode aufnehmen. Dazu verkleinert man beträchtlich den Heizstrom und mißt den Anodenstrom in Abhängigkeit von der Anodenspannung. Man erreicht (durch entsprechende Auswahl der Heizströme) einen Sättigungsstrom an der oberen Krümmung der Kennlinie. Die graphisch dargestellten Kennlinien der Diode kann man schon mit den nach der Formel von BOGUSLAWSKI erhaltenen Kurven vergleichen. Den Parameter der theoretischen Kurve $K\sqrt{\frac{2e}{m}}$ [siehe Formel (1)] muß man für jede Kennlinie aus den experimentellen Daten entnehmen.

Übung 2

Die Aufnahme der Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien der Röhre

Die Messung. 1. Man stellt eine bestimmte Anoden- und Heizspannung ein, schließt den Schalter K_3, ändert die Gitterspannung mit dem Teiler R_3 in Intervallen von 0,5 V und mißt den entsprechenden Anodenstrom.

2. Hat man dem Potentiometer die volle Gitterspannung entnommen, schiebt man den Gleitkontakt wieder zurück, legt den Hebel des Kommutators B um und gibt nun durch Verschieben des Kontaktes dem Gitter eine negative Spannung. Man mißt dabei den Anodenstrom.

3. Hat man auf diese Weise eine Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinie aufgenommen, so verändert man die Anodenspannung und nimmt die nächste Kennlinie auf. Man erhält damit ein Kennlinienfeld, das für die Bestimmung der Parameter der Röhre notwendig ist. Man muß darauf achten, daß bei hohen positiven Werten der Gitterspannung eine bestimmte Erniedrigung des Anodenstromes auftritt. Das liegt am Auftreten eines Gitterstromes in der Röhre (wofür ein Teil der Emission der Kathode verbraucht wird) und an der Sekundäremission der Elektronen aus der Anode der Röhre (siehe Aufgabe 44). Diese Effekte treten als Unzulänglichkeiten bei dem Arbeiten mit der Dreielektrodenröhre auf.

[1]) Den Maximalwert des auf diese Weise erhaltenen Anodenstromes darf man nicht mit dem Sättigungsstrom verwechseln, dessen Wert durch die Emissionsfähigkeit des Fadens bestimmt ist. Im vorliegenden Fall sperrt das Gitter auch bei $V_3 = 0$ teilweise die Röhre. Die Untersuchung des Sättigungsstromes wird im Punkt 6 dieser Übung behandelt.

Übung 3

Der Einfluß der Belastung des Anodenkreises auf die Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien

Um die Arbeitsweise der Röhre bei Belastung zu studieren, d. h., wenn in ihren Anodenkreis ein Widerstand geschaltet wird, werden in dieser Übung die Kennlinien der Röhre mit einem in den Anodenkreis geschalteten Belastungswiderstand aufgenommen. Die Form der Kennlinien ändert sich in diesem Fall, weil die Anodenspannung dabei keine konstante Größe mehr ist, sondern als Differenz zwischen der Klemmenspannung der Anodenbatterie und dem Spannungsabfall am Belastungswiderstand erscheint. Bei Änderung des Anodenstromes ändert sich auch der Spannungsabfall am Belastungswiderstand und damit die an der Anode der Röhre liegende Spannung. Diese Änderung der Anodenspannung zwischen Röhre und Belastungswiderstand ruft wesentliche Änderungen der Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien hervor.

Man schaltet in den Anodenkreis der Röhre der gleichen Schaltung, wie sie in den vorhergehenden Übungen benutzt wurde, zusätzlich nacheinander einige Widerstände R_a zwischen 5 und 50 kΩ ein und legt an die Röhre und an den Belastungswiderstand bei allen verschiedenen Widerständen die volle Anodenspannung der Batterie (oder des Gleichrichters). Danach nimmt man die Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien bei verschiedener Belastung[1]) auf.

Als Ergebnis der Messungen erhält man ein neues Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinienfeld.

Die Auswertung der Ergebnisse. Die Meßergebnisse werden in Form der Anodenstrom-Gitterspannungs- und Anodenstrom-Anodenspannungs-Kennlinien dargestellt. Außerdem bestimmt man aus den erhaltenen Kennlinien die Hauptparameter, die die Arbeit einer Kathodenröhre charakterisieren: Der statische *Verstärkungsfaktor* $\mu = \frac{-\Delta V_A}{\Delta V_G}$ für $I_A = \text{const}$ (der reziproke Wert $D = \frac{1}{\mu}$ trägt die Bezeichnung *Durchgriff* der Röhre), der *innere Widerstand* der Röhre $R_i = \frac{\Delta V_A}{\Delta I_A}$ für $V_G = \text{const}$ und die *Steilheit* der Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien der Röhre $S = \frac{\Delta I_A}{\Delta V_G}$ für $V_A = \text{const}$. Als Ergebnis der dritten Übung erhält man den dynamischen Verstärkungsfaktor der Röhre $\mu_{\text{dyn}} = \mu_{\text{stat}} \cdot \frac{R_a}{R_a + R_i}$.

Der physikalische Sinn und die Art der Bestimmung dieser Parameter der Röhre können folgendermaßen erklärt werden.

Der innere Widerstand der Röhre R_i wird als der Differentialquotient aus der Anodenspannung und dem Anodenstrom definiert, wenn die Gitter-

---

[1]) Der Belastungswiderstand kann nicht nur, wie es in der Aufgabe der Fall ist, in den Anodenkreis der Röhre, sondern auch in den Kathodenkreis geschaltet werden. Jedes Einschalten eines Belastungswiderstandes ändert auf seine Art die Arbeitsweise der Röhre und hat seine Vor- und Nachteile. Ausführliches darüber muß in der Spezialliteratur nachgelesen werden, die am Ende der Aufgabe angeführt ist.

spannung konstant gehalten wird. Der so definierte Röhrenwiderstand ist einer der Parameter der Röhre. Man darf diese Größe nicht mit dem Widerstand der Röhre $R = \frac{E_a}{I_a}$ verwechseln.

Aus den experimentellen Daten wird die Größe R_i auf folgende Weise bestimmt: In die Schar der Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien zeichnet man die Vertikale $V_G = \text{const}$ hinein. Sie schneidet den linearen Teil zweier benachbarter Kennlinien, die für verschiedene Werte der Anodenspannung aufgenommen sind. Dann gibt der Abschnitt auf dieser Vertikalen zwischen den beiden Kennlinien die Größe ΔI_A an (für $V_G = \text{const}$). Das Verhältnis der Differenz der Anodenspannungen, bei denen diese Kennlinien aufgenommen wurden, zu der Größe ΔI_A ergibt die Größe R_i, die in Ohm angegeben wird. Die für verschiedene Werte der Gitterspannung gefundenen Größen R_i werden graphisch als Funktion der Gitterspannung dargestellt.

Der Verstärkungsfaktor der Röhre $\mu = \frac{-\Delta V_A}{\Delta V_G}$ (für $I_A = \text{const}$) hat folgenden physikalischen Sinn: Der Anodenstrom der Röhre hängt für konstante Heizung von zwei Größen ab, und zwar von der Anoden- und der Gitterspannung. Jedoch hängt die Stärke des Anodenstromes von der Zunahme dieser beiden Spannungen in verschiedenem Maße ab. Das Gitter der Röhre liegt viel näher am Heizfaden als die Anode. Deshalb wirkt sich eine Änderung der Gitterspannung viel stärker auf die Stärke des Anodenstromes aus als die Änderung der Anodenspannung. Aus diesem Grunde benutzt man auch die Änderung der Gitterspannung zur Steuerung des Anodenstromes. Das Verhältnis der Zunahme der Anoden- zur Gitterspannung $\mu = \frac{-\Delta V_A}{\Delta V_G}$ für $I_A = \text{const}$, das eine gleichmäßige, wenn auch mit negativem Vorzeichen versehene Zunahme des Anodenstromes ergibt, wird Verstärkungsfaktor der Röhre genannt. In Aufgabe 65 werden wir genauer mit der Röhre als Verstärker vertraut gemacht.

Wird die Röhre im Anodenkreis belastet, nimmt die Größe des Verstärkungsfaktors einen anderen Wert an. In diesem Fall spricht man vom *dynamischen Verstärkungsfaktor* der Röhre

$$\mu_{\text{dyn}} = \mu_{\text{stat}} \frac{R_a}{R_a + R_i}.$$

Aus der Formel geht hervor, daß für hohe Belastungswiderstände der dynamische Verstärkungsfaktor sich dem statischen Verstärkungsfaktor nähert.

Aus den experimentellen Daten wird der Verstärkungsfaktor auf folgende Art bestimmt: Durch den linearen Teil der Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien wird in den Grenzen ΔV_A und ΔV_G die horizontale Gerade $I_A = \text{const}$ gezogen. Der Abschnitt dieser Geraden zwischen zwei benachbarten Kennlinien ergibt den Wert ΔV_G. Das Verhältnis der Differenz der Anodenspannungen, bei denen diese beiden benutzten Kennlinien aufgenommen worden sind, gibt den Wert ΔV_A. Der statische Verstärkungsfaktor wird definiert als das Verhältnis $\frac{\Delta V_A}{\Delta V_G}$. Die ausgerechneten Werte für μ werden, in

Abhängigkeit von der Gitterspannung der Röhre, graphisch dargestellt. Der dynamische Verstärkungsfaktor wird aus den Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien bestimmt, die bei anodenseitiger Belastung aufgenommen worden sind. Es ist leicht zu sehen, daß

$$\mu_{\text{dyn}} = \mu_{\text{stat}} \frac{R_a}{R_a + R_i} = \frac{\Delta V_A}{\Delta V_G} \frac{R_a}{R_a + R_i} = \frac{\Delta I_A}{\Delta V_G} R_a = S' R_a,$$

$$\mu_{\text{dyn}} \to \mu_{\text{stat}} \quad \text{bei} \quad R_a \gg R_i.$$

Somit kann man den dynamischen Verstärkungsfaktor auffassen als das Produkt aus der dynamischen Steilheit S' der Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien, die bei anodenseitiger Belastung aufgenommen wurden, und der Größe des im Anodenkreis liegenden Belastungswiderstandes. Es soll die Abhängigkeit des Verstärkungsfaktors von der Größe des Belastungswiderstandes untersucht werden.

Die Steilheit der Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien $S = \frac{\Delta I_A}{\Delta V_G}$ (für V_A = const) wird aus den gleichen Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien als der Tangens des Winkels ihrer Neigung zur Abszissenachse bestimmt. Die Steilheit hat die Dimension eines reziproken Widerstandes, wird aber gewöhnlich in $\frac{\text{mA}}{\text{V}}$ angegeben, um damit auf den Sinn dieses Parameters hinzuweisen, der die Abhängigkeit des Anodenstromes von der Gitterspannung angibt. Die Größe S wird ebenfalls als Funktion der Gitterspannung graphisch dargestellt.

Wenn alle drei statischen Parameter der Röhre für ein und denselben Punkt des Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinienfeldes gefunden sind, kann man die Beziehung prüfen, die zwischen ihnen bestehen muß[1]):

$$R_i \frac{S}{\mu} = \frac{\Delta V_A}{\Delta I_A} \cdot \frac{\Delta I_A}{\Delta V_G} \cdot \frac{\Delta V_G}{\Delta V_A} = 1 .$$

Die in dieser Aufgabe benutzte Elektronenröhre ist in ihrem Aufbau sehr einfach und bequem, um mit der prinzipiellen Wirkungsweise einer Triode bekannt zu werden. Doch weist sie verschiedene Mängel auf, die erst in Mehrelektroden-Röhren beseitigt werden. Mit ihnen befaßt sich die Aufgabe 44.

Man muß jedoch im Auge behalten, daß Röhren komplizierterer Konstruktion nicht nur Vorteile gegenüber der Triode, sondern auch gewisse Nachteile besitzen, wie hohen inneren Widerstand, Abhängigkeit der Parameter von der Elektrodenspannung usw. Deshalb haben die Trioden auch in der modernen Radiotechnik ihren Wert behalten.

Der diese Aufgabe Ausführende muß (bei der Abgabe des Protokolls) die hauptsächlichsten praktischen Anwendungen der Elektronenröhren als Gleichrichter, Verstärker und Generator ungedämpfter Schwingungen (Sender) kennen und ihre Wirkungsweise erklären können.

---

[1]) Anm. d. Übers.: BARKHAUSENsche Röhrenformel.

Spezialliteratur

1. A. von Weiss: „Übersicht über die theoretische Elektrotechnik“, 1. Teil: Die physikalisch-mathematischen Grundlagen. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG. Leipzig 1955.
2. H. Barkhausen: „Lehrbuch der Elektronenröhren“. Verlag S. Hirzel, Leipzig 1954.
3. J. Kammerloher: „Hochfrequenztechnik“. C. F. Wintersche Verlagsbuchhandlung, Leipzig 1941
4. M. Kulp: „Elektronenröhren und ihre Schaltungen“. Verlag Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1951.
5. H. Rothe und W. Kleen: „Grundlagen und Kennlinien der Elektronenröhren“ sowie die anderen Bände der Bücherei der Hochfrequenztechnik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, Leipzig 1953.

Aufgabe 44

Die Arbeitsweise der Mehrelektrodenröhren und die Beobachtung der Sekundärelektronenemission

Zubehör: 1. Pentode, 2. Schaltung zur Aufnahme der Kennlinien einer Pentode, 3. Stromquellen.

Die Beschreibung der Röhren. Die modernen Radioröhren unterscheiden sich wesentlich von der direkt geheizten Dreielektrodenröhre, wie sie in Aufgabe 43 untersucht wurde. Bei der Beschreibung der Dreielektrodenröhre, die zum Studium der *prinzipiellen Wirkungsweise* der Elektronenröhren diente, wurde schon auf einige Nachteile dieses Typs hingewiesen. Einer der Nachteile dieser Röhre zeigte sich in der dritten Übung der Aufgabe bei der Aufnahme der Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinie von einer anodenseitig belasteten Röhre. Die erhaltenen dynamischen Kennlinien unterschieden sich merklich von den statischen der gleichen Röhre, die ohne den mit dem Röhrenwiderstand vergleichbaren Belastungswiderstand aufgenommen worden waren. Es besteht auch ein wesentlicher Unterschied zwischen dem dynamischen Verstärkungsfaktor und dem Grenzwert (statischen Wert) dieser Größe.

In Vier- und Fünfelektrodenröhren (Tetroden und Pentoden) werden die Nachteile der einfachen Röhre fast gänzlich beseitigt. Außerdem besitzen diese Röhren auch noch andere Vorteile, die weiter unten in dieser Aufgabe beschrieben werden. Jedoch weisen auch die Mehrelektrodenröhren, wenn man sie mit der Triode vergleicht, bestimmte Nachteile auf. Deshalb findet die Triode auch in der heutigen Zeit noch breite Verwendung.

Diese Aufgabe verfolgt das Ziel, den im Praktikum arbeitenden Studenten mit der Arbeitsweise der Mehrelektrodenröhren, die in vielen Praktikumsaufgaben verwendet werden, bekannt zu machen.

Die indirekt geheizte Kathode. In neuerer Zeit hat sich die Heizung des Glühfadens durch eine heruntertransformierte Spannung (gewöhnlich eine Spannung von 6,3 V) durchgesetzt. Das Anlegen einer Wechselspannung an den direkt geheizten Faden ist unbequem, weil die periodische Spannungs-

änderung am Heizfaden zu periodischen Änderungen der Potentialdifferenz zwischen den Enden des Fadens und dem Gitter und damit zu Schwingungen des Anodenstromes mit der gleichen Frequenz führt. Verbindet man die Mittelanzapfung der Heizwicklung des Transformators mit dem Gitter, so kann man diesen Einfluß herabsetzen.

Außerdem führt die Heizung mit Wechselstrom zum Pulsieren der Temperatur des Fadens. Das wirkt sich auf den Emissionsstrom und damit auf die Stärke des Anodenstromes aus.

Um diese Nachteile zu beseitigen, wird in den modernen Röhren die die Elektronen emittierende Kathode als selbständige Elektrode ausgebildet und mit einem von ihr getrennten Faden geheizt (Abb. 100). Als unmittelbare Kathode der Röhren wird ein kleiner metallischer Hohlzylinder benutzt, der außen eine Oxydschicht trägt, die eine kleine Austrittsarbeit für Elektronen besitzt. Eine solche Kathode von großer Oberfläche gestattet eine wesentlich stärkere Elektronenemission als ein einzelner Heizfaden. Damit kann die Steilheit der Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien gegenüber dem einzelnen Heizfaden beträchtlich erhöht werden; um so mehr, als das Steuergitter sehr nahe an die stabile Kathode gebracht werden kann. Das ist in erster Linie für Verstärkerröhren wichtig. Im Inneren der hohlen Kathode befindet sich der Heizfaden oder die Heizspirale, die manchmal in einem gesinterten Korund-Röhrchen steckt und eine massive Konstruktion von großer spezifischer Wärme darstellt. Ein solcher Aufbau der Kathode beseitigt die Nachteile der direkten Heizung. Die Kathode wird zu einer äquipotentialen Elektrode. Die hohe spezifische Wärme der ganzen Einrichtung schließt Temperaturschwankungen aus, die mit der periodischen Änderung der Stärke des Wechselstromes zusammenhängen. Außerdem setzt die größere Stabilität der ganzen Konstruktion den Einfluß mechanischer Erschütterungen auf die Parameter der Röhre herab.

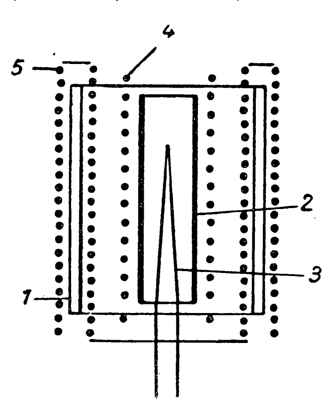


Abb. 100. Die Konstruktion einer Schirmgitterröhre (Tetrode): *1* Anode; *2* indirekt geheizte Kathode; *3* Heizfaden; *4* Steuergitter; *5* Schirmgitter.

Die diese Aufgabe ausführenden Studenten erhalten einen Einblick in die Konstruktion der Kathode und der anderen Elemente einer modernen Röhre durch einige dem Versuch beigegebene Röhren, deren Glaskolben entfernt wurden und die in einem durchsichtigen Plexiglaskasten untergebracht sind.

Das Schirmgitter. Bei der Ausführung der dritten Übung der Aufgabe 43 zeigte es sich, daß die Belastung des Anodenkreises zur Veränderung der Kennlinien der Röhre führte. Bei Belastung des Anodenkreises ist die Spannung zwischen Faden und Anode nicht mehr gleich der Spannung der Anodenbatterie. Das führt zur Abnahme der Stärke des Anodenstromes und zur Abnahme der Steilheit der Kennlinien.

Um diese Erscheinung auszuschalten, führt man ein zweites Gitter ein, das die vierte Elektrode der Röhre bildet. Eine solche Röhre trägt die Bezeichnung *Tetrode*. Schematisch ist ihr Aufbau in der Abb. 101 dargestellt. Das zweite Gitter der Röhre trägt die Bezeichnung *Schirmgitter*. Für das erste Gitter hat sich die Bezeichnung *Steuergitter* eingebürgert.

Das Schirmgitter wird entweder direkt an den Pol der Anodenbatterie oder an die gleiche Batterie über einen Spannungsteiler angeschlossen. Dabei darf die Spannung am Schirmgitter nicht weniger als die Hälfte des vollen Wertes der Anodenbatterie betragen. Eine solche Zwischenschaltung des Schirmgitters führt zur Unabhängigkeit ihres Potentials von der Stärke des Anodenstromes.

Da das Schirmgitter der Kathode näher liegt als die Anode, wird die Stärke des Anodenstromes durch das Potential des Schirmgitters bestimmt. Das Potential des Schirmgitters bleibt konstant, weil es unbelastet und der Gitterstrom minimal ist. Die Konstanz des Schirmgitterpotentials bewirkt die Konstanz des Anodenstromes, unabhängig davon, ob das Potential der Anode durch Belastung des Anodenkreises verkleinert wird. Deshalb wird die Abnahme der Steilheit der dynamischen Kennlinien unter dem Einfluß der Anodenbelastung, wie sie bei der Triode auftritt, bei der Tetrode fast gänzlich beseitigt.

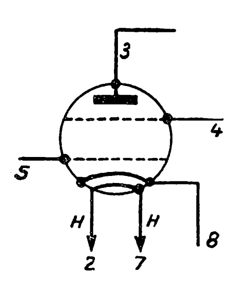


Abb. 101. Die schematische Darstellung der Tetrode: *3* Anode, *8* Kathode; *2*, *7* Heizfaden der Kathode; *5* Steuergitter; *4* Schirmgitter[1]).

Die mit einem engmaschigen Schirmgitter ausgerüstete Röhre weist gegenüber der Triode noch mehr Vorteile auf. Sind Schwingkreise in Steuergitter- und Anodenkreis geschaltet, so kann infolge kapazitiver Kopplung zwischen Anode und Gitter die Röhre zu Eigenschwingungen angeregt werden, wenn sie in einem Hochfrequenz-Verstärker verwendet wird. Dieser Umstand beschränkt die Anwendung der Trioden in Hochfrequenz-Verstärkern. Zur Ausschaltung der kapazitiven Kopplung dient das Schirmgitter, das die Kathode und das Steuergitter vor einer elektrostatischen Beeinflussung durch die Anode schützt (abschirmt). Dies ist der Grund für die Bezeichnung Schirmgitter. In der vorliegenden Aufgabe werden die Kennlinien der Röhre aufgenommen. Deshalb ist die Aufmerksamkeit hauptsächlich auf die erste Funktion des Schirmgitters zu richten.

Der Verstärkungsfaktor der Tetrode ist wesentlich größer als der der Triode. Er erreicht Werte von 1000 und mehr. Das hängt damit zusammen, daß der Einfluß der Zunahme der Anodenspannung auf denselben Anodenstrom in der Tetrode kleiner ist als in der Triode, weil die Anode von einem Schirmgitter umgeben ist. Die Steilheit der Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien der Tetrode ist von der gleichen Größenordnung wie die der Triode, weil das Schirmgitter auf das Feld zwischen Kathode und Steuergitter wenig Einfluß ausübt.

[1]) Die Numerierung der Elektroden in der Zeichnung ist in Übereinstimmung mit der normalen Sockelung der modernen Röhren vorgenommen worden.

Die Einführung eines zweiten Gitters in die Röhre führt aber nicht nur zu vorteilhaften Eigenschaften der Röhre. Das Schirmgitter ruft auch nachteilige Eigenschaften in der Röhre hervor. Gerade die schwache Abhängigkeit des Anodenstromes in der Tetrode von der Größe der Anodenspannung bewirkt ein Anwachsen ihres inneren Widerstandes, der bei diesem Röhrentyp Hunderttausende von Ohm beträgt. Um eine besonders wirkungsvolle Ausnützung der Verstärkereigenschaften der Röhre zu erhalten, muß der Belastungswiderstand im Anodenkreis um ein Vielfaches höher sein als der innere Widerstand der Röhre. In Resonanzverstärkern für hohe Frequenzen lassen sich im Anodenkreis für die Resonanzfrequenz verhältnismäßig leicht hohe dynamische Widerstände erreichen, wenn die Verstärker mit einem guten Schwingungskreis ausgerüstet sind[1]).

Die Sekundäremission und das Bremsgitter. Die Erhöhung der Temperatur einer Elektrode ist nicht die einzige Ursache, die eine Elektronenemission aus ihrer Oberfläche hervorrufen kann. In einer Elektronenröhre spielt die Erscheinung der Sekundäremission der Elektronen eine wesentliche Rolle. Sie besteht darin, daß bei der Bombardierung der Anode mit dem Kathodenstrahl diese anfängt, Elektronen zu emittieren. Diese Erscheinung trägt die Bezeichnung *Sekundäremission.* Quantitativ wird der Effekt charakterisiert durch den *Sekundäremissionsfaktor,* der das Verhältnis der Stromstärke der Sekundäremission zur Stärke des bombardierenden Anodenstromes angibt. Der Sekundäremissionsfaktor kann sowohl kleiner als auch größer als 1 sein. Letzteres besagt, daß jedes auf die Elektrode auftreffende schnelle Elektron auf der Oberfläche der Elektrode mehr als ein Elektron herausschlägt. Diese Erscheinung tritt als negative Eigenschaft der Elektronenröhren auf und muß daher beseitigt werden.

Wenn auch das Schirmgitter die Stärke des Anodenstromes trotz Spannungsabnahme an der Anode durch Belastung konstant hält, erweist sich die Spannungsabnahme an der Anode als schädlich für die Arbeit der Röhre. Wenn die Anodenspannung kleiner wird als die Schirmgitterspannung, entsteht zwischen Anode und Schirmgitter ein Feld, das vom Gitter zur Anode gerichtet ist. Wenn die Anode Sekundärelektronen emittiert, werden durch dieses Feld die Sekundärelektronen zum Gitter hin beschleunigt. In diesem Fall wird die Stärke des Anodenstromes durch die Differenz zwischen der Zahl der von der Kathode auf die Anode auftreffenden Elektronen und der Zahl der die Anode infolge Sekundäremission verlassenden Elektronen bestimmt. Der Strom auf das Schirmgitter wird verstärkt. Die Abnahme des Anodenstromes infolge des beschriebenen Mechanismus führt zur Abnahme der Steilheit der Kennlinien und zur Erhöhung des inneren Widerstandes der Röhre.

Um die Auswirkungen der Sekundäremission[2]) zu beseitigen, wird ein drittes Gitter, das Bremsgitter (Abb. 102) in die Röhre zwischen Anode und Schirmgitter eingeführt. Das Bremsgitter bildet die fünfte Elektrode der Röhre.

---

[1]) Über den Widerstand des Schwingungskreises bei seiner Resonanzfrequenz siehe Aufgabe 63.

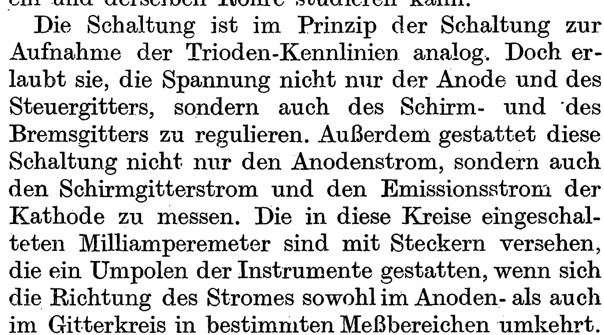
[2]) In Trioden wird die Sekundäremission durch die Anwesenheit einer negativen Raumladung zwischen dem Steuergitter und der Anode verhindert.

Daher haben die mit diesen Gittern versehenen Röhren die Bezeichnung *Pentoden* erhalten.

Das Bremsgitter wird entweder mit der Kathode verbunden oder erhält, unabhängig von ihr, eine negative Spannung. Diese negative Spannung bremst die aus der Anode heraustretenden Elektronen und verhütet eine Abnahme des Anodenstromes durch Sekundäremission.

Das bisher Dargelegte erklärt in groben Zügen das Prinzip der im Vergleich zur Triode komplizierteren Röhren.

In der Abb. 103 ist eine Schaltung für die Aufnahme der Kennlinien von Mehrelektrodenröhren dargestellt. In dieser Aufgabe wird die Pentode 6SJ7 benutzt. Diese Pentode besitzt für alle Elektroden einzelne Durchführungen. Das ist für die vorliegende Aufgabe sehr bequem, weil man durch Verbinden des Bremsgitters mit dem Schirmgitter die Pentode als Tetrode verwenden


und somit die Eigenarten beider Röhrentypen mit ein und derselben Röhre studieren kann.

Die Schaltung ist im Prinzip der Schaltung zur Aufnahme der Trioden-Kennlinien analog. Doch erlaubt sie, die Spannung nicht nur der Anode und des Steuergitters, sondern auch des Schirm- und des Bremsgitters zu regulieren. Außerdem gestattet diese Schaltung nicht nur den Anodenstrom, sondern auch den Schirmgitterstrom und den Emissionsstrom der Kathode zu messen. Die in diese Kreise eingeschalteten Milliamperemeter sind mit Steckern versehen, die ein Umpolen der Instrumente gestatten, wenn sich die Richtung des Stromes sowohl im Anoden- als auch im Gitterkreis in bestimmten Meßbereichen umkehrt.

Die Schaltung kann entweder durch Batterien oder durch gleichgerichteten Wechselstrom gespeist werden, wenn dieser genügend stabilisiert ist.

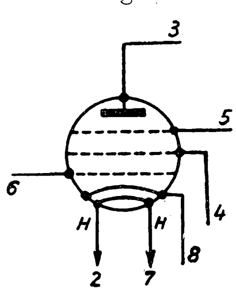


Abb. 102. Schematische Darstellung der Pentode: *3* Anode; *8* Kathode; *2*, *7* Heizfaden der Kathode; *6* Steuergitter; *5* Bremsgitter; *4* Schirmgitter[1]).

Übung 1

Die Aufnahme der Anodenstrom-Anodenspannungs- und der Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien der Pentode und der Tetrode

Das Ziel dieser Übung ist die Aufnahme der Abhängigkeit des Anodenstromes von der Anoden- und von der Gitterspannung, wenn kein Belastungswiderstand im Anodenkreis der Röhre liegt (statische Kennlinie). Die Röhre wird zuerst als Pentode und dann als Tetrode benutzt.

Mit dem Schalter K kann das Bremsgitter mit der Kathode verbunden werden.

Die Anodenstrom-Anodenspannungs-Kennlinien werden bei zwei Werten der Schirmgitterspannung, 90 V und 45 V, aufgenommen, wobei für jeden dieser beiden Spannungswerte am Schirmgitter die Steuergitterspannung von 0 bis zu —3 V in Stufen von 1 V variiert wird. Auf diese Weise entspricht jede

[1]) Siehe Anmerkung zur Unterschrift der Abb. 101.

Anodenstrom-Anodenspannungs-Kennlinie einem bestimmten Wertepaar der Spannungen am Schirm- und am Steuergitter.

Die Anodenspannung wird für jede Kennlinie von 0 bis 280 V geändert. Bei dem Aufnehmen der Anodenstrom-Anodenspannungs-Kennlinie muß die Spannungsänderung in Stufen von 2 V im Intervall von 0 bis 10 V, von 5 V im Intervall von 10 bis 40 V und von 10 V im Intervall von 40 bis 280 V vorgenommen werden.

Die Meßwerte werden direkt in Form entsprechender Kurven aufgetragen.

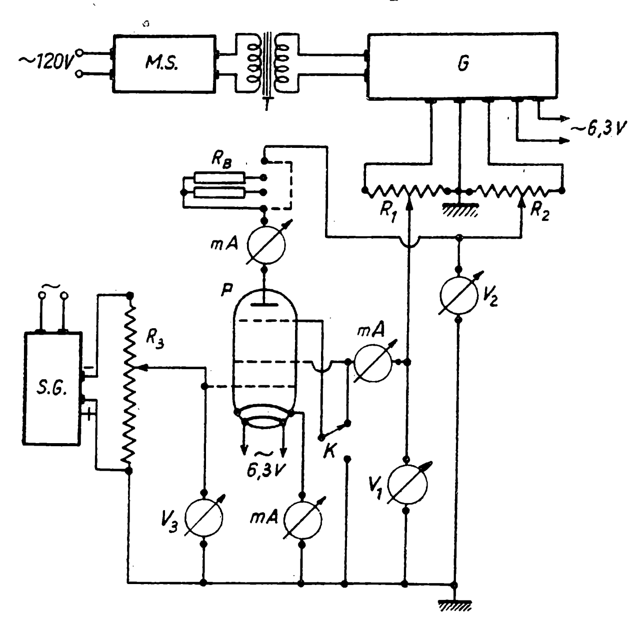


Abb. 103. Schaltung für die Aufnahme der Kennlinien der Pentode und der Tetrode: *P* Pentode; *MS* Magnetischer Spannungskonstanthalter; *G* Gleichrichter (siehe Aufgabe 59); *SG* Selengleichrichter (siehe Aufgabe 58); R_1 Potentiometer von 5000 Ω, R_2 von 8000 Ω, R_3 von 700 Ω; R_B Belastungswiderstände von 50 und 100 kΩ; *mA* Milliamperemeter bis 10 mA; V_1 Voltmeter für 150 V, V_2 für 300 V, V_3 für 5 V; *T* Transformator; *K* Schalter.

Das aus dem Versuch gewonnene Anodenstrom-Anodenspannungs-Kennlinienfeld gibt die Möglichkeit, den inneren Widerstand der Röhre R_i und die Steilheit der Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien S zu bestimmen. Der physikalische Sinn und der mathematische Zusammenhang dieser Parameter sind schon in Aufgabe 43 erklärt worden. Jedoch unterscheidet sich das Verfahren ihrer Bestimmung aus den Kurven von dem für die Untersuchung der Triode beschriebenen Verfahren. Bei der Pentode ist der Einfluß der Anodenspannung auf die Stärke des Anodenstromes viel geringer als bei der Triode, weil sie drei Gitter und davon vor allem das engmaschige Schirmgitter besitzt.

Dadurch verlaufen die Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien, die für verschiedene Anodenspannungen aufgenommen werden, dicht nebeneinander. Deshalb kann man in diesem Fall für die Berechnung der Parameter nicht nur das Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinienfeld, sondern genauso auch das Anodenstrom-Anodenspannungs-Kennlinienfeld benutzen, das für verschiedene Gitterspannungswerte aufgenommen wurde. Die für die Bestimmung der Steilheit der Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien notwendige Größe der Abnahme des Anodenstromes wird aus der Differenz der Stärken der Anodenströme bestimmt (Abb. 104), die für die gleiche Anodenspannung, aber für verschiedene Gitterspannungen aufgenommen wurden. Mit anderen Worten, ΔI_a ist die Differenz zwischen den Ordinatenpunkten, die auf zwei Anodenstrom-Anodenspannungs-Kennlinien liegen, welche sich in der Gitterspannung um ΔV_G unterscheiden.

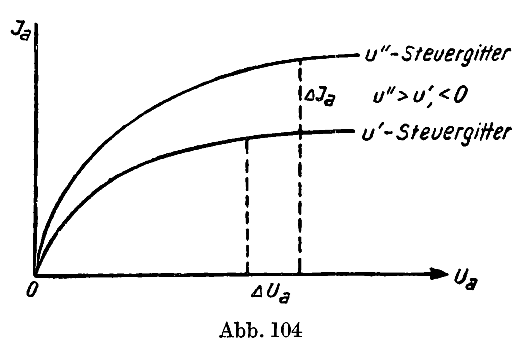


Abb. 104

Die Größe des inneren Widerstandes kann mit der üblichen Methode aus jeder Anodenstrom-Anodenspannungs-Kennlinie bestimmt werden.

Den Verstärkungsfaktor kann man nach der Formel $\mu = S R_i$ bestimmen.

Die Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien der Pentode können bei den gleichen zwei Spannungswerten am Schirmgitter und für die Anodenspannungen 90, 160 und 240 V aufgenommen werden. Die Ergebnisse werden graphisch ausgewertet. Aus den Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien berechnet man nach der auch schon bei der Triode angewendeten Methode die Parameter der Röhre (siehe Aufgabe 43).

Danach wird der Schalter umgelegt, der das Schirm- mit dem Bremsgitter verbindet und die Pentode in eine Tetrode verwandelt. Es werden für die Tetrode ebenfalls die Anodenstrom-Anodenspannungs- und die Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien aufgenommen.

Übung 2

Die Aufnahme der dynamischen Anodenstrom-Anodenspannungs- und Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinien der Pentode und der Tetrode für verschiedene Belastungen

Man schaltet in den Anodenkreis der Röhre eine Belastung von 50 bzw. 100 kΩ und wiederholt die Aufnahme der gleichen Kennlinien wie in der ersten Übung. Man stellt die Ergebnisse als Kurven dar und berechnet aus ihnen die Parameter.

Man muß die Kurven der statischen denen der dynamischen Kennlinien

der Pentode gegenüberstellen und das Ergebnis dieser Gegenüberstellung mit den entsprechenden Werten der Triode vergleichen, um den physikalischen Sinn des Überganges zu komplizierteren Röhren zu verstehen.

Übung 3

Die Beobachtung des Effektes der Sekundäremission, ihr Einfluß auf die Arbeit der Röhre und die Bedeutung des Bremsgitters

Diese Übung hat den Sinn, die Ausführenden mit der Erscheinung der Sekundärelektronenemission bekannt zu machen.

Wie schon oben ausgeführt, kann die Pentode 6SJ7 durch direkte Verbindung des Bremsgitters mit dem Schirmgitter in eine Tetrode verwandelt werden, weil das Bremsgitter einen eigenen Sockelstift besitzt. Diese Verbindung läßt sich in der benutzten Schaltung durchführen. Man legt an beide Gitter eine Spannung von 90 V und an das Steuergitter nacheinander —1, —0,5 und 0 V.

Danach werden die Anodenstrom-Anodenspannungs-Kennlinien durch Änderung der Anodenspannung von 0 bis 280 V aufgenommen. Man ändert die Anodenspannung im Bereich von 0 bis 30 V in Stufen von 5 V, und im Bereich von 30 bis 280 V kann sie in Stufen von 10 V geändert werden. Man schreibt gleichzeitig die Werte der Stromstärke sowohl im Anodenkreis als auch im gemeinsamen Brems- und Schirmgitterkreis auf.

Besondere Aufmerksamkeit muß man auf die Messungen des Anoden- und Gitterstromes für die Werte der Anodenspannung richten, bei denen die Zunahme der Spannung eine Abnahme des Anodenstromes und eine Zunahme des Schirm- und Bremsgitterstromes zur Folge hat. In diesem Bereich der Kennlinie müssen die Meßpunkte in kleineren Intervallen der Anodenspannung aufgenommen werden, als oben für die übrigen Bereiche der Kennlinien angegeben wurde.

Für die Beobachtung des Sekundäremissionseffektes als Umkehrung der Richtung des Anodenstromes muß man einen besonderen Arbeitsbereich der Röhre einstellen, der von dem gewöhnlich benutzten Arbeitsbereich der Röhre weit entfernt liegt. Dieser Bereich führt zu einem starken Anwachsen des Stromes im Schirmgitter (und Bremsgitter), der die dafür nicht bemessenen Gitter sogar beschädigen kann. Auch für die indirekt geheizte speziell behandelte Kathode (Oxydschicht) ist eine verstärkte Bombardierung mit Ionen, die durch das Entgasen der Gitter beim Überhitzen entstehen, schädlich. Deshalb geben wir vorher nicht den Bereich an, der einem „umgekehrten" Strom in der Röhre entspricht, sondern nur den Bereich, der eine Abnahme des Anodenstromes hervorruft. Der für die Lebensdauer der Röhre ungeeignete Bereich darf (nur für eine kurze Zeit) von einer erfahrenen Person lediglich für Demonstrationszwecke eingestellt werden, um die Studenten mit einer besonders ausgeprägten Form des Sekundäremissionseffektes, wenn nämlich der Sekundäremissionsfaktor größer als eins ist, bekannt zu machen.

Die Ergebnisse der Anoden- und Gitterstrommessungen werden in Form entsprechender Kurven dargestellt.

Die Rolle des Bremsgitters geht aus dem Vergleich der Anodenstrom-Anodenspannungs-Kennlinien der Pentode mit den in dieser Übung erhaltenen Kennlinien der gleichen in eine Tetrode verwandelten Pentode hervor.

Entnimmt man den benötigten Strom einer Batterie, so muß man sparsam mit ihr umgehen. Man darf sie nur für eine kurze Meßzeit an die Spannungsteiler anschließen.

Außerdem darf man nicht vergessen, daß an der Schaltung eine hohe konstante Spannung liegt und deshalb Umschaltungen bei eingeschalteter Stromquelle nicht zulässig sind.

Die in dieser Aufgabe benutzte Schaltung ermöglicht, wie aus dem oben Gesagten hervorgeht, die Röhre in vielen Bereichen zu untersuchen. Da die Ausführung aller beschriebenen Messungen nicht an einem Nachmittag im Praktikum bewältigt werden kann, legt der Assistent für jeden Praktikanten die Mindestzahl von Messungen fest, die einerseits für das Bekanntwerden mit der Arbeit von Mehrelektrodenröhren erforderlich und andererseits genügend vielseitig in bezug auf die auszuführenden Übungen sind. Es ist klar, daß in erster Linie die Aufnahme der Kennlinien von Interesse ist, bei denen der Unterschied zwischen den Mehrelektrodenröhren und der Triode hervortritt. Das sind die dynamischen Kennlinien der Tetrode und der Pentode. Außerdem kann man in der Übung 3 die neue Erscheinung der Sekundäremission beobachten und die Rolle, die das Bremsgitter in der Pentode spielt, klären.

Spezialliteratur

Siehe Literatur zu Aufgabe 43.

Aufgabe 45

Die Bestimmung des elektrochemischen Äquivalentes und die Eichung eines Amperemeters mit Hilfe eines Voltameters

Übung 1

Die Bestimmung des elektrochemischen Äquivalentes von Kupfer

Zubehör: 1. Kupfervoltameter, 2. Amperemeter, 3. Stoppuhr, 4. Schalter, 5. Schiebewiderstand, 6. Akkumulator.

Die Menge eines Stoffes, die aus einem Elektrolyten beim Durchgang einer Elektrizitätsmenge von einem Coulomb abgeschieden wird, wird *elektrochemisches Äquivalent* dieses Stoffes genannt. Entsprechend dem Sinn seiner Bestimmung wird das elektrochemische Äquivalent in mg/Coul angegeben. Wenn man ein genaues Amperemeter, das in den Kreis des Elektrolytgefäßes eingeschaltet ist, und zur genauen Messung der Zeit, während der die Elektrolyse vor sich geht, eine Stoppuhr benutzt, läßt sich leicht das elektrochemische Äquivalent des an den Elektroden abgeschiedenen Stoffes bestimmen. Das Produkt aus Stromstärke und Zeit gibt die Größe der durchgeflossenen Elektrizitätsmenge und die Änderung des Gewichtes der Elektroden die Menge

des abgeschiedenen Stoffes an. Das Verhältnis dieser Größen ergibt das elektrochemische Äquivalent.

Die Beschreibung der Anordnung. Die Anordnung, in der die Elektrolyse vor sich geht, wird *Voltameter*[1]) genannt. Das Kupfervoltameter (Abb. 105) besteht aus einem Glasgefäß, in das drei Kupferplatten eintauchen: Die beiden äußeren Platten A und A_1 sind außerhalb des Gefäßes durch einen Kupferblechstreifen verbunden und stellen die Anode dar. Als Kathode dient die dritte Platte, die mit Hilfe einer Schraube an den Stab K befestigt werden kann. In das Gefäß wird gesättigte Kupfersulfatlösung gegossen. Beim Fließen eines Stromes durch den Kreis, in dem das Voltameter liegt, wird reines Kupfer an der Kathodenplatte abgeschieden.

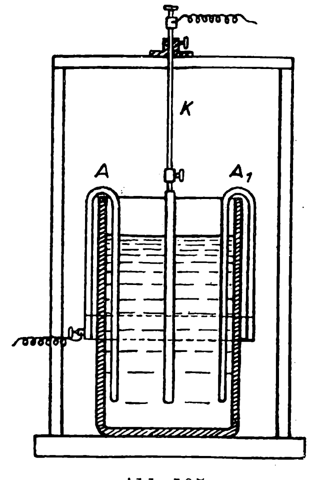


Abb. 105

Die Schaltung des Kreises ist in Abb. 106 dargestellt. Hierbei sind E die Stromquelle, F das Kupfervoltameter, A das Amperemeter, K der Schalter und R der Schiebewiderstand.

Die Messung. Man schaltet den Stromkreis nach dem Schema der Abb. 106 zusammen und stellt durch Verändern des Widerstandes den Strom auf etwa 0,5 A ein. Dann öffnet man wieder den Stromkreis, nimmt die mittlere Elektrode (Kathode) heraus und bereitet sie zur Messung vor. Dazu wäscht man sie gründlich, trocknet sie und wägt sie bis auf 0,001 g genau. Danach stellt man die Elektrode auf ihren Platz im Gefäß zurück, schließt den Stromkreis und drückt auf die Stoppuhr. Man läßt den Strom ungefähr eine halbe Stunde lang durchfließen und achtet dabei dauernd auf seine Konstanz. Nach Beendigung des Versuches nimmt man die Platte heraus, wäscht, trocknet und wägt sie erneut.

Die Ausrechnung. Nach dem ersten FARADAYschen Gesetz erhalten wir für das Kupfervoltameter:

$$Q = \alpha_{Cu} i t,$$

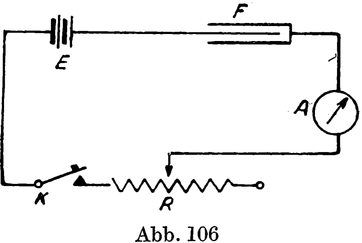


Abb. 106

wobei Q die Masse der auf der Kathode abgeschiedenen Kupfermenge, α_{Cu} das elektrochemische Äquivalent des Kupfers und t die Zeit des Durchganges des Stromes i bedeuten. Man setzt hierin die gemessenen Werte für Q (in mg), i und t ein und berechnet daraus α_{Cu}.

Aus dem Atomgewicht und der Wertigkeit des Kupfers rechnet man die Ladung eines einzelnen Kupferions und die Ladung eines Elektrons aus.

---

[1]) Anm. d. Übers.: auch Coulombmeter genannt.

Übung 2

Die Eichung eines Amperemeters mit Hilfe des Knallgas-Voltameters

Zubehör: 1. Knallgas-Voltameter, 2. zu eichendes Amperemeter, 3. Stoppuhr, 4. Schalter, 5. Schiebewiderstand, 6. Akkumulator, 7. Maßstab.

Die Lösung der in dieser Übung gestellten Aufgabe geht genau umgekehrt vor sich wie die Lösung der Aufgabe der ersten Übung. In der zweiten Übung wird das elektrochemische Äquivalent des bei der Elektrolyse ausgeschiedenen Stoffes als bekannt vorausgesetzt, und die Menge des ausgeschiedenen Stoffes wird zur Berechnung der Stärke des Stromes, der bei der Elektrolyse durch das Voltameter und das zu eichende Amperemeter fließt, benutzt.

Es wird in dieser Übung verdünnte Schwefelsäure elektrolysiert. Die Zersetzungsprodukte der Elektrolyse — Wasserstoff und Sauerstoff — werden in dem Knallgas-Voltameter gesammelt.

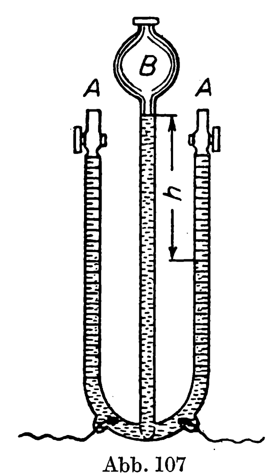


Abb. 107

Das Knallgas-Voltameter ist in Abb. 107 dargestellt. Zwei in der vorderen Ebene des Gerätes symmetrisch angeordnete Glasröhren *AA* sind auf ihrem vertikalen Teil mit einer Teilung versehen, und an den oberen Enden sind Hähne angebracht, die den Innenraum der Röhren von der Atmosphäre trennen. Die Röhren bilden Meßvolumen für die Gase und tragen die Bezeichnung *Gasbüretten*. In dem unteren Teil der Röhren sind Elektroden eingeschmolzen, durch die der Strom zur Elektrolyse der im Voltameter befindlichen verdünnten Schwefelsäure fließt. Das dritte Rohr ist mit den beiden Gasbüretten an ihrem unteren Ende verbunden. Am oberen Ende läuft dieses Rohr in ein kugelförmiges Gefäß *B* aus, das als Vorratsbehälter für die verdünnte Schwefelsäure dient.

Durch Öffnen der Hähne kann man die im oberen Teil der Büretten angesammelte Gasblase herauslassen. Die Stelle des herausströmenden Gases nimmt dann die aus dem mittleren Rohr und dem Vorratsbehälter nachfließende verdünnte Schwefelsäure ein.

Beim Fließen eines Stromes durch die Anordnung bildet sich an den Elektroden Sauerstoff und Wasserstoff, die in den oberen Teil der Büretten perlen und sich unterhalb der Hähne ansammeln. Die verdünnte Schwefelsäure wird dadurch aus den Büretten in die mittlere Röhre und den Vorratsbehälter verdrängt. Wenn die Büretten durch Öffnen der Hähne vor dem Versuch vollständig mit verdünnter Schwefelsäure gefüllt worden sind, gestattet das Absinken der Flüssigkeitshöhe in beiden Büretten während des Versuches das Volumen der sich bildenden Gase zu messen. Diese Volumen werden unmittelbar an den Skalen der Büretten abgelesen.

Die Messung. Das Voltameter schaltet man mit dem auf höchsten Widerstand eingestellten Rheostaten und dem Amperemeter in einen mit Gleich-

strom gespeisten Kreis. Die Schaltung wird analog dem in Abb. 106 dargestellten Schema zusammengesetzt. Dann verkleinert man allmählich den Widerstand, bis die Stromstärke ungefähr einem Fünftel der Skala des Amperemeters entspricht und auf einen ganzen Teilstrich der Skala zu stehen kommt. Dann schaltet man den Strom aus und läßt durch die Hähne alles Gas aus den Büretten hinaus. Damit ist der eigentliche Versuch vorbereitet, bei dem das Volumen des durch die Elektrolyse entstehenden Gases gemessen werden soll. Hiernach wird der Stromkreis erneut geschlossen und gleichzeitig die Stoppuhr ausgelöst. Man schreibt die Anzeige des Amperemeters vorläufig in Skalenteilen der nicht geeichten Skala auf. Nach der Bildung eines bestimmten Volumen der Gase (etwa 100 cm³) wird der Strom unterbrochen und gleichzeitig die Uhr gestoppt. Man liest genau das gebildete Volumen V und die Temperatur T des Gases ab und mißt mit dem Maßstab die Höhendifferenz h der Säure in den Gasbüretten und dem mittleren Rohr. Das ist für die weitere Bestimmung des Druckes erforderlich, unter dem sich das Gas in den Büretten befindet, weil man diese Angabe zur Berechnung der Masse des bei der Elektrolyse gebildeten Gases benötigt. Man füllt erneut die Büretten mit der Schwefelsäure und wiederholt den Versuch bei anderen Werten der Stromstärke.

Bei der Ausführung dieser Übung muß man daran denken, daß der bei der Elektrolyse abgeschiedene Wasserstoff mit Luft ein explosives Gemisch bildet. Deshalb ist offenes Feuer oder das Erzeugen elektrischer Funken in der Nähe der Anordnung völlig unzulässig.

Die Ausrechnung. Zuerst rechnet man das Volumen des Gases in den Büretten des Knallgas-Voltameters auf 0° C und 760 mm Druck nach den Gasgesetzen um:

$$V_0 = \frac{V}{1 + 0{,}003675\, T} \cdot \frac{p}{760}.$$

Hierbei ist T die Temperatur des Gases in Celsius-Graden, p der Gasdruck in Torr und V das Gasvolumen in cm³. Der Druck p ist gleich dem Barometerdruck p_0 plus dem Druck der Säule aus verdünnter Schwefelsäure von der Höhe h, d. h. von der Höhe in der Bürette A bis zur Höhe im dritten Rohr B, und minus p_1 dem gesättigten Dampf einer 20%igen Schwefelsäure bei der herrschenden Temperatur. p_1 wird aus Tabellen[1]) entnommen. Da man mit genügender Genauigkeit annehmen darf, daß die 20%ige Schwefelsäure ein Zwölftel leichter als Quecksilber ist, gilt

$$p = p_0 + \frac{h}{12} - p_1,$$

wobei p_0, p_1 und h in Millimetern angegeben werden müssen.

Für das Knallgas-Voltameter wird die Stromstärke ausgedrückt durch:

$$i = \frac{2}{3} \cdot \frac{V_0}{\alpha_H t},$$

[1]) Man kann ohne einen großen Fehler zu begehen, die Tabellen für den Druck des Wasserdampfes benutzen.

wobei V_0 das auf Normalbedingungen umgerechnete Volumen des gebildeten Gases, t die Zeit des Stromdurchganges und α_H das elektrochemische Äquivalent von Wasserstoff, das aus Tabellen entnommen wird, bedeuten. Mit dieser Formel rechnet man i für jeden einzelnen Versuch aus und zeichnet eine Eichkurve, die die Abhängigkeit der Größe i von den Skalenteilen des untersuchten Amperemeters (siehe auch Aufgabe 35) darstellt. Damit ist das Ziel dieser Aufgabe erreicht.

Besteht die Aufgabe in der Prüfung eines schon geeichten Amperemeters, so ist es bequemer, auf der Abszissenachse die Skalenteile des untersuchten Gerätes aufzutragen und auf der Ordinatenachse die dazu gefundenen negativen und positiven Korrekturen.

Aufgabe 46

Das Drehspul-Galvanometer

Zubehör: 1. Galvanometer, 2. Voltmeter, 3. Stöpselrheostat, 4. Schiebewiderstand und Schaltschnüre, 5. Stoppuhr, 6. Akkumulator von 1,4 V.

Kurze Beschreibung und Theorie des Drehspul-Galvanometers. Galvanometer sind Geräte, die zur Messung kleiner elektrischer Ströme dienen. Es gibt ihrer Konstruktion nach zwei verschiedene Arten:

1. Galvanometer mit einer beweglichen Spule, die von einem Strom durchflossen wird und sich im Felde eines unbeweglichen permanenten Magneten oder eines Elektromagneten dreht.
2. Galvanometer mit einem beweglichen Magneten und einer unbeweglichen Spule.

Für die Messung der Stromstärke wird sowohl bei der einen als auch bei der anderen Art die Drehung des beweglichen Systems ausgenutzt, welches aus einer bestimmten Anfangsstellung unter dem Einfluß der Wechselwirkung zwischen dem Strom und dem Magnetfeld ausgelenkt wird. Für genaue Messungen verwendet man heutzutage ausschließlich Galvanometer der ersten Art.

Das Drehsystem eines solchen Galvanometers ist in den meisten Fällen ein rechteckiges Rähmchen, das aus dicht nebeneinanderliegenden und mit Isolierlack zusammengeklebten rechteckigen Windungen aus dünnem, einige hundertstel Millimeter starkem Draht besteht. Deshalb stellt das Rähmchen eine leichte Spule dar, deren effektiver von den Kraftlinien des magnetischen Feldes durchsetzter Querschnitt gleich nQ ist. Dabei ist n die Anzahl der Windungen des Rähmchens und Q der Querschnitt einer einzelnen rechteckigen Windung. Eine solche Spule kann bis zu 100 Windungen besitzen. Der Faden E mit dem an ihm befestigten Spiegel M (Abb. 108) dient zum Aufhängen des Rähmchens C. Das Rähmchen kann sich frei in dem Luftspalt drehen, der zwischen den beiden Polschuhen des permanenten Magneten und dem Zylinder J vorhanden ist. Der Zylinder besteht aus Weicheisen und ist an der Platte P, die aus nichtmagnetischem Material besteht, befestigt.

Wie die gestrichelten Linien der unteren Zeichnung zeigen, hat dabei das Magnetfeld im Luftspalt eine radiale Richtung (auf der oberen Zeichnung ist einer der Polschuhe teilweise weggelassen).

Als Aufhängefaden dient ein dünner metallischer Draht (aus Platin) oder ein Bronzeband mit einem Querschnitt von einigen μ oder ein dünner Quarzfaden, der manchmal mit einer Platinschicht überzogen ist. Die zweite Stromzuführung zur Spule bildet gewöhnlich ein Metallband aus Silber oder Gold von einigen hundertstel Millimeter Stärke. In Galvanometern mit Quarzfadenaufhängung bestehen gewöhnlich beide Stromzuführungen zum Rähmchen aus solchen Bändern, die mit den Windungen des Rähmchens (Spule) des Galvanometers an seiner unteren Seite verbunden sind. Die Stromzuführungen zum Drehsystem des Galvanometers dürfen der Drehung des Systems keinen elastischen Widerstand entgegensetzen, damit als das elastische Moment der Kräfte, die auf das Rähmchen einwirken, nur das Drehmoment des Aufhängefadens erscheint.

Vor dem Beginn einer Messung muß das Galvanometer erst waagerecht gestellt werden. Das wird durch drei Standschrauben erreicht, auf denen das Gehäuse des Galvanometers ruht. Erst dann ist die Gewähr dafür gegeben, daß das bewegliche System des Galvanometers, das bis zum Beginn der Messung durch eine besondere Vorrichtung (Arretierung) festgehalten wird, nach der Entarretierung sich zwischen den Polschuhen frei bewegen kann und sie bei seiner Drehung nicht berührt. Der schmale Luftspalt zwischen den Polschuhen des Magneten und dem Zylinder erfordert eine sehr genaue Einstellung des Gerätes, damit diese eben geforderte Bedingung erfüllt wird.

Zur waagerechten Aufstellung des Galvanometers sind manche Galvanometer mit einer Wasserlibelle versehen, mit der eine genaue Justierung leicht durchzuführen ist. Andere Galvanometer besitzen in ihrem Gehäuse einen speziellen, geneigten Spiegel, der die Beobachtung der Lage des Rähmchens relativ zu den Polschuhen des Magneten erleichtert.

Die Geräte der ersten Art werden im arretierten Zustand nach der Libelle ausgerichtet, die der zweiten bei entarretiertem System. Die Arretierung wird durch einen besonderen Hebel oder eine Schraube betätigt, die irgendwie aus dem Gehäuse des Galvanometers herausgeführt und mit einer Beschriftung versehen ist.

Die Arretierung und die Entarretierung des Drehsystems des Galvanometers vor der Messung (oder danach) muß sehr vorsichtig ausgeführt werden, weil Erschütterungen des Drehsystems, das durch die Arretiergabel angehoben wird, sich dem dünnen Aufhängefaden unmittelbar mitteilen. Für Studenten empfiehlt sich nicht, diese Handhabung im Praktikum selbständig auszuführen. Sie müssen sich in solchen Fällen an die Hilfsassistenten des Praktikums wenden und die Möglichkeit zur Beobachtung dieser von einer erfahrenen Person ausgeführten Handhabung nutzen.

Das obere Ende des Aufhängefadens ist an einem auf dem Gehäuse des Galvanometers sitzenden Drehkopf mit der Aufschrift „Nullpunktskorrektion“ befestigt. Durch Drehen dieses Kopfes kann man das Drehsystem des Galvanometers in die richtige Lage zwischen den Polschuhen des Magneten einstellen. In der Anfangslage muß die Windungsfläche des aufgehängten Dreh-

systems ungefähr parallel zur mittleren Kraftlinie ab (Abb. 108) stehen, die die Pole des Magneten verbindet. Die Drehung des Rähmchens (Spule) des Galvanometers erfordert genau solche Vorsicht wie auch die Entarretierung des Gerätes. Man muß dabei beachten, daß bei der Drehung des Kopfes für die Nullpunktskorrektion das Rähmchen der Drehung des Kopfes mit Verspätung folgt, da die Übertragung des Drehmomentes über den Aufhängefaden zum Rähmchen gelangt. Deshalb muß man nach einer Drehung des Kopfes um einen kleinen Winkel jedesmal warten, bis sich das Drehsystem in die neue Lage einstellt. Nur durch ein solches stufenartiges Drehen des Kopfes kann man das Drehsystem in die gewünschte Lage zwischen den Polschuhen des Magneten bringen. Im Praktikum wird dies ebenfalls nicht durch die Studenten, sondern durch die Hilfsassistenten ausgeführt.

Abb. 108

Die Messung der Stromstärke basiert auf der Beobachtung der Drehwinkel des Rähmchens C. Fließt durch die Windungen des Rähmchens, das in einem Magnetfeld hängt, ein Strom, so entsteht ein auf das Rähmchen einwirkendes Drehmoment. Bekanntlich versucht dabei das Rähmchen sich so einzustellen, daß das magnetische Moment des durch das Rähmchen fließenden Stromes längs des äußeren Magnetfeldes gerichtet ist.

Bei eingestellter Auslenkung des Rähmchens gilt wegen der Gleichheit des von dem Magnetfeld auf das Rähmchen wirkenden Drehmomentes und der Direktionsgröße des Aufhängefadens:

$$HnQi = D\alpha, \tag{1}$$

wobei H die magnetische Feldstärke im Luftspalt, Q die Windungsfläche, n die Zahl der Windungen, D die Direktionsgröße je Winkeleinheit und i die durch die Windungen fließende und dem Rähmchen den Winkelausschlag α erteilende Stromstärke bedeuten. Hieraus folgt:

$$i = C\alpha = \frac{1}{S_i}\alpha,$$

wobei

$$C = \frac{D}{HnQ}$$

die dynamische *Galvanometerkonstante* bedeutet, die zahlenmäßig die Stromstärke angibt, die das Drehsystem um den Winkel $\alpha = 1$ auslenkt. Die Größe

$$S_i = \frac{1}{C} = \frac{HnQ}{D} \tag{2}$$

heißt die *Stromempfindlichkeit des Galvanometers.*

Die *Spannungsempfindlichkeit* S_V des Galvanometers wird durch folgende Gleichung bestimmt:

$$S_V = \frac{S_i}{R} = \frac{HnQ}{RD}.$$

Aus der Gleichung (2) ist ersichtlich, daß zur Vergrößerung der Empfindlichkeit des Galvanometers D möglichst klein und H, n und Q möglichst groß gewählt werden müssen. D wird kleiner, wenn der Querschnitt des Aufhängefadens verkleinert oder seine Länge vergrößert wird. Der Wert der Größe H ist im Luftspalt der Breite dieses Spaltes umgekehrt proportional. Die Vergrößerung von nQ erreicht man durch Vermehrung der Zahl der Windungen, und das führt unvermeidlich zur Verkleinerung von H. Gewöhnlich werden diese Bedingungen so gewählt, daß man einen Maximalwert für HnQ erhält.

Das beschriebene Drehsystem erlaubt bei den vollkommensten Galvanometern die Stromstärke mit einer Genauigkeit bis zu 10^{-11} A und eine Potentialdifferenz bis zu 10^{-8} V zu messen. Man muß hierbei bemerken, daß die Technik der Konstruktion und der Herstellung der Galvanometer heutzutage solche Vollkommenheit erreicht hat, daß das Drehsystem des Galvanometers sogar für die statistischen Schwankungen des Stromes im Galvanometerkreis empfindlich ist. Das führt in Geräten hoher Empfindlichkeit zum „Wandern“ des Nullpunktes.

Beim Arbeiten mit einem gegebenen Galvanometer hat nicht nur seine Strom- oder Spannungsempfindlichkeit eine große Bedeutung, sondern auch die Art der Bewegung seines Drehsystems und die Zeit, in der letzteres eine Gleichgewichtsstellung einnimmt, die dem endgültigen Auslenkungswinkel entspricht. Es geht nicht nur darum, Zeit zu sparen, sondern es ist auch nicht immer möglich (oder in dem Meßgang nötig), die Meßanordnung längere Zeit konstant zu halten. Daher müssen die Ablesungen am Galvanometer völlig bestimmten Zuständen der Anordnung, in die das Galvanometer geschaltet ist, entsprechen.

Die Bewegungsgleichung des Rähmchens ist offensichtlich:

$$K\frac{d^2\alpha}{dt^2} = HnQi - P\frac{d\alpha}{dt} - D\alpha, \tag{3}$$

wobei K das Trägheitsmoment des Drehsystems, $HnQi$ das die Drehung des Rähmchens bewirkende Moment, D das Drehmoment der Aufhängung und $P\frac{d\alpha}{dt}$ das das Rähmchen dämpfende Drehmoment bedeuten. Dabei ist $P = P_1 + P_2$, wobei P_1 die Dämpfungskonstante des Rähmchens infolge der Luftreibung und P_2 die elektrodynamische Dämpfungskonstante sind. Letztere tritt infolge der in den Windungen des Rähmchens während der Bewegung induzierten Spannung auf.

Während die erste Konstante in dem fertigen Gerät weder geändert noch reguliert werden kann, läßt sich die Größe der zweiten Konstante leicht ändern. Das gestattet, wie wir gleich sehen werden, den Charakter der Bewegung des Drehsystems des Galvanometers zu verändern.

Die Größe der Konstante P_2 kann bestimmt werden durch folgende Überlegungen: Bei der Drehung des Rähmchens um den Winkel $d\alpha$ ändert sich der seine Fläche durchsetzende Fluß um die Größe $d\Phi = 2\,Hadl$, wobei dl der Abstand ist, um den sich die vertikale Seite des Rähmchens verschiebt

(Abb. 109). Da $dl = d\alpha \frac{b}{2}$, ist die dabei in den Windungen der Spule induzierte Spannung

$$E = -n\frac{d\Phi}{dt} = -n\frac{2Ha \cdot d\alpha \cdot b}{2dt} = -HnQ\frac{d\alpha}{dt}.$$

Wenn der Widerstand der Spule R_g und der Widerstand des äußeren Kreises R ist, kann man, wenn man die Selbstinduktion der Spule vernachlässigt, den im Rähmchen induzierten Strom i' nach dem OHMschen Gesetz bestimmen:

$$i' = \frac{E}{R_g + R} = \frac{HnQ}{R_g + R}\frac{d\alpha}{dt}.$$

Das von diesem Strom in dem Magnetfeld erzeugte Drehmoment ist gleich

$$HnQi' = \frac{H^2n^2Q^2}{R_g + R} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = P_2\frac{d\alpha}{dt}.$$

Aus der Gleichung (3) erhalten wir

$$K\frac{d^2\alpha}{dt^2} + P\frac{d\alpha}{dt} + D\alpha = HnQi. \tag{4}$$

In der Gleichgewichtsstellung, die durch den Winkelausschlag α_k charakterisiert wird, erhalten wir

$$D\alpha_k = HnQi. \tag{5}$$

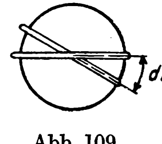


Abb. 109

Lösen wir die Gleichung (4), die die Bewegung des Rähmchens darstellt, und berücksichtigen wir (5), so erhalten wir

$$\alpha = \alpha_k - \alpha_k e^{-at}\left[\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}\sin\left(bt + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)\right], \tag{6}$$

wobei α_k der sich einstellende Galvanometerausschlag,

$$a = \frac{P}{2K}, \quad b = \sqrt{\frac{D}{K} - \frac{P^2}{4K^2}},$$

bedeutet. Hieraus kann man folgendes schließen:

1. Wenn zwischen den Konstanten des Gerätes die Gleichung $P^2 = 4KD$ besteht, dann ist b gleich Null, und die Drehung des Rähmchens um den Winkel α erfolgt aperiodisch, d. h., das Rähmchen wird gedreht und nähert sich asymptotisch der Gleichgewichtsstellung, ohne über sie hinauszugehen. Die Bewegungsart des Rähmchens ist für diesen Fall in Abb. 110 dargestellt, in der auf der Abszissenachse die Zeit vom Moment des Einschaltens für drei verschiedene Dämpfungen und auf der Ordinatenachse der Ablenkungswinkel des Rähmchens dargestellt ist.

Wir haben durch die Erfüllung der angegebenen Gleichheit der Konstanten für das Galvanometer den *aperiodischen Grenzfall* gefunden. Man erhält ihn am bequemsten durch Verändern der Größe des äußeren Widerstandes R,

über den die Windungen des Rähmchens zu einem Kreis verbunden sind. Vernachlässigen wir nun P_1 und setzen $P = P_2$, d. h.

$$P = \frac{H^2 n^2 Q^2}{R_g + R};$$

weil andererseits $P = 2\sqrt{KD}$, so muß für diesen Fall gelten:

$$R_g + R = \frac{H^2 n^2 Q^2}{2\sqrt{KD}}. \tag{7}$$

Das läßt sich am leichtesten durch die Auswahl des entsprechenden Widerstandes R des äußeren Kreises verwirklichen, über den das Rähmchen kurzgeschlossen ist. Manchmal sind die Galvanometer mit einem veränderlichen magnetischen Shunt versehen, der es gestattet, durch Änderung der Größe H den aperiodischen Grenzfall für einen vorgegebenen Wert R einzustellen. Gilt die Gleichung (7), so nennt man die Größe $R_g + R$ den *Grenzwiderstand.*

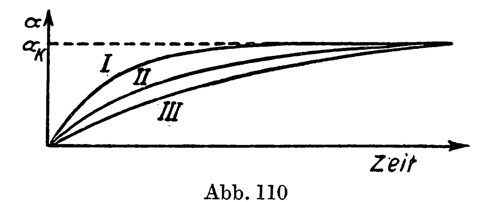


Abb. 110

Man muß seine Aufmerksamkeit auch darauf lenken, daß die elektrodynamische Dämpfung proportional zu H^2, während die Empfindlichkeit proportional zu H ist. Deshalb beeinflußt die Feldstärke wesentlich stärker die Einstelldauer des Galvanometers als seine Empfindlichkeit.

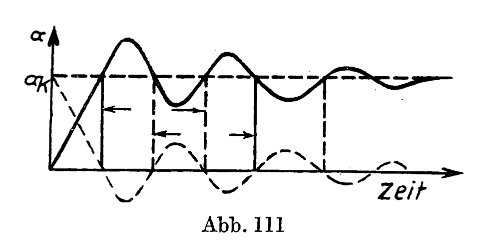


Abb. 111

Es läßt sich mit dem Galvanometer am besten nahe dem aperiodischen Grenzfall arbeiten, weil dabei die kleinste Zeitdauer zur Einstellung des Endwertes benötigt wird. Gewöhnlich stellt man nicht den Grenzfall selbst, sondern einen ihm benachbarten Schwingfall des Rähmchens ein, d. h., man wählt $R + R_g$ gleich 1,1 des Grenzwiderstandes.

2. Vergrößern wir die Dämpfung, d. h., verkleinern wir den äußeren Widerstand R des Galvanometerkreises so, daß P^2 größer als $4\,KD$ wird, dann stellt sich das Rähmchen auch aperiodisch, aber langsamer ein (siehe die Kurven *II* und *III* der Abb. 110). In diesem Fall spricht man vom *Kriechfall* des Galvanometers.

3. Wenn zwischen den Konstanten des Galvanometers die Ungleichheit $P^2 < 4\,KD$ gilt, dann führt das Rähmchen eine periodische Bewegung aus (Schwingfall). In der Abb. 111 stellt die ausgezogene Kurve die Bewegung des Rähmchens nach dem Schließen des Galvanometerkreises und die gestrichelte die nach dem Öffnen dar.

Der Schwingfall des Galvanometers wird durch die Schwingungsdauer T und die Dämpfung der Schwingungen charakterisiert. *Das Dämpfungsver-*

hältnis Δ wird durch den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Amplituden bestimmt:

$$\Delta = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \cdots = \frac{A\,n}{A_{n+1}},$$

wobei

$$A_n = \alpha_k \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{b^2}} \cdot e^{-a\,n\,T} \tag{8}$$

[siehe Gleichung (6); T ist die Schwingungsdauer]. Der natürliche Logarithmus dieses Verhältnisses $ln\Delta = \lambda$ wird *das logarithmische Dekrement* genannt. Es hängt in einfacher Weise mit den Galvanometerkonstanten zusammen:

$$\lambda = \frac{P\,T}{2K}.$$

Diesen Ausdruck kann man leicht aus den Gleichungen (6) und (8) erhalten.

Die Schwingungsdauer T hängt ihrerseits von den Galvanometerkonstanten ab. Da in der Gleichung (6) b eine Kreisfrequenz darstellt: $b = \omega = \frac{2\pi}{T}$, ist

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{D}{K} - \frac{P^2}{4K^2}}}.$$

Aus diesem Ausdruck geht hervor, daß man die Schwingungsdauer des Rähmchens eines fertigen Galvanometers nur durch Änderung der Dämpfungskonstanten P verändern kann, weil K und D unveränderlich sind. Dazu schaltet man in den Galvanometerkreis einen solchen Widerstand R, daß die Summe $R_g + R$ größer ist, als es dem aperiodischen Grenzfall des vorliegenden Galvanometers entspricht.

Für $P \approx 0$, was man durch Öffnen des Galvanometerkreises erreichen kann, wird die Schwingungsdauer seines Drehsystems:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{K}{D}}. \tag{9}$$

Die Schwingungsdauer T_0 ist, wie wir weiterhin sehen werden, eine der wichtigsten Größen des Galvanometers.

Aus allem Gesagten geht hervor, daß man die Bewegungsart des Rähmchens (bei unverändertem K und D) leicht und bequem in einem weiten Bereich von der periodischen Bewegung mit geringer Dämpfung bis zu der aperiodischen Bewegung verändern kann. Dabei lassen sich beide Bewegungsarten hauptsächlich durch die Regulierung der elektrodynamischen Konstante P_2 einstellen, welche ihrerseits von dem äußeren Widerstand des Galvanometers, d. h. dem im Galvanometerkreis liegenden Widerstand, abhängt. Darauf beruht das Verfahren, die Schwingungen des Rähmchens schnell zu dämpfen. Es genügt, das Rähmchen des Galvanometers in dem Moment kurzzuschließen, wenn es bei der Schwingung durch den Ruhepunkt (Nullpunkt) geht, um es schnell zum Stehen zu bringen.

Um zu klären, von welchen Faktoren die Empfindlichkeit des Galvanometers abhängt, ist es vorteilhaft, sie als Funktion der Schwingungsdauer

des Rähmchens und des Grenzwiderstandes des Galvanometers auszudrücken.

Aus früher angeführten Gleichungen

$$R_g + R = \frac{H^2 n^2 Q^2}{2\sqrt{KD}}$$

und

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{K}{D}},$$

sowie aus $S = \frac{HnQ}{D}$ folgt

$$S^2 = \frac{2(R_g + R)\sqrt{KD}}{D^2} = \frac{(R_g + R)\, T_0}{\pi D}. \tag{10}$$

Bei einer vorgegebenen Schwingungsdauer des Galvanometers (praktisch 1 bis 5 sec) ist daher die Empfindlichkeit der Quadratwurzel aus dem Grenzwiderstand proportional, der, so scheint es, so groß wie möglich gewählt werden muß. Man muß dabei jedoch beachten, daß eine Vergrößerung des Wertes für den Grenzwiderstand zur Abnahme der Spannungsempfindlichkeit des Gerätes führt. Und gerade die hohe Spannungsempfindlichkeit bestimmt in vielen Fällen den Wert des Galvanometers.

Denn das Galvanometer hat zwei verschiedene Verwendungen: Entweder wird es als Gerät zur Messung geringer Ströme oder zur Messung geringer Spannungen verwendet. Praktisch hat sich erwiesen, daß sich die Arbeitsbereiche der Schaltungen, in denen es darauf ankommt, geringe Ströme bzw. kleine Spannungen zu messen, in den meisten Fällen stark voneinander unterscheiden. So ist die Messung geringer Ströme für die Fälle charakteristisch, wenn die Meßanordnung hohe Widerstände enthält (Photostrom, Ionen- oder Elektronenstrom in Gasen). In diesen Fällen bilden die großen Werte des Grenzwiderstandes des Galvanometers kein Hindernis. Ganz anders ist es, wenn das Galvanometer zur Messung kleiner Potentialdifferenzen (Thermospannungen, galvanomagnetische Effekte, Einschaltung des Galvanometers in potentiometrische oder Brückenschaltungen) verwendet wird. Gewöhnlich ist dabei der Widerstand des Kreises, in den das Galvanometer geschaltet wird, klein. Besitzt daher das Galvanometer einen hohen Grenzwiderstand, so wird es praktisch vollkommen gedämpft. Deshalb schaltet man in diesen Fällen einen so großen zusätzlichen Widerstand in Reihe mit dem Galvanometer, daß seine Bewegung dem erforderlichen Grenzfall nahekommt. Das bedeutet, daß die Spannungsempfindlichkeit des Galvanometers praktisch bestimmt wird als das Verhältnis der Stromempfindlichkeit nicht zu dem inneren Widerstand des Gerätes, sondern zu seinem Grenzwiderstand. Aus diesem Grunde erweist sich ein stromempfindliches Galvanometer mit hohem Grenzwiderstand trotz formal hoher Empfindlichkeit oft als ungeeignet zur Messung kleiner Potentialdifferenzen. Dabei erscheint die Messung kleiner Potentialdifferenzen oder die Kontrolle ihrer Abnahme auf Null als eines der verbreitetsten Anwendungsgebiete des Gerätes, wie man leicht aus den Aufgaben dieses Praktikums ersehen kann. Die Herstellung der Galvanometer,

speziell für diese Zwecke, mit kleinem Grenzwiderstand ist nicht so einfach, weil der Wert des Grenzwiderstandes der Größe der gleichen Parameter proportional ist (vergleiche die entsprechenden Formeln), die auch in den Ausdruck für die Stromempfindlichkeit eingehen, und weil er proportional zum Quadrat der Empfindlichkeit anwächst. Dem Konstrukteur eines solchen Gerätes wird also die schwere Aufgabe gestellt, eine vernünftige Kompromißlösung für alle diese nicht leicht zu erfüllenden Forderungen zu finden.

Aus allem Gesagten folgt, daß die Auswahl eines Galvanometers sowohl für ein rationelles Arbeiten mit einer vorgegebenen Schaltung als auch für den Erfolg einer Messung große Bedeutung besitzt.

In der vorliegenden Aufgabe werden folgende Übungen durchgeführt: 1. die Bestimmung der Stromempfindlichkeit eines Galvanometers; 2. die Bestimmung der Periode der freien Schwingungen des Galvanometerrähmchens; 3. die Bestimmung des äußeren Grenzwiderstandes des Galvanometers; 4. die Bestimmung der Abhängigkeit des Dämpfungsverhältnisses der Schwingungen des Galvanometerrähmchens von der Größe des äußeren Widerstandes.

Übung 1

Die Bestimmung der Stromempfindlichkeit des Galvanometers

Für die Bestimmung der Stromempfindlichkeit des Galvanometers wird eine Schaltung verwendet, die in Abb. 112 dargestellt ist. Hierin ist E ein Akkumulator von 1,4 V, R ein Spannungsteiler, V ein Voltmeter, R_0 ein konstanter Widerstand (9000 Ω), R_1 ein Stöpselrheostat (1 bis 50 Ω), R_2 ein Stöpselrheostat (1 bis 9999 Ω), G das Galvanometer, K_1 ein Umschalter im Galvanometerkreis und K_2 ein Schalter zur Dämpfung des Galvanometers (siehe S. 228).

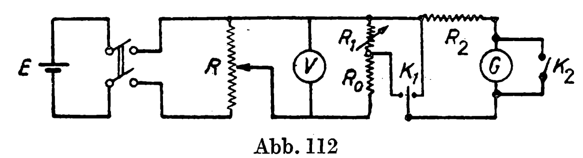


Abb. 112

Die Stromstärke im Galvanometerkreis wird, wie leicht aus der Schaltung zu ersehen ist, durch folgenden Ausdruck bestimmt:

$$i_g = \frac{V \frac{R_1}{R_0}}{R_g + R_2}, \tag{11}$$

wobei i_g die Stromstärke im Galvanometerkreis und R_g der innere Widerstand des Galvanometerrähmchens bedeuten. Der Wert R_g, der in die Formel eingeht, kann auf folgende Weise bestimmt werden:

Fließt durch das Galvanometer die gleiche Stromstärke, so kann man für verschiedene Werte von V und R_2 schreiben:

$$\frac{V' \frac{R_1}{R_0}}{R_g + R_2'} = \frac{V'' \frac{R_1}{R_0}}{R_g + R_2''},$$

woraus folgt

$$R_g = \frac{V'' R_2' - V' R_2''}{V' - V''}. \tag{12}$$

Die auf der rechten Seite der Formel (12) stehenden Größen werden aus den Versuchsergebnissen bestimmt; Näheres siehe weiter unten.

Kennt man R_g, so kann man i_g bestimmen und damit auch die Stromempfindlichkeit nach der Formel

$$S_i = \frac{N}{i_g l}, \tag{13}$$

oder die dynamische Konstante ergibt sich zu

$$C_1 = \frac{i_g l}{N},$$

wobei N die Zahl der Millimeter der Auslenkung des Lichtzeigers auf der Skala aus der Nullpunktslage und l den Abstand in Metern von der Skala bis zum Spiegel des Galvanometers (Abb. 113) bedeuten. Die Empfindlichkeit wird gewöhnlich in mm Ausschlag angegeben, der durch die Stromstärke von 1 μA bei einem Abstand zwischen Spiegel und Skala von 1 m hervorgerufen wird $\left(\frac{\text{mm}}{\mu\text{A}\cdot\text{m}}\right)$.

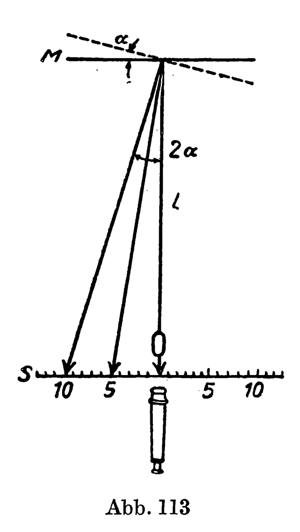


Abb. 113

Die Galvanometerkonstante wird durch die Stromstärke (in A) ausgedrückt, die einen Zeigerausschlag von 1 mm bei einem Abstand von 1 m zwischen Spiegel und Skala erzeugt $\left(\frac{\text{A}}{\text{mm/m}}\right)$.

Kennt man die Stromempfindlichkeit, so kann man leicht die Spannungsempfindlichkeit[1] nach der Formel

$$S_V = \frac{S_i}{R_g} \tag{14}$$

bestimmen.

Jedoch muß man, wie oben ausführlich dargelegt, diese Größe oft durch folgende ersetzen:

$$S'_V = \frac{S_i}{R + R_g} = \frac{S_i}{R_{\text{Grenz}}}. \tag{15}$$

Für diese Aufgabe ist es erforderlich, die Spannungsempfindlichkeit sowohl nach der Formel (14) als auch nach (15) zu berechnen.

Die Messung. Man sucht zwei Werte von V und R_2 aus, bei denen das Galvanometer den gleichen Ausschlag zeigt, und berechnet nach den Formeln (12), (13) und (14) S_i, S_V und R_g. Für die Größen R_g und S_i muß man mindestens drei Werte erhalten und den Meßfehler angeben.

Praktische Anmerkungen. 1. Nach dem Zusammensetzen der Schaltung (Abb. 112) und ihrer Überprüfung durch den Assistenten muß man das Fern-

[1]) Die Spannungsempfindlichkeit wird in $\frac{\text{mm}}{\mu\text{V}\cdot\text{m}}$ angegeben.

rohr so einstellen, daß das Bild des Fadens sich auf der Mitte der Skala befindet (siehe Abb. 113).

2. Man schließt den Doppelschalter und stellt die Spannung nach dem Voltmeter auf 0,5 bis 0,8 V ein.

3. Man steckt im Widerstand R_1 3 bis 5 Ω und im Widerstand R_0 9000 Ω und schaltet durch K_1 das Galvanometer ein. Wenn der Ausschlag zu klein ist, verkleinert man R_2 so weit, bis der Ausschlag 100 bis 150 mm, vom Nullpunkt gemessen, beträgt und geht dann an die Ausführung der Übung.

Übung 2

Die Bestimmung der Periode der freien Schwingungen des Galvanometerrähmchens

Zur Bestimmung der Periode der freien Schwingung des Rähmchens muß man eine Lichtzeigerauslenkung von 150 bis 200 mm erzeugen und dann den Galvanometerkreis durch K_1 öffnen. Danach bestimmt man mit Hilfe einer Stoppuhr die Zeit von 20 bis 30 vollen Schwingungen des Rähmchens und berechnet die Periode der ungedämpften Schwingungen.

Übung 3

Die Bestimmung des äußeren Grenzwiderstandes des Galvanometers

Hat man einen Ausschlag des Lichtzeigers von 150 bis 200 mm, schaltet man rasch K_1 so um, daß das Galvanometerrähmchen von der Stromquelle abgeschaltet und über den Widerstand R_2 geschlossen wird. Der Schalter K_2 bleibt dabei selbstverständlich die ganze Zeit geöffnet. Danach beobachtet man, durch welche Art der Bewegung (Schwingfall, Kriechfall) sich der Zeiger dem Nullpunkt nähert. Man wiederholt die Beobachtung bei nach und nach verkleinertem Widerstand R_2, bis die Bewegung des Rähmchens beginnt, aperiodisch[1]) zu werden. Der Wert des Widerstandes R_2, bei dem die Bewegung den aperiodischen Grenzfall erreicht, ist gleich dem äußeren Grenzwiderstand des Galvanometers.

Übung 4

Die Bestimmung der Abhängigkeit des Dämpfungsverhältnisses der Schwingungen des Galvanometerrähmchens von der Größe des äußeren Widerstandes

Die Schaltung wird nicht verändert. Die Reihenfolge der Messung ist die gleiche wie auch in Übung 3. In dieser Übung werden die Schwingungen des Lichtzeigers auf der Skala beobachtet und die Größen aufeinanderfolgender

---

[1]) Es ist klar, daß für jeden Wert R_2 der Lichtzeiger in der gleichen Bewegungsart sich sowohl dem Nullpunkt (bei der oben angeführten Reihenfolge der Betätigung des Schalters) als auch seiner ausgelenkten Lage (bei vertauschtem Anschluß des Galvanometerrähmchens an die Stromquelle) nähert. Doch ist es praktisch bequemer, die Bewegungsart bei Rückkehr des Zeigers in die Nullpunktslage zu beobachten, weil die ausgelenkte Lage sich bei der Auswahl des benötigten Widerstandes R_2 ändert und der Galvanometerkreis dabei an der ganzen Schaltung angeschlossen bleibt. Das ist für die Beobachtung der Bewegungsart des Rähmchens unvorteilhaft.

Auslenkungen nach rechts und nach links (oder nur in einer Richtung) aufgeschrieben. Führt man ähnliche Messungen für verschiedene Werte von R_2 durch, so kann man das Dämpfungsverhältnis und seine Abhängigkeit vom äußeren Widerstand des Galvanometers berechnen und die Abhängigkeit des Dämpfungsverhältnisses vom äußeren Widerstand R_2 graphisch darstellen.

Die Größen des Verhältnisses werden für folgende Werte von R_2 bestimmt: 4000, 5000, 6000, 7000 und 8000 Ω.

Spezialliteratur

E. MEYER und C. MOERDER: „Spiegelgalvanometer und Lichtzeigerinstrumente". Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, Leipzig 1952.

Aufgabe 47

Die Bestimmung der Kapazität eines Kondensators mit einem ballistischen Galvanometer

Zubehör: 1. Ballistisches Galvanometer, 2. Fernrohr mit Skala, 3. Schiebewiderstand, 4. geeichter Kondensator, 5. zu messender Kondensator, 6. Schalter, 7. Doppeltaster, 8. zweipoliger Schalter.

Die Kapazität eines Kondensators kann durch mehrere prinzipiell verschiedene Methoden[1]) gemessen werden. In der vorliegenden Aufgabe liegt der Messung der Kapazität eine elektrostatische Beziehung zwischen der Ladung des Kondensators q, seiner Kapazität C und der Potentialdifferenz V am Kondensator zugrunde. Wenn man diese Beziehung auf zwei Kondensatoren anwendet, die auf die gleiche Potentialdifferenz gebracht sind, so kommt man leicht zu der Beziehung

$$C_2 = C_1 \frac{q_2}{q_1}.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß, wenn die Kapazität eines der Kondensatoren bekannt ist, die relative Messung der Kapazitäten zweier Kondensatoren auf den Vergleich ihrer Ladungen (bei $V_1 = V_2$)[2]) zurückgeführt wird. Diese Methode der relativen Messung zweier Kapazitäten liegt der vorliegenden Aufgabe zugrunde.

Der komplizierteste Teil dieser (prinzipiell sehr leichten) Aufgabe ist die Messung der Größe der Ladung q oder der Vergleich der Ladungen zweier Kondensatoren. In unserem Fall wird der Vergleich der Ladungen der Kondensatoren mit der ballistischen Methode durchgeführt. Deshalb nimmt die Darlegung der ballistischen Methode den größten Teil der Beschreibung dieser Aufgabe ein. Der Wert der ballistischen Methode zur Messung von Ladungen geht weit über die Grenzen des vorliegenden speziellen Problems des Vergleiches

---

[1]) Siehe die Aufgaben 53 und 55.

[2]) Ist $V_1 \neq V_2$, so muß man noch wissen, in welcher Beziehung sie zueinander stehen.

der Kapazitäten zweier Kondensatoren hinaus (siehe die Aufgaben 12, 48, 49, 50, 60). Die angeführte Methode ist eines der wichtigsten Verfahren, die bei elektrischen Messungen im allgemeinen und magnetischen Messungen im besonderen angewendet werden (siehe die Aufgaben 48 bis 50). Auf letztere ist es zuerst von Professor A. G. STOLETOW angewendet worden. Deshalb muß man bei der Ausführung dieser Aufgabe seine besondere Aufmerksamkeit der ballistischen Methode zur Messung von Ladungen zuwenden, um so mehr, als die elementaren elektrostatischen Überlegungen, die beim Vergleich der Kapazitäten zweier Kondensatoren angestellt werden, das Ziel der Anwendung dieser Methode völlig klar erscheinen lassen.

Kurze Theorie des ballistischen Galvanometers. Das ballistische Galvanometer wird für die Messung der Strommenge benutzt, die den Kreis während einer Zeitdauer, welche im Vergleich zur Schwingungsdauer des Rähmchens klein ist, durchfließt. Es stellt eine besondere Abart des Drehspulgalvanometers dar, das in der Aufgabe 46 beschrieben worden ist. Kurzzeitige Ströme treten in Schaltungen bei der Entladung eines Kondensators, rascher Änderung eines magnetischen Flusses usw. auf. Das ballistische Galvanometer unterscheidet sich vom gewöhnlichen Drehspulgalvanometer durch künstliche Vergrößerung des Trägheitsmomentes seines Drehsystems. Die Vergrößerung des Trägheitsmomentes eines gewöhnlichen Galvanometers wird manchmal dadurch erreicht, daß an das Drehsystem zwei Arme befestigt werden, die an den Enden Schalen tragen, in die je ein schweres Kügelchen gelegt wird (Abb. 114).

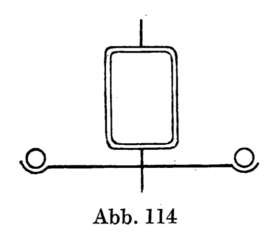


Abb. 114

Die Bewegung des Rähmchens eines ballistischen Galvanometers wird im allgemeinen Fall durch eine Gleichung vom gleichen Typ beschrieben, wie auch die des gewöhnlichen Galvanometers (siehe Aufgabe 46):

$$K\frac{d^2\alpha}{dt^2}+P\frac{d\alpha}{dt}+D\alpha=HnQi. \qquad (1)$$

Da jedoch bei den Messungen mit dem ballistischen Galvanometer die Zeit des Stromflusses $\tau \ll T$ — der Periode der Eigenschwingungen des Galvanometerrähmchens — ist (oder genauer der Zeit der ersten Auslenkung), so kann man damit rechnen, daß das Rähmchen erst nach dem Stromfluß anfängt sich zu bewegen. Deshalb kann die Bewegung des Rähmchens während der Zeitdauer $t > \tau$ durch die Gleichung der Form

$$K\frac{d^2\alpha}{dt^2}+P\frac{d\alpha}{dt}+D\alpha=0$$

beschrieben werden. Die angegebenen Besonderheiten des ballistischen Galvanometers bedingen seinen besonderen Arbeitsbereich und bestimmen seine Haupteigenschaften: Die Proportionalität der Größe des ersten Ausschlages zur Elektrizitätsmenge, die das Rähmchen durchfließt.

Ohne die Differentialgleichung (2) zu lösen, versuchen wir auf einfache Art, die Arbeitsbedingungen für das Galvanometer zu finden.

Wir leiten eine Beziehung zwischen der Elektrizitätsmenge q, die durch die Windungen des Rähmchens des ballistischen Galvanometers fließt (z. B. bei der Entladung eines Kondensators), und der ersten maximalen Auslenkung α_0 des Rähmchens aus der Gleichgewichtslage, wenn keine Dämpfung vorhanden ist ($P = 0$), ab.

Weil es während der Zeit τ des Stromdurchganges dem Rähmchen nicht gelingt, sich aus der Gleichgewichtslage herauszudrehen, kann man die Bewegungsgleichung für die Zeit $t < \tau$ vereinfachen und in der Form schreiben:

$$K \frac{d^2\alpha}{dt^2} = HnQi, \tag{3}$$

woraus folgt

$$HnQ\int_0^\tau i\,dt = HnQq = K\frac{d\alpha}{dt}. \tag{4}$$

Hierbei ist q die ganze Elektrizitätsmenge, die durch das Galvanometer fließt. Dabei erlangt das Rähmchen die kinetische Energie $\frac{1}{2}K\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$. Diese Energie wird für die Drehung der Aufhängung um den Winkel α verbraucht.

Das Drehmoment bei dem Drehwinkel α ist $D \cdot \alpha$; bei weiterer Drehung um den Winkel $d\alpha$ wird von den Kräften die Arbeit $D \cdot \alpha \cdot d\alpha$ geleistet. Die ganze für die Auslenkung verbrauchte Arbeit ist:

$$\int_0^{\alpha_0} D\alpha \cdot d\alpha = \frac{D\alpha_0^2}{2}. \tag{5}$$

Dafür erhalten wir

$$\frac{D\alpha_0^2}{2} = \frac{1}{2}K\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

oder

$$K\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = D\alpha_0^2. \tag{6}$$

Quadrieren wir die Gleichung (4) und dividieren sie durch die Gleichung (6), so erhalten wir

$$K = \frac{H^2n^2Q^2q^2}{D\alpha_0^2}. \tag{7}$$

Die Periode der Schwingungen des offenen Galvanometers ist $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{K}{D}}$ (siehe Aufgabe 46) oder $K = \frac{T_0^2 D}{4\pi^2}$. Setzen wir K in die Gleichung (7) ein, haben wir:

$$\frac{T_0^2 D}{4\pi^2} = \frac{H^2n^2Q^2q^2}{D\alpha_0^2},$$

woraus folgt

$$q = \frac{T_0}{\pi} \cdot \frac{D}{HnQ} \cdot \frac{\alpha_0}{2} = \frac{T_0}{2\pi} C\alpha_0$$

oder

$$q = B\alpha_0, \tag{8}$$

worin $B = \frac{T_0}{2\pi} C$ ist und C die dynamische Galvanometerkonstante bedeutet. Die Größe B trägt die Bezeichnung *ballistische Galvanometerkonstante*.

Die angeführte Ableitung beruht auf der Annahme, daß das Rähmchen bei seinen Schwingungen keinerlei Dämpfung erfährt. Praktisch ist dies nie ganz erfüllt, deshalb ist der Zusammenhang zwischen q und α_0 in Wirklichkeit etwas komplizierter.

Die Meßmethode und die Schaltung. Wie eben gezeigt, ist die Auslenkung des ballistischen Galvanometers der Elektrizitätsmenge proportional, die in der kurzen Entladungszeit des Kondensators durch das Galvanometer fließt. Ist q bekannt, so gibt die Gleichung die Möglichkeit, durch Messung von α B zu bestimmen.

Da der Ausschlag α des Galvanometers immer an einer linearen Skala (siehe Aufgabe 46) abgelesen wird, ist es bequemer, B durch die Auslenkung des Lichtzeigers auf der Skala auszudrücken:

$$\alpha = \frac{n}{2l},$$

wobei l den Abstand zwischen Galvanometerspiegel und Skala und n die Zahl der Teilstriche, die auf der Skala abgelesen werden, bedeuten. Hieraus ergibt sich

$$q = \frac{B}{2l} n,$$

d. h., n hängt von l ab. Doch ist für jede vorliegende Anordnung l gewöhnlich konstant. Deshalb erhalten wir, wenn wir zur Abkürzung

$$B' = \frac{B}{2l}$$

setzen,

$$q = B' n$$

und

$$B' = \frac{q}{n} = \text{const}, \tag{9}$$

wobei B' schon in Coulomb je Skalenteil (unter den Bedingungen der vorliegenden Anordnung) ausgedrückt ist.

Praktisch kann man B und B' bestimmen, wenn man über das ballistische Galvanometer einen Kondensator bekannter Kapazität C, an dem eine bestimmte Spannung V liegt, sich entladen läßt. Der Kondensator besitzt dabei die Ladung

$$q = CV. \tag{10}$$

Zur Bestimmung von B und B' setzt man die Schaltung nach dem Schema der Abb. 115 zusammen. Ein Gleichstrom wird vom Netz über den Doppelschalter S zu dem Schiebewiderstand R geführt, der als Spannungsteiler dient. Von dessen einem Ende und dem Gleitkontakt wird die Spannung abgenommen und über den Doppelschalter K an die Kondensatorplatten C ge-

legt. Diese Spannung kann man durch Verschieben des Gleitkontaktes ändern und am Voltmeter V ablesen. Da die Spannung im Netz Schwankungen unterworfen ist, muß man dauernd auf das Voltmeter achten, und wenn sich die Spannung merklich ändert, sie sofort wieder durch Verschieben des Gleitkontaktes auf den alten Wert einregulieren. Beim Druck auf den Taster K öffnet sich erst der Aufladekreis des Kondensators, und dann wird der Kondensator mit dem Galvanometer G verbunden.

Parallel zum Galvanometer liegt der Schalter k, dessen Aufgabe es ist, die induktiven Ströme (siehe Aufgabe 46) durchzulassen, die in der Spule des Galvanometers bei ihrer Bewegung entstehen und die die Dämpfung der Schwingungen des Galvanometerrähmchens bewirken. Der Schalter k muß nach der Auslenkung des Galvanometers in dem Moment geschlossen werden, wenn nach der Ablesung der nullte Teilstrich der Skala wieder durch das Fadenkreuz des Fernrohres geht.

Die Messung. 1. Die Bestimmung der ballistischen Konstanten. Man setzt in die Schaltung den geeichten Kondensator C_0 ein, schließt den Doppelschalter S, verschiebt den Gleitkontakt des Schiebewiderstandes und stellt am Voltmeter irgendeine bestimmte Spannung, z. B. 100 V, ein. Man bringt das Fernrohr und die Skala in die richtige Lage und merkt sich den Nullpunkt. Dann schließt man durch kurzes Antippen den Taster K und liest mit Hilfe des Fernrohres den Teilstrich ab, bis zu welchem sich das Bild der Skala während des ersten Ausschlages verschiebt. Um das Galvanometer wieder zu beruhigen, schließt man den Schalter k in dem Moment, wenn der Nullpunkt der Skala im Fernrohr erscheint. Hat man auf diese Weise mehrmals den Galvanometerausschlag n bestimmt (mindestens fünfmal), so setzt man seinen Mittelwert in die Formel (9) ein und bestimmt B'.

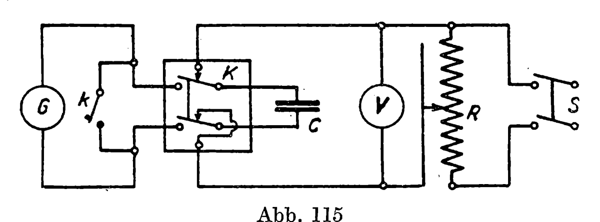


Abb. 115

2. Die Bestimmung der Kapazität eines Drehkondensators. Aus den Gleichungen (9) und (10) erhalten wir

$$C = \frac{B' n}{V}.$$

Hieraus folgt, daß man die Kapazität des unbekannten Kondensators C bestimmen kann, wenn man B' und V kennt und n gemessen hat. Dazu wechselt man in der Schaltung (Abb. 115) den geeichten Kondensator gegen den unbekannten Drehkondensator aus und mißt analog dem vorhergehenden den Galvanometerausschlag für verschiedene Stellungen des Rotors, dessen Drehwinkel auf einer Skala abgelesen werden können. Die Messungen werden bei Veränderung um jeweils 10 Skalenteile durchgeführt. Aus den erhaltenen Werten wird eine graphische Darstellung der Abhängigkeit der Kondensatorkapazität von der Zahl der Skalenteile angefertigt.

Praktische Hinweise. Da in dieser Aufgabe eine Spannung von 120 V benutzt wird, besteht die Gefahr, daß bei der geringsten Unrichtigkeit der Schaltung des Stromkreises das Galvanometer durchbrennt. Deshalb ist es notwendig:

1. Auf keinen Fall den Stromkreis zu schließen, bevor der Assistent die Schaltung *abgenommen hat.*
2. Alle Umschaltungen, auch das Auswechseln der Kondensatoren, nur mit größter Sorgfalt und bei ausgeschaltetem Doppelschalter S und geschlossenem Schalter k auszuführen.
3. Nach dem Umschalten zuerst den Doppelschalter S zu schließen und dann l zu öffnen.
4. Die Schaltelemente ausschließlich mit Schaltschnüren zu verbinden, deren Isolation unbeschädigt ist.

Spezialliteratur

Siehe Literatur zu Aufgabe 46.

Aufgabe 48

Die Untersuchungen der magnetischen Induktion im Eisen mit der ballistischen Methode

Zubehör: 1. Ballistisches Galvanometer, 2. Meßanordnung mit Kreisring aus Eisen und Normalspule, 3. Schaltschnüre.

Die Beschreibung der Methode und der Anordnung. Die magnetische Induktion B ferromagnetischer Stoffe, wie Eisen, Kobalt, Nickel und besonderer magnetischer Legierungen, hängt ab von der Feldstärke des magnetischen Feldes H, in dem sich der magnetische Stoff befindet. In dieser Aufgabe soll die Abhängigkeit der Größe B von H untersucht werden.

In der Abb. 116 ist als Beispiel die Kurve der Abhängigkeit der magnetischen Induktion B von der Feldstärke des magnetischen Feldes im Inneren des Stoffes für reines Weicheisen dargestellt. Die Form der Kurve hängt nicht nur von der chemischen Beschaffenheit des Stoffes, sondern auch von seiner Temperatur, der vorherigen thermischen Behandlung des Stückes und von den in ihm vorhandenen elastischen Spannungen ab. Diese Faktoren müssen bei der Untersuchung magnetischer Eigenschaften der Stoffe berücksichtigt werden.

Zum erstenmal wurde eine vollständige experimentelle Untersuchung der Abhängigkeit der Größe B von H in den Jahren 1871 bis 1872 von dem Professor der Moskauer Universität A. G. Stoletow durchgeführt. Er löste ein für magnetische Messungen sehr wichtiges Problem, nämlich, wie man von der Untersuchung der magnetischen Eigenschaften eines Stückes von bestimmter geometrischer Form auf die magnetische Charakteristik des Stoffes, aus dem dieses Versuchsstück gefertigt ist, schließen kann. Das war offensichtlich für die Klärung des physikalischen Prozesses der Magnetisierung eines Stoffes notwendig. Die Lösung dieses Problems ist deshalb wichtig, weil es nur einen Sinn hat, die magnetische Induktion des Stoffes als Funktion der

magnetischen Feldstärke im Inneren des Versuchskörpers zu untersuchen, d. h. als Funktion des wahren magnetischen Feldes. Die Größe der magnetischen Feldstärke im Inneren des Körpers fällt, allgemein gesprochen, nicht mit der Größe des äußeren magnetischen Feldes zusammen, in das der Versuchskörper gebracht worden ist.

STOLETOW hat gezeigt, wie der Einfluß der geometrischen Form der für die Messung benutzten Körper bei der Beurteilung der Meßresultate berücksichtigt werden kann, d. h., wie man von der Größe der Feldstärke des äußeren Magnetfeldes zu der Größe der Feldstärke des wahren magnetischen Feldes gelangen kann. Erst danach konnte man aus magnetischen Messungen Ergebnisse erhalten, die die Eigenschaften der Stoffe unabhängig von der Form der Versuchskörper wiedergaben. STOLETOW hat ebenfalls auf solche geometrischen Formen der Körper (*Toroid* oder Torus) hingewiesen, für die die innere Feldstärke gleich der äußeren Feldstärke des magnetischen Feldes ist.

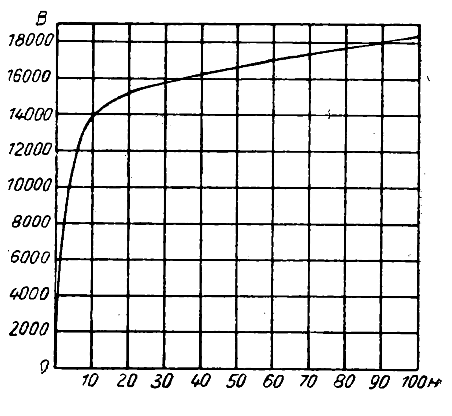


Abb. 116

Von der Notwendigkeit der Berücksichtigung der geometrischen Formen der Körper kann man sich leicht überzeugen, wenn man die magnetischen Feldlinien der Körper verschiedener geometrischer Formen mit Hilfe von Eisenfeilspänen, die in die Nähe der sich im Magnetfeld befindlichen Körper geschüttet werden, sichtbar macht. Man sieht aus der verschiedenartigen Streuung der Kraftlinien des magnetischen Feldes an den Grenzen der Körper, daß auch eine verschiedenartige Struktur des magnetischen Feldes im Inneren der Körper, trotz des gleichen äußeren Magnetfeldes, vorhanden sein muß. Hieraus entsteht die Schwierigkeit des Überganges von den gemessenen Werten der äußeren Feldstärke zu der Feldstärke des wahren magnetischen Feldes im Inneren des Körpers, als deren Funktion die Induktionskurve gezeichnet werden soll. Am einfachsten wird das Problem in dem Fall gelöst, wenn die Kraftlinien des magnetischen Feldes im ganzen Volumen des Körpers gleichmäßig verteilt sind und nirgends die Oberfläche schneiden. Ein Beispiel eines solchen Feldes ist der von STOLETOW angegebene Fall eines ringförmigen toroidalen Körpers, der durch eine Ringspule, die um diesen Körper gewickelt ist (B in Abb. 117), magnetisiert wird. Bei genügend kleinem Radius des Querschnittes des Toroids, im Verhältnis zum Radius des Toroids selbst, ist das Magnetfeld, das durch den in der Spule fließenden Strom erzeugt wird, homogen. Es bleibt auch im Inneren des Körpers homogen. Die Kraftlinien schneiden nirgends die Oberfläche und bilden ein System konzentrischer Ringe um den allen gemeinsamen Mittelpunkt des eisernen Toroids. Die erhaltenen experimentellen Angaben über das Magnetfeld bedürfen in diesem Fall keiner

komplizierten Korrektur, die die Form des Körpers berücksichtigt. Solch ein Körper wird in der vorliegenden Aufgabe benutzt.

In den übrigen Fällen muß man den Einfluß der Begrenzungen des Körpers, dort wo die Kraftlinien unter verschiedenen Winkeln aus der Oberfläche des Körpers heraustreten, berücksichtigen. Offensichtlich können solche Begrenzungseffekte nur zur Schwächung des magnetischen Feldes im Inneren des Körpers führen. Aus diesem Grunde tragen die Korrekturen, die die Form des Körpers berücksichtigen und für den Übergang von der Größe der Feldstärke im Außenraum zu der Größe H im Inneren des Körpers notwendig sind, die allgemeine Bezeichnung *Entmagnetisierungsfaktor*.

Für das in dieser Aufgabe verwendete Toroid ist der Entmagnetisierungsfaktor gleich Null, und die Feldstärke des äußeren Feldes fällt mit der wahren Feldstärke im Inneren des Körpers zusammen.

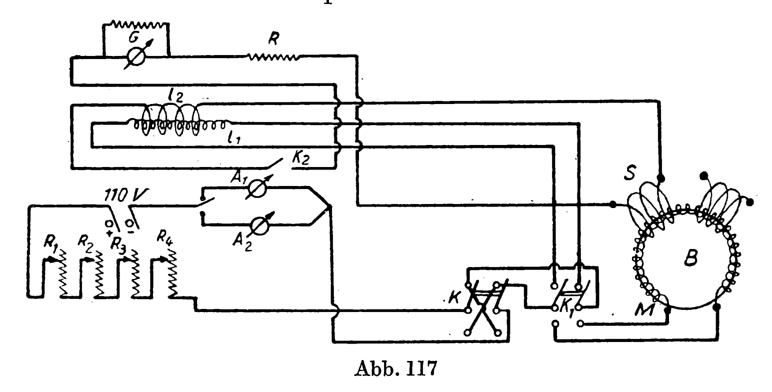


Abb. 117

Die experimentellen Untersuchungen der Induktionskurve können mit verschiedenen Methoden durchgeführt werden. In der vorliegenden Aufgabe wird der Vorschlag von STOLETOW benutzt, nämlich, die schon klassisch gewordene und verbreitete b a l l i s t i s c h e M e t h o d e. Sie liefert mit einfachen experimentellen Mitteln zuverlässige quantitative Resultate.

Das Wesen der ballistischen Methode, die auch in den anderen Aufgaben des Praktikums angewendet wird, besteht in folgendem:

Das ballistische Galvanometer (siehe die allgemeine Theorie des Galvanometers in den Aufgaben 46 und 47) wird in den Kreis der Spule S geschaltet, die in dem Magnetfeld, dessen Feldstärke gemessen werden soll, liegt. Die Ausmaße der Spule sind durch die Inhomogenität des Feldes bestimmt. Je inhomogener das Feld, desto kleiner müssen die Ausmaße der Spule gewählt werden. Der Induktionsfluß durch die Spule ist

$$\Phi = BSN_{\text{Mess}},$$

wobei S der Querschnitt einer Windung der Spule ist und N_{Mess} die Zahl ihrer Windungen bedeutet. Bei der Änderung des Induktionsflusses in der Spule tritt an ihr die Induktionsspannung

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

auf. Folglich fließt im Galvanometerkreis der Strom

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{d\Phi}{R\,dt},$$

wobei q die Elektrizitätsmenge und R der Widerstand der Spule und des Galvanometers sind. Hieraus folgt, daß bei der Änderung des Induktionsflusses um $\Delta\Phi$ durch die Spule des Galvanometerrähmchens die Elektrizitätsmenge

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R}$$

fließt.

Der Ausschlag des ballistischen Galvanometers ist bekanntlich der es durchfließenden Elektrizitätsmenge proportional, wenn die Zeit des Durchfließens der Ladung im Vergleich zur Schwingungsdauer des Galvanometers klein ist. Wenn sich folglich in der mit dem Galvanometer verbundenen Spule der Induktionsfluß genügend schnell ändert, so ist der Ausschlag des ballistischen Galvanometers der Änderung des Induktionsflusses proportional. Aus dem gemessenen Ausschlag des Galvanometers kann man die Größe der Änderung des Induktionsflusses und damit auch die durch das magnetische Feld hervorgerufene Induktion bestimmen.

Die Änderung des Induktionsflusses in der Spule, die in dem zu untersuchenden Magnetfeld liegt, kann man auf zwei Arten verwirklichen: 1. durch Änderung der Lage der Meßspule im magnetischen Feld, z. B. durch Umdrehen; 2. Änderung des Induktionsflusses durch die Änderung der das magnetische Feld erzeugenden Stromstärke.

Bei der Untersuchung eines von einem Strom erzeugten Magnetfeldes ist es bequem, die Stromstärke in den das Feld erzeugenden Spulen zu verändern und nicht den Körper in diesem Feld zu verschieben. Am einfachsten erreicht man dies durch Umpolen des Stromes. Solche Richtungsänderung des Stromes nennt man *Kommutation* des Stromes. Bei der Kommutation des Stromes ändert der Vektor B seine Richtung um 180°. Folglich ändert sich der Induktionsfluß in der Meßspule um

$$\Delta\Phi = 2BSN_{\text{Mess}} = qR,$$

woraus folgt

$$B = \frac{qR}{2SN_{\text{Mess}}}. \tag{1}$$

Das beschriebene Kommutationsverfahren ist bei magnetischen Messungen sehr verbreitet und wird speziell in dieser Aufgabe angewendet.

Auf einen Teil des zu untersuchenden Toroids ist außer der Magnetspule, die gleichmäßig auf die ganze Ausdehnung des Toroids gewickelt ist, noch eine Meßspule unmittelbar auf die Oberfläche des Toroids gewickelt, die in den Kreis des ballistischen Galvanometers eingeschaltet ist. Bei der Kommutation des Stromes in der Magnetspule entsteht in der Meßspule ein Stromstoß. Es ist offensichtlich, daß die Kommutationsdauer (die Zeit des Umschaltens) klein im Vergleich zu der Schwingungsdauer des Gal-

vanometers sein muß. Damit bleibt man in seinem ballistischen Arbeitsbereich. Die hierbei durch das Galvanometer fließende Elektrizitätsmenge wird durch den Zeigerausschlag angezeigt. Wenn die Empfindlichkeit des Galvanometers bekannt ist, läßt sich nach der Formel (1) die Induktion B bestimmen.

Für die Untersuchung der Abhängigkeit der Größe B von H wird die Feldstärke H des magnetischen Feldes durch Berechnung ermittelt. Wendet man tatsächlich auf die Magnetisierungsspule die Formel

$$H = 0{,}4\pi n I \tag{2}$$

an, wobei n die Zahl der Windungen je Längeneinheit der Achse eines Solenoids bedeutet, kann man nach der Messung der Stromstärke I in der Magnetisierungsspule die benötigten Werte für H ermitteln.

Praktisch eicht man jedoch das ballistische Galvanometer nicht zur Messung von Ladungen, sondern verfährt anders: Man führt alle Messungen auf einen Vergleich der Induktion im untersuchten Körper mit einem bekannten Magnetfeld zurück. Dazu benutzt man außer dem Toroid mit Spule noch ein völlig unabhängiges langes gerades Solenoid ohne Kern mit dicht nebeneinanderliegenden Windungen. Das Feld in einem solchen Solenoid (auch *Normalspule* genannt) wird nach der gleichen Formel (2) berechnet wie auch das Feld im Toroid, wobei die Normalspule so lang sein muß, daß dadurch H genügend genau bestimmt ist. Auf der Normalspule sitzt eine weitere kurze Meßspule, die ebenfalls in den Kreis des ballistischen Galvanometers geschaltet wird.

Kommutieren wir den Strom in der Normalspule, dann ist der Ausschlag β des Galvanometers der bekannten Veränderung des Induktionsflusses durch die Meßwicklung der Normalspule proportional:

$$\Delta\Phi = 2 H S_{\text{Mess}} N_{\text{Mess}} = 2 \cdot 0{,}4\pi n_{\text{Norm}} I S_{\text{Mess}} N_{\text{Mess}} = A\beta, \tag{3}$$

wobei H das Magnetfeld in der Normalspule, S_{Mess} und N_{Mess} entsprechend der Querschnitt und die gesamte Zahl der Windungen der auf der Normalspule sitzenden Meßwicklung, n_{Norm} die Zahl der Windungen der Normalspule je Längeneinheit und A die sogenannte ballistische Galvanometerkonstante sind. Aus der Formel (3) erhalten wir für A den Ausdruck

$$A = \frac{0{,}8\pi n_{\text{Norm}} S_{\text{Mess}} N_{\text{Mess}} I}{\beta}. \tag{4}$$

Gibt nun das Galvanometer bei der Messung mit dem Toroid den Ausschlag α, dann kann man schreiben:

$$\Delta\Phi_{\text{Tor}} = 2 B S_{\text{T}} N_{\text{T}} = A\alpha,$$

wobei S_{T} und N_{T} entsprechend den Querschnitt der Meßwicklung des Toroids und die gesamte Zahl der Windungen dieser Wicklung angeben.

Hieraus folgt:

$$B = \frac{A\alpha}{2 S_{\text{T}} N_{\text{T}}}.$$

Setzen wir den Wert der Konstante A ein, so erhalten wir für die Induktion im Eisen endgültig:

$$B = \frac{0{,}4\pi \cdot n_{\mathrm{Norm}} N_{\mathrm{Mess}}}{N_{\mathrm{T}}} I \frac{\alpha}{\beta} \frac{S_{\mathrm{Mess}}}{S_{\mathrm{T}}} {}^{1)}. \tag{5}$$

Wir sehen also, daß der Messung der Induktion im Toroid der Vergleich der Galvanometerausschläge beim Kommutieren des Stromes in der Normalspule und beim Kommutieren des Stromes in der Magnetisierungsspule des Toroids zugrunde liegt. Wie weiter oben angeführt wurde, sind die Ausschläge des ballistischen Galvanometers der Elektrizitätsmenge proportional, die während des Stromimpulses durch das Galvanometer fließt. Die Elektrizitätsmenge ist ihrerseits bei vorgegebenem $\Delta\Phi$ dem Widerstand des Galvanometerkreises umgekehrt proportional. Hieraus folgt, daß bei der Vergleichsmethode der Messung der Induktionsflüsse, die in der vorliegenden Aufgabe angewendet wird, der Widerstand des Galvanometerkreises bei allen Messungen nicht geändert werden darf. Dazu ist es jedoch nicht nötig, die Widerstände der Meßspulen auf dem Toroid und der Normalspule gleichzumachen. Wie aus der Abb. 117 ersichtlich ist, sind im Galvanometerkreis dauernd beide Meßspulen hintereinandergeschaltet, und der Widerstand des Kreises bleibt dauernd unverändert. Der beträchtliche Abstand zwischen dem Toroid und der Normalspule schließt die Möglichkeit einer induktiven Beeinflussung der zweiten Meßspule während des Kommutierens des Stromes in der nicht mit ihr verbundenen Magnetisierungsspule aus.

Betrachtet man die Kommutationsmethode der magnetischen ballistischen Messungen, so muß man seine Aufmerksamkeit darauf lenken, daß das Kommutieren des Stromes zur Ummagnetisierung des Körpers führt. Denn es werden bei jeder Kommutation des Stromes die Richtungen der Vektoren H und B um 180° geändert. Deshalb beschreibt der Vektor der magnetischen Induktion bei jeder Kommutation des Stromes eine Hystereseschleife, die im Eisen praktisch unvermeidlich ist. Die zu messende Größe B ist die Spitze einer solchen einzelnen Hystereseschleife, die jedoch nicht bis zum Zustand der Sättigung geführt worden ist. Mit dem Anwachsen des Magnetfeldes der Magnetisierungsspule werden die Amplituden der Hystereseschleifen immer größer. Dementsprechend ist die gesuchte Kurve, die die Abhängigkeit der Induktion B von H darstellt, der geometrische Ort der Punkte, die man aus den Spitzen der einzelnen Hystereseschleifen, die der Körper bei jeder Ummagnetisierung durchläuft, erhält.

Die Messung. Die Messung wird mit der in der Abb. 117 dargestellten Schaltung durchgeführt. Darin sind B das magnetisierte Toroid, M die Magnetisierungsspule, S die ballistische Spule, G das Galvanometer, R der Stöpselrheostat bis 1000 Ω im Galvanometerkreis, R_1, R_2, R_3, R_4 Widerstände, A_1 Gleichstromamperemeter bis 10 A, A_2 Gleichstromamperemeter bis 1 A,

[1]) Die Buchstaben N mit den entsprechenden Indizes bezeichnen in allen Fällen die Gesamtzahl der Spulenwindungen, d. h. die Größe, die für die Meßspulen wesentlich ist. Die Buchstaben n bezeichnen die Windungszahl je Längeneinheit der Spulen, d. h. die Größe, die für die Magnetisierungsspulen wesentlich ist.

l_1 und l_2 Primär- und Sekundärwindungen der Normalspule, K der Kommutator, K_1 und K_2 Umschalter und Schalter.

Das Toroid B ist ein flacher Eisenring mit einem Querschnitt $S_T = 650\ mm^2$. Die für die Berechnung notwendige mittlere Länge des Toroids wird aus seinem Durchmesser ermittelt, der unmittelbar mit einem Maßstab gemessen wird.

Die Induktionskurve wird in Feldern von 0 bis 200 Örsted aufgenommen. Die zur Erzeugung der Felder notwendigen Stromstärken in der Magnetisierungsspule des Toroids werden nach der Formel (2) berechnet.

(Bei dieser Aufgabe sind Stromstärken von 1 bis 3 A für die Speisung der Normalspule erforderlich.)

Bei dem Zusammenschalten der Anordnung muß man besonders auf gute Isolation zwischen den Magnetisierungsspulen und den Zuleitungsdrähten der Meßspulen achten, damit das ballistische Spiegelgalvanometer mit der Empfindlichkeit der Größenordnung 10^{-8} mm/μA · m nicht beschädigt wird.

Um die Induktionskurve des Körpers auch wirklich von ihrem Nullpunkt aus aufzunehmen und die nicht leicht zu berücksichtigenden Effekte des Restmagnetismus auszuschalten, muß der Körper vor den Messungen entmagnetisiert werden. Der Entmagnetisierungsprozeß wird in dem vorliegenden Fall auf zyklischem Wege auf folgende Weise ausgeführt: Bei geöffnetem Galvanometerkreis und bei abgeschaltetem *genauen* Amperemeter in dem Kreis der Magnetisierungsspule des Toroids bringt man die Stromstärke in dieser Spule auf 10 A. Dann vergrößert man allmählich unter ständigem Kommutieren des Stromes (einige Male in der Sekunde) den Widerstand, der in dem gleichen Kreis liegt, und verkleinert damit die Stromstärke bis auf Null. Das in immer schwächer werdenden Magnetfeldern ständig ummagnetisierte Toroid erweist sich danach als praktisch entmagnetisiert.

Ein anderer möglicher Weg der Entmagnetisierung von Körpern aus Eisen besteht darin, daß ein Wechselstrom von 50 Hz durch die Spule geschickt wird. In einem solchen Magnetfeld wird der Körper ebenfalls praktisch entmagnetisiert. Jedoch läßt es in unserem Fall die hohe Selbstinduktion der Magnetisierungsspule, die auf ein geschlossenes Toroid aus Eisen gewickelt ist, nicht zu, in ihr eine genügende Stromstärke aus dem Netz von 120 V fließen zu lassen. Deshalb ist man genötigt, sich der Kommutation des Gleichstromes zu bedienen.

Nach der Entmagnetisierung des Körpers geht man an die unmittelbare Messung der Induktion, die man selbstverständlich bei kleinen Werten der Stromstärke in der Magnetisierungsspule beginnt. Ein vorhergehender zufälliger (auch kurzzeitiger) hoher Stromstoß in dieser Spule würde die ganze Form der Induktionskurve verzerren und eine Wiederholung des gesamten Entmagnetisierungsprozesses erforderlich machen.

Nach der Messung der Induktionswerte wird die Eichung der ballistischen Anordnung mit Hilfe der Normalspule vorgenommen.

Bei der Durchführung der Versuche muß man in allen Fällen solche Stromstärken aussuchen, die für eine genaue Ablesung genügend große Galvanometerausschläge erzeugen. Es ist klar, daß diese Auswahl der Werte für die Stromstärke nur in dem zulässigen Belastungsbereich der Spule vorgenommen

werden darf. Alle im Zusammenhang damit auftauchenden Fragen müssen unbedingt zwischen den Studenten und dem Assistenten bei der Abnahme der Schaltung vor ihrer Inbetriebnahme geklärt werden.

Das abgegebene Protokoll muß die Meßwerte in Form von Tabellen, eine Zusammenstellung der Werte aller Parameter, die in das Endergebnis eingehen, die Tabellen der nach der Formel (6) berechneten Werte der magnetischen Induktion und die graphische Darstellung der Abhängigkeit der Größe B von H enthalten. Die Größe H findet man aus der Formel (2).

Spezialliteratur

1. R. Becker, W. Döhring: „Ferromagnetismus". Verlag J. Springer, Berlin 1939.
2. F. Fröhlich: „Ferromagnetische Werkstoffe". Verlag Technik, Berlin 1952.
3. F. Fröhlich: „Ausgewählte Probleme der Theorie des Ferro- und Ferrimagnetismus". Verlag Technik, Berlin 1954.
4. W. Jellinghaus: „Magnetische Messungen an ferromagnetischen Stoffen". Verlag W. de Gruyter & Co., Berlin 1952.
5. F. Pawlek: „Magnetische Werkstoffe". Verlag J. Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1952.

Aufgabe 49

Die Bestimmung der Feldstärke des Magnetfeldes eines Solenoids längs seiner Achse

Zubehör: 1. Ballistisches Galvanometer mit Skala, 2. aufgebaute Schaltung mit Normalspule, Meßspule und Solenoid, 3. Amperemeter, Umschalter und Schaltschnüre.

Die Feldstärke des magnetischen Feldes, das von einem zylindrischen Solenoid auf seiner Achse OA (Abb. 118) erzeugt wird, wird durch die Formel bestimmt:

$$H = 0{,}2\pi n' i\,(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1), \tag{1}$$

wobei i die Stromstärke in Ampere, n' die Zahl der Windungen auf 1 cm der Spule, α_1 und α_2 die Winkel, unter denen vom Beobachtungspunkt die Radien des Solenoids an seinem vorderen und hinteren Ende zu sehen sind, bedeuten.

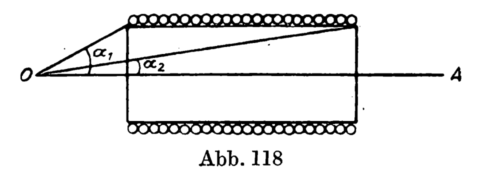


Abb. 118

Wenn der Beobachtungspunkt innerhalb des Solenoids liegt, ist α_1 ein stumpfer Winkel und die Formel (1) geht über in

$$H = 0{,}2\pi n' i\,(\cos\alpha_2 + \cos\alpha_3), \tag{2}$$

wobei α_3 den Komplementwinkel bezeichnet (Abb. 119). Im Mittelpunkt des Solenoids, dessen Länge l wesentlich größer ist als sein Radius R, erhalten wir offensichtlich:

$$H = 0{,}4\,\pi n' i \tag{3}$$

und an seinen Enden

$$H = 0{,}2\pi n' i. \tag{4}$$

Trägt das Solenoid mehrere Schichten von Windungen, so erhält man die Größe des Feldes im Beobachtungspunkt aus der Addition der Felder der einzelnen Schichten, von denen jedes nach der Formel (1) berechnet wird. Deshalb hat das Solenoid mit mehreren Schichten qualitativ das gleiche Feld wie auch das einschichtige.

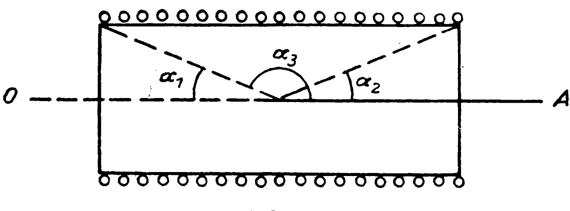


Abb. 119

Wie aus der Formel (1) hervorgeht, nimmt das Feld längs der Achse zu den Enden hin ab.

Die Beschreibung der Anordnung und die Meßmethode. Die Bestimmung der Feldstärke des Solenoids wird in der vorliegenden Aufgabe mit der ballistischen Methode (siehe Aufgabe 48) durchgeführt. Die Anordnung (Abb. 120) besteht aus einem ballistischen Galvanometer G mit der Normalspule H und der auf ihr sitzenden Meßspule M_1, die zur Bestimmung der ballistischen Galvanometerkonstante dient, der Meßspule M_2, die in das zu untersuchende Feld eines mehrschichtigen Solenoids C gebracht wird, den Widerständen R und R', dem Amperemeter A und den Umschaltern I und II.

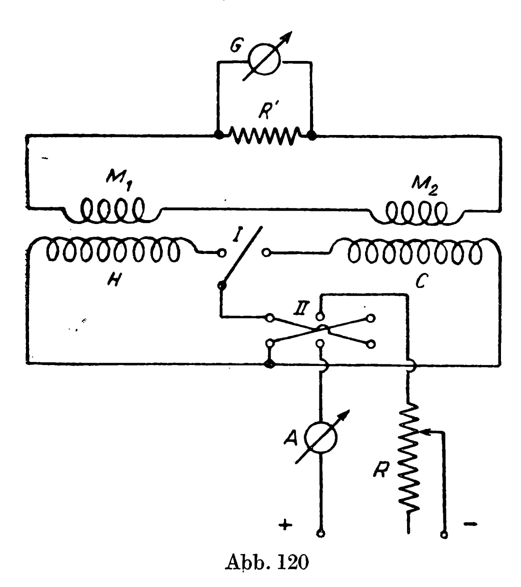


Abb. 120

Die Normalspule stellt ein langes einschichtiges Solenoid[1]) dar, dessen mittleren Teil eine sekundäre, ebenfalls einschichtige Meßspule M_1 eng

[1]) Die Größe des Verhältnisses der Länge des Solenoids zu seinem Durchmesser $\lambda = \frac{l}{d} < 25$ wird die *relative Länge des Solenoids* genannt. Die Einführung des Begriffes „relative Länge" gestattet es, nach den Ähnlichkeitsgesetzen das magnetische Feld von Solenoiden verschiedener Ausmaße, aber gleicher relativer Längen zu beschreiben, wenn für einen der Solenoide dieser relativen Länge das Magnetfeld bekannt ist.

umschließt. Die magnetische Feldstärke beträgt im mittleren Teil der Normalspule

$$H = 0{,}4\pi n_1' i,$$

wobei n' die Zahl der Windungen ihrer Primärspule je cm Längeneinheit bedeutet. Der durch die Meßspule M_1 der Normalspule gehende Induktionsfluß ist gleich

$$\Phi = H S_1 n_1,$$

wobei S_1 die Fläche des Querschnittes der Primärwicklung der Normalspule und n_1 die Zahl der Windungen ihrer Meßspule bezeichnen.

Beim Kommutieren des Stromes in der Primärwicklung der Normalspule tritt durch die Sekundärwicklung der Induktionsfluß

$$2\Phi = 2H S_1 n_1.$$

Bei dieser Änderung des Flusses um 2Φ wird in der Sekundärwicklung eine Spannung induziert, im Galvanometerkreis fließt ein kurzzeitiger Strom und lenkt das Galvanometerrähmchen und damit auch den Galvanometerspiegel aus. Der dieser Drehung des Spiegels entsprechende Ausschlag des Lichtzeigers (β mm) läßt sich auf der Skala ablesen.

Die durch die Wicklung bei der Änderung des Induktionsflusses um 2Φ fließende Elektrizitätsmenge läßt sich durch

$$q = C\beta$$

ausdrücken, wobei C die ballistische Galvanometerkonstante bedeutet. Sie wird in Coulomb je mm der Skala oder je Einheit des Drehwinkels des Lichtzeigers angegeben.

Die gesamte Elektrizitätsmenge q, die durch die an das Galvanometer angeschlossene Wicklung bei der Änderung des Induktionsflusses um 2Φ fließt, ist gleich[1])

$$q = \frac{2\Phi}{R},$$

wobei mit R der Widerstand des ballistischen Kreises bezeichnet ist. Folglich ist

$$C = \frac{q}{\beta} = \frac{2\Phi}{\beta R} = \frac{2H n_1 S_1}{\beta R} = \frac{0{,}8\pi n_1' n_1 S_1 i}{\beta R}.$$

In der Schaltung bleiben die Sekundärwicklung der Normalspule M_1 und die Meßspule M_2 bei allen Messungen hintereinandergeschaltet. Dadurch bleibt der Widerstand des Galvanometerkreises stets konstant. Aus diesem Grunde ist es bequemer, die ballistische Konstante der A n o r d n u n g $C' = CR$ zu benutzen. Man erhält damit:

$$C' = \frac{0{,}8\pi n_1' n_1 S_1 i}{\beta}.$$

---

[1]) Diese Beziehung kann man leicht erhalten, wenn man berücksichtigt, daß die Stromstärke $I = \frac{dq}{dt} = \frac{d\Phi}{dt \cdot R}$. Integrieren wir diesen Ausdruck nach der Zeit, und berücksichtigen wir dabei, daß die Richtung des Induktionsflusses sich umkehrt ($\Delta\Phi = 2\Phi$), so finden wir q.

Nach der Bestimmung von C' mit Hilfe der Normalspule wird in den Kreis durch den Umschalter I die Spule des Solenoids eingeschaltet.

Die Meßspule M_2, die an einem Stab im Inneren des zu untersuchenden Solenoids verschoben wird, hat die Windungszahl N_2. Sie ist in einer Schicht gewickelt, kurz, und jede ihrer Windungsflächen ist gleich S_2. Beim Kommutieren des Stromes im Solenoid ändert sich das Feld in der Meßspule von $+H_x$ bis $-H_x$, d. h. um $2H_x$, und der ihre Windungen durchsetzende Fluß um

$$2\Phi' = 2H_x S_2 N_2 = q' R. \tag{5}$$

Da die Ladung q beim Umschalten des Stromes im Solenoid gleich $C\alpha$ ist, wobei α der Galvanometerausschlag (in mm) bedeutet, folgt

$$2\Phi' = C\alpha R. \tag{6}$$

Das Produkt CR ist gleich der Konstanten C', die schon vorher mit Hilfe der Normalspule bestimmt worden ist.

Aus den Beziehungen (5) und (6) erhalten wir:

$$C'\alpha = 2H_x S_2 N_2,$$

woraus folgt

$$H_x = \frac{C'\alpha}{2N_2S_2}. \tag{7}$$

Die Messung. 1. Man setzt die Schaltung nach der Abb. 120 zusammen, schaltet durch I die Normalspule H ein und stellt mit dem Widerstand in ihr eine Stromstärke ein, die kleiner als 0,9 A[1]) ist. Man kommutiert den Strom[2]) in dem Kreis der Normalspule mit dem Umschalter II, bestimmt den Ausschlag β nnd rechnet die ballistische Konstante C' aus. Man führt 5 bis 6 Messungen bei zwei Werten der Stromstärke durch und bestimmt den Mittelwert von C'.

2. Man schaltet in den Kreis mit Hilfe des Umschalters I anstatt der Normalspule das zu untersuchende Solenoid C und stellt die Stromstärke auf 0,8 A[3]) ein. Die Meßspule M_2 wird in die Nähe eines der Enden des Solenoids gebracht. Man kommutiert den Strom mit dem Umschalter II, erhält den Galvanometerausschlag α und errechnet nach der Formel (7) H_x.

Man schiebt die Meßspule um 2 cm in das Innere des Solenoids, wiederholt die Messung usw., bis man das andere Ende des Solenoids erreicht.

3. Man rechnet alle Werte für H_x aus, zeichnet eine Kurve, auf deren Ordinatenachse das Feld H_x und auf deren Abszissenachse der Abstand von dem einen Ende des Solenoids aufgetragen ist. Die erhaltene Kurve stellt die Verteilung der Feldstärke längs der Solenoidachse dar (für eine vorgegebene

---

[1]) Man muß den Widerstand auf seinen Maximalwert einstellen.

[2]) Die Dauer einer Kommutation (die Zeit des Umschaltens) muß klein sein im Vergleich zur Schwingungsdauer des Galvanometers. Wenn das nicht erfüllt ist, arbeitet das Galvanometer nicht ballistisch.

[3]) Das Solenoid darf nicht lange unter Strom gehalten werden. Es kann sich sonst stark erwärmen.

relative Länge $\lambda = l/d$). Man mißt die Länge l und den mittleren Durchmesser d des Solenoids, bildet daraus die relative Länge λ und führt sie in der Unterschrift zur erhaltenen Kurve an.

Spezialliteratur

Siehe Literatur zu Aufgabe 48.

Aufgabe 50

Der Einfluß der geometrischen Form eines Körpers auf die magnetische Suszeptibilität und die Hystereseschleife von Ferromagnetika

Zubehör: 1. Ballistische Anordnung, 2. Toroid und zwei zylindrische Körper, 3. Oszillograph, 4. Integrator für Spannungsimpulse.

Theoretische Einführung. Der Vektor der Magnetisierung I (das magnetische Moment der Volumeneinheit eines ferromagnetischen Körpers, das in einem vorgegebenen äußeren Feld H entsteht) hängt nicht nur von der magnetischen Suszeptibilität χ des Materials, sondern auch von der Form des Körpers ab. Wenn man einen zylindrischen Eisenstab so in ein homogenes Magnetfeld bringt, daß die Richtung des Feldes mit der Stabachse zusammenfällt, so entstehen an seinen Stirnflächen Magnetpole (Abb. 121). Das Feld H_0, das durch die Pole im Inneren des Körpers erzeugt wird, ist dem äußeren Feld entgegengerichtet und schwächt es damit. Die wahre Feldstärke im Inneren des Körpers ist:

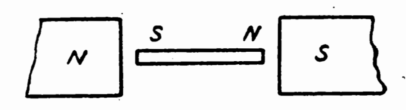


Abb. 121

$$H_i = H_e - H_0,$$

folglich ist die äußere Feldstärke gleich

$$H_e = H_i + H_0, \tag{1}$$

wobei H_0 das Feld der Entmagnetisierung des Körpers bezeichnet.

Die Größe des entmagnetisierenden Feldes H_0 hängt von der Form des Körpers und seiner Magnetisierung I ab. Bei nicht zu starken Feldern, wenn die Magnetisierung in allen Teilen des Körpers homogen erfolgt, ist

$$H_0 = N \cdot I. \tag{2}$$

Der Proportionalitätsfaktor N trägt die Bezeichnung *Entmagnetisierungsfaktor*. Er hängt von der Form des Körpers ab, nimmt mit der Verkleinerung der Länge des zylindrischen (oder prismatischen) Körpers und mit der Vergrößerung seines Durchmessers zu. Der Entmagnetisierungsfaktor N ist nur in einem speziellen Fall gleich Null, wenn nämlich der Körper die Form eines Ringes (Toroids) besitzt und das äußere Feld konzentsisch zum Ringmittelpunkt verläuft. Für einen zylindrischen Körper ist der Entmagnetisierungs-

faktor praktisch gleich Null, wenn das Verhältnis seiner Länge l zu seinem Durchmesser d genügend groß ist, z. B., wenn $\frac{l}{d} \approx 300$.

Im Zusammenhang mit dem Auftreten der Entmagnetisierung im Inneren des Körpers unterscheidet man die magnetische Suszeptibilität des Stoffes χ_i, die von der Struktur des Ferromagneten abhängt,

$$\chi_i = \frac{I}{H_i}, \tag{3}$$

und die Suszeptibilität des Körpers χ_0, die sowohl von der Struktur als auch von der Form des Körpers abhängt,

$$\chi_0 = \frac{I}{H_e} = \frac{I}{H_i + H_0} = \frac{I}{H_i + NI}. \tag{4}$$

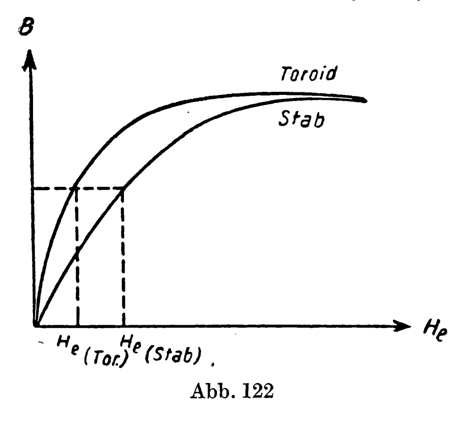


Abb. 122

Der Einfluß der Form des Körpers wird durch den Entmagnetisierungsfaktor N charakterisiert. Nur wenn $N = 0$ ist und folglich $H_i = H_e$, wird die magnetische Suszeptibilität (oder die Permeabilität μ_i) unmittelbar aus der Messung der Feldstärke H_e und der Magnetisierung I $\left(\text{oder der Induktion } B;\ \mu_i = \frac{B}{H_i}\right)$ bestimmt. Zur Bestimmung von χ_i oder μ_i aus den gemessenen Werten, entsprechend von I oder B bei $N \neq 0$, muß man die Größe von N bestimmen.

Man kann sich unschwer davon überzeugen, daß die Form des Körpers seine magnetischen Eigenschaften stärker beeinflußt als seine Struktur. Für $NI \gg H_i$ aus der Formel (4) folgt $\chi_0 \approx \frac{1}{N}$, d. h., die magnetische Suszeptibilität wird nicht durch die Struktur, sondern durch die Form des Körpers bestimmt. Die Kurve von Stoletow [die graphische Abhängigkeit $\mu = f(H)$], die ein scharf ausgeprägtes Maximum der Permeabilität besitzt, artet im Falle eines kurzen und dicken Stabes in eine Gerade aus. Die Neigung dieser Geraden bestimmt, wie man leicht sieht, ausschließlich die Größe des Entmagnetisierungsfaktors N.

In der vorliegenden Aufgabe wird der Entmagnetisierungsfaktor des Körpers (des Zylinders) durch Vergleich der Magnetisierungskurve $B = f(H_e)$ des Körpers mit der des Toroids aus dem gleichen Material bestimmt.

Im Falle des Toroids steigt diese Kurve steiler an, weil bei ein und demselben äußeren Feld im Toroid größere innere Felder entstehen, d. h. auch eine größere Magnetisierung als im Stab (Abb. 122). Umgekehrt sind zur Erreichung der gleichen Magnetisierung I und der magnetischen Induktion B

beim Toroid und beim Stab verschiedene äußere Felder erforderlich, wenn die inneren Felder gleich sein sollen. Aus der letzten Bedingung finden wir die Differenz der notwendigen äußeren Felder: Wenn $B_{(\mathrm{Tor})} = B_{(\mathrm{Stab})}$, dann ist auch

$$H_{i\,(\mathrm{Tor})} = H_{i\,(\mathrm{Stab})}. \tag{5}$$

Da $H_{i\,(\mathrm{Tor})} = H_{e\,(\mathrm{Tor})}$ $(N = 0)$ und $H_{i\,(\mathrm{Stab})} = H_{e\,(\mathrm{Stab})} - NI$, folgt

$$H_{e\,(\mathrm{Stab})} - H_{e\,(\mathrm{Tor})} = NI. \tag{6}$$

Wenn man die Magnetisierungskurven des Toroids und des Stabes vergleicht, so unterscheiden sich die Abszissen der Punkte mit den gleichen Ordinaten B um NI. Deshalb kann man für jedes B das entsprechende NI finden und daraus auch N.

Die Bestimmung von N geht in folgender Reihenfolge vor sich (siehe Abb. 123):

1. Man berechnet und zeichnet die Magnetisierungskurven des Toroids und des Stabes

$$\left(I = f(H_e) = \frac{B - H_e}{4\pi}\right).$$

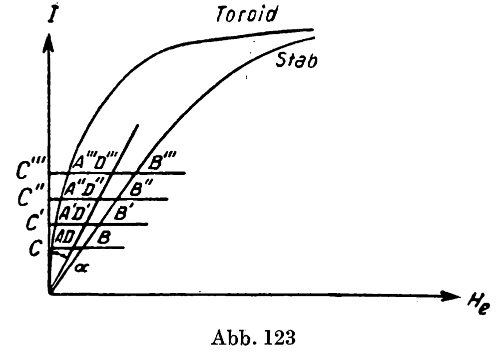


Abb. 123

2. Man zeichnet in die graphische Darstellung eine Reihe von Geraden, die parallel zur Abszissenachse verlaufen ($CADB$, $C'A'D'B'$, $C''A''D''B''$ usw.). Man darf nicht bis zur Krümmung der Kurve B heraufgehen, weil sich in starken Feldern N mit zunehmender Feldstärke H ändert.

3. Auf jeder Geraden trägt man, angefangen von der Ordinatenachse, die Strecke ab, die von den beiden Kurven ($I_{(\mathrm{Stab})}$ und $I_{(\mathrm{Tor})}$) begrenzt wird:

$$CD = AB, \quad C'D' = A'B', \quad C''D'' = A''B'' \quad \text{usw.}$$

4. Durch die Endpunkte der abgetragenen Strecken zieht man die Gerade $DD'D''D'''$. Ihre Neigung zur Ordinatenachse $\operatorname{tg}\alpha$ gibt die Größe von N an.

Alles über die Magnetisierungskurve Gesagte gilt auch für die Ummagnetisierungskurve (Hystereseschleife).

Die Aufgabe teilt sich in zwei Übungen: 1. verfolgt man den Einfluß der Form des Körpers auf die Form der Magnetisierungskurve, die mit der ballistischen Methode aufgenommen wird, und auf die Form der Hystereseschleife, die mit Hilfe eines Oszillographen aufgeschrieben wird; 2. bestimmt man N aus diesen Kurven.

Übung 1

Die Aufnahme der Magnetisierungskurve mit der ballistischen Methode

Über die ballistische Methode siehe Aufgabe 48. Die Messung wird an der Anordnung durchgeführt, deren Schaltung in Abb. 124 dargestellt ist. Darin sind *1* und *2* die Magnetisierungsspule und die Meßspule auf dem Versuchskörper; *3* und *4* die Normalspule und ihre Sekundärwicklung[1]); K der Kommutator, an dessen Enden cd die Magnetisierungsspule (oder die Wicklung des Toroids) angeschlossen wird; U der Umschalter der Anordnung; A_1 das Amperemeter für Gleichstrom (2,5 A), A_2 das Amperemeter für Wechselstrom; R_1, R_3, R_4 Schiebewiderstände, R_2 ein konstanter Widerstand (nach

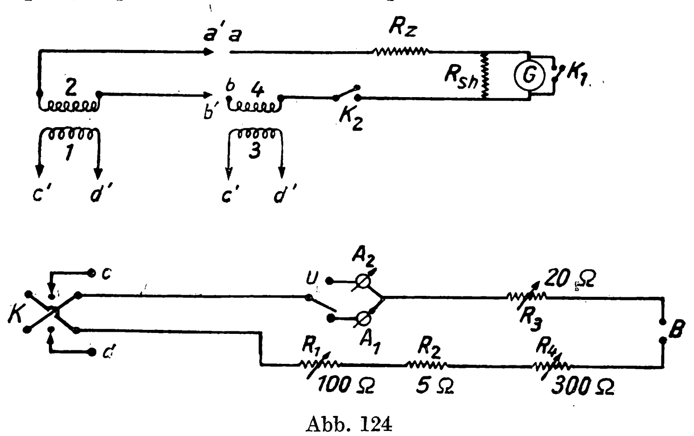


Abb. 124

Möglichkeit induktionsfrei); B ein Stecker als Verbindung mit der Stromquelle; R_{Sh}, R_z Shunt und Zusatzwiderstand im Galvanometerkreis; G das ballistische Galvanometer.

Anmerkung: Die ballistische Wicklung (*2*) auf dem Toroid und den beiden zylindrischen Körpern hat 200 Windungen. Die Sekundärwicklung der Normalspule (*4*) bleibt dauernd in den Galvanometerkreis geschaltet. Die Magnetisierungsspule, die zur Magnetisierung der stabförmigen Körper dient, wie auch die Magnetisierungswicklung des Toroids besitzen 8 Windungen je cm.

Die Messung. Das Entmagnetisieren des Körpers. Man schließt die Enden $c'd'$ der Magnetisierungsspule an die Klemmen cd des Kommutators an, stellt die Widerstände auf ihren Maximalwert ein und bringt einen der zylindrischen Körper in die Spule. Dann schaltet man in den Kreis (mit Hilfe des Umschalters U) das Wechselstromamperemeter A_2, steckt den Stecker B

[1]) Diese Spulen werden bei der Messung nicht benutzt. Die Normalspule *3* und ihre Sekundärwicklung *4* wurden früher für die Bestimmung der ballistischen Galvanometerkonstanten verwendet. (Der Zahlenwert der Konstanten ist in der Beschreibung der Übung 1 angegeben.) Die Sekundärwicklung *4* der Normalspule ist deshalb im Galvanometerkreis belassen, damit sich der gesamte Widerstand des Meßkreises und dadurch auch der Wert der ballistischen Konstanten nicht ändert.

in die Steckdose für Wechselstrom und stellt mit dem Widerstand R_1 den Wert der Stromstärke ein, der dem Feld der Sättigung des Körpers entspricht. Man verkleinert langsam die Stromstärke bis zu ihrem völligen Verschwinden. Dabei verschwindet auch der Restmagnetismus.

Die Magnetisierung des Körpers. Nach der Entmagnetisierung schaltet man das Gleichstromamperemeter A_1 ein, steckt den Stecker in die Steckdose für Gleichstrom um, schließt die ballistische Wicklung *2* des Körpers an die Klemmen *a* und *b* an und entarretiert das Galvanometer. Man stellt mit den Widerständen einen Strom von 0,1 A ein, öffnet den Schalter K_1 und schließt den Galvanometerkreis durch den Schalter K_2.

Mit dem Kommutator *K* ändert man die Richtung des Stromes und liest dabei den Galvanometerausschlag vom Nullpunkt aus ab. Man vergrößert den Strom im Magnetisierungskreis jedesmal um 50 mA, kommutiert den Strom und liest den Galvanometerausschlag ab. Über 400 mA werden die Ablesungen alle 100 mA durchgeführt (die Messungen sollen bis 1,5 A ausgeführt werden). Bei jeder Messung wird sowohl der Galvanometerausschlag als auch die Stromstärke *I* aufgeschrieben. Solche Messungen werden für drei Körper durchgeführt.

Geht bei der Messung bei höheren Stromstärken der Lichtzeiger über den Skalenrand hinaus, so ändert man den Widerstand des Shuntes R_{Sh} und damit die Empfindlichkeit des Galvanometers.

Die Berechnung und Zeichnung der graphischen Darstellungen $B = f(H_e)$, $I = f(H_e)$, $\mu = f(H_e)$. Zuerst stellt man $B = f(H_e)$ für alle drei Körper graphisch dar. Die Stärke des Magnetfeldes H_e wird nach der Formel berechnet:

$$H_e = 0{,}4\pi n I, \tag{7}$$

wobei *n* die Zahl der Windungen je cm der Magnetisierungsspule oder der Wicklung des Toroids und *I* der Magnetisierungsstrom in Ampere bedeuten.

Die Induktion *B* wird nach der Formel berechnet:

$$B = \frac{\alpha C}{2nS}, \tag{8}$$

wobei *S* den Querschnitt des Körpers in cm², *n* die Zahl der Windungen der ballistischen Wicklung, α den Galvanometerausschlag in mm, *C* die ballistische Konstante der Anordnung ($C = RC_b$, dabei ist *R* der Widerstand des Galvanometerkreises, C_b die ballistische Galvanometerkonstante) bezeichnen. (Die Größe der ballistischen Galvanometerkonstante wird bei dieser Aufgabe angegeben. Sie hängt jeweils von R, R_z und R_{Sh} des benutzten Galvanometers ab. Darauf muß bei der Änderung von R_{Sh}, d. h. der Galvanometerempfindlichkeit, während der Messung geachtet werden.)

Für das Toroid und zwei zylindrische Körper werden nach berechneten Werten von *B* und H_e $B = f(H_e)$ und $I = f(H_e)$ graphisch dargestellt. Weiter wird nach den bekannten Werten *B* und H_e der Ausdruck $\mu = \frac{B}{H_e}$ und $\mu = f(H_e)$ graphisch dargestellt.

Aus den Kurven $I = f(H_e)$ wird die Größe des Entmagnetisierungsfaktors *N* bestimmt.

Übung 2

Die Untersuchung des Einflusses der Form des Körpers auf die Hystereseschleife mit Hilfe eines Oszillographen

Über den Kathodenstrahloszillographen siehe Aufgabe 64. Wir bringen den ferromagnetischen Körper in ein magnetisches Wechselfeld. Die in Abb. 125

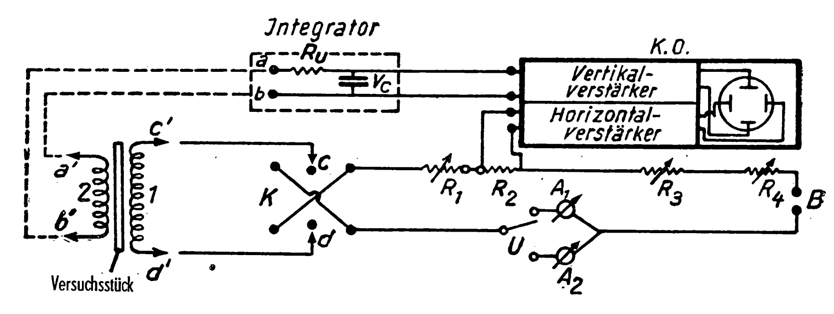


Abb. 125

dargestellte Schaltung erlaubt es, mit Hilfe eines Integrators für Spannungsimpulse die Hystereseschleife auf dem Schirm des Kathodenstrahloszillographen KO zu beobachten.

Klären wir die Wirkungsweise des Integrators (sein Schema ist in Abb. 126 dargestellt): Die Spannung am Kondensator ist

$$V_C = \frac{1}{C}\int i \cdot dt.$$

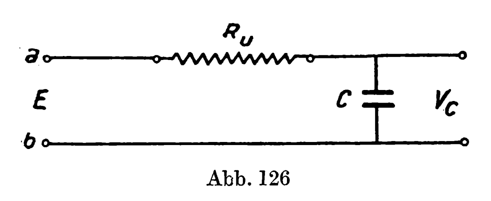


Abb. 126

Bei genügend hohen Werten des Widerstandes R_u und der Kapazität C ist die Spannung V_C wesentlich kleiner als die Spannung E an den Klemmen ab $(V_C \ll E)$, deshalb gilt

$$V_C = \frac{1}{C}\int_0^t i \cdot dt = \frac{1}{C}\int_0^t \frac{E - V_C}{R}\,dt \approx \frac{1}{RC}\int_0^t E \cdot dt.$$

Vernachlässigen wir den unwesentlichen Spannungsabfall an der Wicklung 2 (Abb. 125), und nehmen wir an, daß die Spannung E an den Klemmen ab gleich der in der Wicklung 2 induzierten Spannung, also gleich $-\frac{d\Phi}{dt}$ ist, dann kann man $\int E\,dt$ und folglich auch die Spannung V_C am Kondensator der Zunahme der Induktion B in dem zu untersuchenden Körper proportional annehmen.

Die Spannung V_C wird an das eine Plattenpaar des Kathodenstrahloszillo-

graphen[1]) gelegt. An das andere Plattenpaar wird eine Spannung gelegt, die an dem kleinen Widerstand R_2 (ungefähr 5 Ω) abgegriffen wird, der in dem Magnetisierungskreis liegt (siehe Abb. 125). Diese Spannung ist der Stromstärke und folglich auch der magnetischen Feldstärke proportional, die auf den zu untersuchenden Körper wirkt.

Der Integrator ist fest aufgebaut und sein Ausgang mit dem Vertikalverstärker des Oszillographen verbunden.

Der Magnetisierungskreis in Abb. 125 besteht aus den gleichen Elementen wie auch der Magnetisierungskreis in Abb. 124.

Die Messung. Man schaltet die Wicklung des Toroids oder die Magnetisierungsspule an den Kommutator K, verbindet die Enden $a'b'$ der um den zu untersuchenden Körper liegenden Wicklung an die Klemmen ab des Integrators, schaltet die Wechselspannung ein und zeichnet die Form der Hystereseschleife für die Stromstärken 0,1; 0,5; 1,0 A ab. Gleichzeitig trägt man in die Zeichnung die Koordinatenachse ein, die man von dem Koordinatennetz vor dem Schirm des Oszillographen abzeichnet. Der Versuch wird mit dem Toroid und mit zwei zylindrischen Körpern durchgeführt.

Zur bequemeren Untersuchung des Einflusses der Form der Körper auf die Hystereseschleife trägt man die zur gleichen Stromstärke gehörenden Schleifen in eine Zeichnung ein.

Spezialliteratur

Siehe Literatur zu Aufgabe 48.

Aufgabe 51

Die Bestimmung des CURIEpunktes ferromagnetischer Metalle

Zubehör: 1. Magnetometer mit Beleuchtung, 2. elektrischer Ofen mit dem zu untersuchenden ferromagnetischen Körper, Magnetisierungsspule, Schiebewiderstand und Amperemeter.

Mit CURIE*punkt* oder *magnetischem Umwandlungspunkt* bezeichnet man die Temperatur, oberhalb der der ferromagnetische Körper paramagnetisch[2]) wird.

Ferromagnetische Körper unterscheiden sich von paramagnetischen dadurch, daß sie schon in relativ schwachen Feldern fast bis zur Sättigung magnetisiert werden. Heute kann man als bewiesen ansehen, daß das auf eine besondere und sehr starke Wechselwirkung zwischen den Elektronen benachbarter Atome zurückzuführen ist. Diese Wechselwirkung führt dazu, daß die magnetischen Momente der einzelnen Elektronen (sogenannte Elek-

---

[1]) Wenn man an diese Platten die Spannung von den Klemmen ab direkt (ohne Integrator) anlegt, so wird sie nicht der Induktion B, sondern der Größe $\frac{dB}{dt}$ proportional sein.

[2]) Genauere Untersuchungen zeigen, daß die magnetische Umwandlung in einem bestimmten Temperaturintervall vor sich geht, deshalb ist es richtiger, nicht vom CURIEpunkt, sondern von dem CURIEbereich zu sprechen.

tronenspins) sich parallel zueinander in einzelnen kleinen Bereichen vom Volumen der Größenordnung 10^{-6} cm³ [1]) orientieren. Diese Magnetisierungsbereiche, die auch in den Ferromagnetika ohne äußeres Magnetfeld vorhanden sind, tragen die Bezeichnung: *Bereiche spontaner Magnetisierung* [2]), und ihr Vorhandensein bildet das Hauptanzeichen für die Unterscheidung der ferromagnetischen von den para- und diamagnetischen Stoffen.

Jedoch sind die magnetischen Momente benachbarter Bereiche bei Abwesenheit eines äußeren Magnetfeldes ungeordnet orientiert, deshalb erscheint ein Körper im ganzen nicht magnetisiert. Das Anlegen eines relativ schwachen Magnetfeldes ruft eine Drehung des Magnetisierungsvektors jeden Bereiches in die Feldrichtung hervor, und der Körper wird fast bis zur Sättigung magnetisiert. Das Magnetfeld, bei dem die Sättigung erreicht wird, ist bei verschiedenen Ferromagnetika verschieden groß. Zum Beispiel benötigt man für das Permalloy (Legierung aus 78% Ni und 22% Fe) zur Sättigung ein Feld von 1 bis 30 Oersted und für reines Kobalt 10000 bis 12000 Oersted.

Bei Erhöhung der Temperatur eines ferromagnetischen Körpers nimmt die Wärmebewegung des Metallgitters zu. Die Energie der Wärmebewegung, die proportional kT [3]) ist, kommt in die Größenordnung der Wechselwirkungsenergie der Elektronen, und beim Erreichen der Umwandlungstemperatur können die Wechselwirkungskräfte eine bestimmte Orientierung des Spins nicht mehr aufrechterhalten. Die Bereiche der spontanen Magnetisierung zerfallen, und der Körper wird paramagnetisch.

Die verschiedenen ferromagnetischen Elemente und Legierungen besitzen verschiedene Umwandlungstemperaturen, d. h. verschiedene CURIEpunkte. Es gibt sowohl Ferromagnetika mit hohem CURIEpunkt der Größenordnung 100 bis 1000°C als auch solche, die sich schon bei Zimmertemperatur und Temperaturen unterhalb 0°C umwandeln. Für Eisen liegt der CURIEpunkt bei +753°C und für Kobalt bei +1000°C.

In der vorliegenden Aufgabe wird die Temperatur der magnetischen Umwandlung eines Körpers bestimmt, der aus einer ferromagnetischen Legierung besteht.

Die Beschreibung der Anordnung und der Meßmethode. Die magnetischen Eigenschaften eines Körpers kann man speziell mit einem Magnetometer untersuchen. Das Magnetometer ist das einfachste magnetische Meßgerät (Abb. 127) und besteht aus einer Magnetnadel, die an einem dünnen elastischen Faden aufgehängt ist. Am gleichen Faden ist ein Spiegel befestigt, mit dessen Hilfe man den Winkel bestimmen kann, um den die Nadel gedreht wird. Das von der Beleuchtungseinrichtung kommende Lichtbündel wird vom Spiegel reflektiert, fällt auf die Skala und erzeugt dort das Bild eines vor die Linse der Beleuchtungseinrichtung gespannten Fadens (Lichtzeiger).

---

[1]) Anm. d. Übers.: TYNDALL bestimmte 1924 das Volumen zu 10^{-6} cm³, während Messungen von BOZORTH und DILLINGER (1932) die Größenordnung von 10^{-9} cm³ und höchstens $4 \cdot 10^{-8}$ cm³ ergaben.

[2]) Anm. d. Übers.: WEISSsche Bereiche.

[3]) k — BOLTZMANNkonstante, T — absolute Temperatur.

Wenn der zu untersuchende ferromagnetische Körper[1]) in die Nähe des Magnetometers gebracht wird, so wirkt sein Magnetfeld auf die Nadel ein und dreht sie um einen bestimmten Winkel, der der Magnetisierung des Körpers proportional ist. Damit dreht sich auch der Spiegel und bewegt den Lichtzeiger über die Skala. Wenn die Temperatur des magnetischen Körpers, der die Auslenkung der Magnetometernadel bewirkt, einen Wert erreicht, bei dem der Körper aufhört, ferromagnetisch zu sein, so wird die Spiegelauslenkung kleiner.

Durch Erwärmen des ferromagnetischen Körpers auf irgendeine Art und Beobachten der Zeigerauslenkung des danebenstehenden Magnetometers kann man den CURIEpunkt ermitteln.

In unserem Fall besitzt das Magnetometer zwei Nadeln (Abb. 127), die antiparallel an einem Faden befestigt sind, d. h., ihre gleichen Pole weisen in entgegengesetzte Richtungen. Ein solches Magnetometer wird *astatisch* genannt. Ein homogenes Magnetfeld (z. B. das Magnetfeld der Erde) kann auf ein solches System keinen Einfluß ausüben. Deshalb arbeitet ein solches Magnetometer konstanter. Wenn man in der Nähe der Nadeln des astatischen Magnetometers ein inhomogenes Magnetfeld erzeugt, so wirken auf die Nadeln verschiedene Drehmomente, die das System zu drehen versuchen.

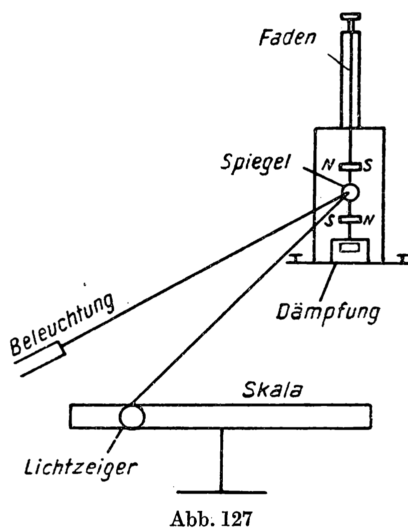


Abb. 127

Um einen magnetischen Körper entsteht gewöhnlich ein inhomogenes Feld. Bringen wir folglich den magnetisierten Körper in die Nähe eines astatischen Magnetometers, so erhalten wir eine Drehung des Spiegels. Sie ist um so größer, je größer die Magnetisierung des Körpers ist. In der vorliegenden Aufgabe, in der man eine Möglichkeit braucht, die magnetischen Eigenschaften der Ferromagnetika beim Erwärmungsprozeß stetig zu beobachten, kann man das Magnetometer mit Erfolg verwenden.

Der zu untersuchende Körper wird im elektrischen Ofen, dessen Temperatur mit einem Thermoelement gemessen wird, erwärmt. Die Heizwicklung ist bifilar direkt auf ein Porzellanrohr gewickelt und mit einer wärmeisolierenden Schicht (Asbest) bedeckt. Auf das Asbest ist die Magnetisierungsspule gewickelt. Dieses Solenoid erzeugt das den Körper magnetisierende Feld.

Der zu untersuchende Körper ist am Ende eines Messingrohres befestigt, durch dessen Inneres das Thermoelement gezogen ist. Die Lötstelle des

[1]) Im Praktikum ist die günstigste Stellung von Magnetometer und zu untersuchendem Körper zueinander ausgesucht und fixiert worden. Man achte auf diese Anordnung der Geräte.

Thermoelementes befindet sich außerhalb des Messingrohres und steckt in einer Vertiefung, die in dem mittleren Teil des Körpers eingearbeitet ist. Die freien Enden des Thermoelementes werden an ein Millivoltmeter angeschlossen. Da die Versuchstemperatur genügend hoch ist, wird die Temperatur der zweiten Lötstelle nicht fixiert.

Weil das Magnetometer nicht nur auf das Feld des Körpers, sondern auch auf jedes andere inhomogene Feld reagiert, das sich in der Umgebung der Anordnung befindet, muß dafür gesorgt werden, daß in der Nähe des Magnetometers keine veränderlichen Magnetfelder vorhanden sind, die die Messungen stören könnten. Es versteht sich von selbst, daß während des Meßprozesses mit einem solchen Gerät die Stromstärke, die den Körper magnetisiert, sehr konstant gehalten werden muß. Die Änderung der Stromstärke in der Heizwicklung wird durch das Magnetometer nicht angezeigt, weil die Wicklung bifilar ist.

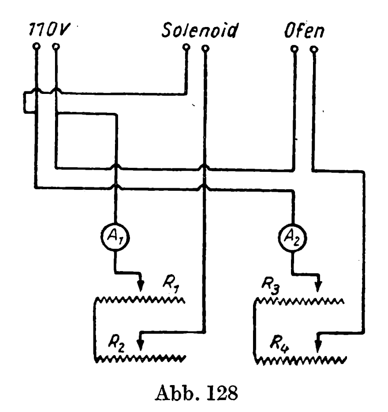


Abb. 128

Die Schaltung der Anordnung ist in Abb. 128 dargestellt. Das Amperemeter A_1 im Kreis der Magnetisierungsspule dient zur Kontrolle der Konstanz der durch sie fließenden Stromstärke. Der Strom wird durch zwei hintereinandergeschaltete Widerstände R_1 und R_2 geregelt. Im Heizkreis sind ebenfalls das Amperemeter A_2, die Widerstände R_3 und R_4 und die Heizwicklung selbst hintereinandergeschaltet. Der Heiz- und der Magnetisierungskreis sind parallel geschaltet und werden mit einem Gleichstrom von 110 V gespeist. Die Spule ist neben dem Magnetometer so aufgestellt, daß die Nadel maximale Auslenkungen zeigt. Deshalb empfiehlt es sich nicht, das Gerät zu verrücken.

Wenn man durch die Heizwicklung einen Strom bestimmter Stärke schickt, so nimmt anfangs die Temperatur des Ofens zu; doch nimmt auch gleichzeitig mit der Temperaturerhöhung des Ofens seine Wärmeabgabe an die Umgebung zu. Deshalb stellt sich nach einiger Zeit ein Wärmegleichgewicht ein, bei dem die Temperatur des Ofens konstant bleibt. In unserer Anordnung entspricht der Temperatur von 400°C eine Stromstärke von ungefähr 3 bis 3,2 A. Die Temperatur wird aus der Anzeige des Millivoltmeters, das in den Kreis des Thermoelementes geschaltet ist, und nach der zu dem Thermoelement beigegebenen Eichkurve bestimmt. Auf der Abszissenachse dieser graphischen Darstellung ist die Anzeige des Gerätes und auf der Ordinatenachse die Temperatur in °C aufgetragen.

Die Messung und ihre Auswertung. 1. Zuerst muß man den Anfangspunkt der Ablesung auf der Magnetometerskala bestimmen. Dazu schaltet man den Strom in der Magnetisierungs- und der Heizwicklung ein, stellt in der ersteren einen Strom von 3 A und in der letzteren einen Strom von 3 bis 3,2 A ein. Dann wählt man durch Verschieben der Skala einen solchen Nullpunkt der

Ablesung aus, daß beim Hereinbringen des Versuchskörpers in den Ofen die Anzeige des Magnetometers nicht über die Skala hinausgeht.

Nach Bestimmung des Anfangspunktes der Ablesung wird der Versuchskörper bei eingeschaltetem Magnetisierungs- und Heizstrom vollends in den Ofen gebracht, dieser mit Asbest verschlossen und die Messung begonnen.

2. Bei Erhöhung der Temperatur ändert sich die Magnetisierung des Körpers und damit auch die entsprechende Anzeige des Magnetometers. Dabei kehrt der Lichtzeiger auf den Anfangspunkt der Skala zurück, der der Anzeige des Magnetometers bei eingeschalteten Strömen aber ohne Versuchskörper im Ofen entspricht. Die Anzeige des Magnetometers und die ihr entsprechende Temperatur wird so lange registriert, bis der Lichtzeiger den Anfangspunkt der Ablesung[1]) erreicht.

Es empfiehlt sich, zuerst die Anzeigen des Magnetometers aufzuschreiben, die einer Änderung der Thermokraft um jeweils 1 mV entsprechen und von 13 mV an in Intervallen von 0,4 mV. Der maximale Wert der Temperatur soll 380 bis 400°C oder am Millivoltmeter 15 mV nicht überschreiten.

Die Meßergebnisse werden graphisch dargestellt, wobei auf der Ordinatenachse die Auslenkung des Magnetometers aus der Anfangslage, die in erster Näherung der Magnetisierung des Körpers proportional ist, und auf der Abszissenachse die Temperatur in Graden aufgetragen werden. Die erhaltene Kurve besitzt einen Knickpunkt. Die Tangente an die Kurve in diesem Punkt ergibt bei ihrem Schnitt mit der Temperaturachse die angenäherte Temperatur der magnetischen Umwandlung.

Bei der Ausführung der Messung muß man darauf achten, daß nach der Bestimmung des Anfangspunktes der Ablesung und allgemein während der Messung die Stellung der Spule und des Versuchskörpers in ihr, relativ zum Magnetometer, nicht verändert wird.

Spezialliteratur

Siehe Literatur zu Aufgabe 48.

Aufgabe 52

Der Gleichstromgenerator und der Gleichstrommotor

Zubehör: 1. Gleichstromgenerator, 2. Gleichstrommotor, 3. Schalttafel.

Kurze Beschreibung des Aufbaus und der Wirkungsweise eines Gleichstromgenerators und eines Gleichstrommotors

Das Prinzip der Wirkungsweise. Der Arbeit der Dynamomaschinen, d. h. der mechanischen Generatoren (Erzeugern elektrischen Stromes), liegt die Erscheinung der elektromagnetischen Induktion zugrunde. Diese Erscheinung besteht darin, daß in einem Leiter, der sich in einem Magnetfeld

[1]) Tritt eine thermische Hysterese der magnetischen Eigenschaften in Erscheinung, so kehrt der Zeiger nicht ganz in die Ausgangsstellung zurück.

befindet, eine Spannung auftritt und ein elektrischer Strom jedesmal entsteht, wenn die Größe des Induktionsflusses, die die Kontur des Leiters durchsetzt, sich ändert. Die Größe der dabei induzierten Spannung E_{ind} wird durch die Geschwindigkeit der Änderung des Induktionsflusses, der vom Leiter umfaßt wird, bestimmt:

$$E_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

wobei Φ den Induktionsfluß bezeichnet.

Die Tätigkeit der Elektromotoren beruht auf dem Effekt der mechanischen Wirkung eines Magnetfeldes auf einen in ihm befindlichen Leiter, durch den ein elektrischer Strom fließt. Nach dem Biot-Savartschen Gesetz wirkt auf einen ebenen geschlossenen Leiter, der in einem homogenen Magnetfeld so angebracht ist, daß er sich um eine senkrecht zum Magnetfeld stehende Achse drehen läßt, ein Kräftepaar, dessen Moment ist

$$M = BSI \sin\alpha,$$

worin B die Dichte des Induktionsflusses in Gauß, I die Stromstärke, S die Windungsfläche und α der Winkel zwischen der Richtung der Kraftlinien und der Normalen der Windungsfläche bedeuten.

Der Aufbau eines Gleichstromgenerators und eines Gleichstrommotors

Der Generator. Ein Gleichstromgenerator besteht aus zwei Hauptteilen: dem unbeweglichen magnetischen System (Stator) und dem beweglichen Anker (Rotor), der auf irgendeine Art in gleichförmige Bewegung versetzt wird.

Die Aufgabe des magnetischen Systems ist es, ein für die Arbeit des Generators notwendiges, genügend starkes Magnetfeld zu schaffen, das die Wicklung des sich drehenden Generatorankers durchsetzt. Bei der Drehung des Ankers ändert sich die Größe des die Wicklung durchsetzenden Induktionsflusses, und es wird in der Wicklung eine Spannung induziert. Da ein genügend starker Induktionsfluß bekanntlich nur mit Hilfe eines Elektromagneten erzeugt werden kann, sind alle Generatoren (mit Ausnahme solcher von geringer Leistung, sogenannter Induktoren) mit einem Elektromagneten ausgerüstet.

Grob ausgedrückt, besteht das magnetische System aus einem Rahmen aus einer speziellen Eisensorte von hoher Permeabilität, in dessen Innerem die Pole mit den Wicklungen liegen. Zur Verkleinerung des Luftspaltes zwischen dem Anker und den Polen des Magneten wird die Oberfläche der Pole gewöhnlich durch besondere Polschuhe vergrößert, deren Form so gewählt wird, daß der Abstand zwischen ihnen und dem Anker klein ist (Abb. 129). Damit wird eine Verkleinerung der Streuung des den Anker durchsetzenden Induktionsflusses erreicht, was, wie wir im weiteren sehen werden, zur Vergrößerung der von der Maschine erzeugten Spannung führt. Zur Vergrößerung des Wirkungsgrades (zur Verkleinerung der Wirbelstromverluste, die sich besonders stark in Maschinen

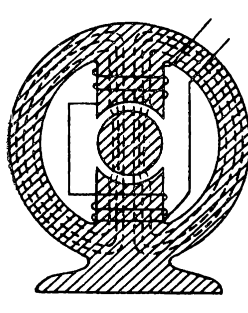


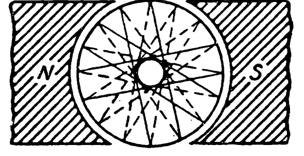
Abb. 129

hoher Leistung auswirken, bei denen sie sogar zu einer starken Erwärmung des Magneten führen können) wird der Magnet gewöhnlich nicht aus einem massiven Eisenstück gefertigt, sondern aus einzelnen Blechen zusammengesetzt, die voneinander durch dünne Zwischenlagen isoliert sind.

Die Zahl der Polpaare kann bei den Dynamomaschinen verschieden sein. In der vorliegenden Beschreibung beschränken wir uns nur auf Zweipol-Maschinen, die in dieser Aufgabe untersucht werden.

Das bewegliche System der Anker, in dessen Wicklung die Spannung induziert wird, besteht aus drei Teilen: der Wicklung, dem Kern und dem sogenannten Kollektor.

Die Trommelwicklung sitzt als Ganzes auf der Oberfläche des zylinderförmigen Kernes (Abb. 130). Es ist leicht einzusehen, daß bei einer solchen geschlossenen Wicklung der von jeder Windung umschlossene Induktionsfluß sich bei der Drehung des Ankers zwischen Null (die Fläche der Windung steht parallel zur Richtung der Kraftlinien) und der Größe des vollen Flusses (die Fläche der Windung steht senkrecht zu den Kraftlinien) durch den ganzen Anker ändert.



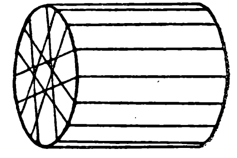


Abb. 130

Der Ankerkern muß unbedingt aus einem magnetischen Material von hoher Permeabilität gefertigt sein. Sonst wird der die Wicklung des Ankers durchsetzende Induktionsfluß, so stark die Magneten auch sein mögen, stets schwach sein, weil er nach allen Richtungen stark gestreut wird.

Um die Wirbelstromverluste herabzusetzen, wird der Ankerkern auch aus einzeln isolierten Blechen zusammengesetzt. Er sitzt auf einer Welle und läßt sich zwischen den Magnetpolen drehen. Um große Verluste bei der Ummagnetisierung zu vermeiden (denn die Richtung und die Größe des Induktionsflusses ändern sich dauernd in den einzelnen Teilen des Ankerkerns bei seiner Drehung), dient als Material für den Kern Weicheisen, das bekanntlich nur eine kleine Remanenz zeigt.

Die Verbindung zwischen der Ankerwicklung und dem äußeren Kreis kann durch Verbindung der Ableitungsdrähte der Wicklung mit zwei isolierten Ringen geschehen, die auf der Ankerwelle befestigt sind und auf denen elastische Kontaktplättchen, sogenannte Bürsten, gleiten. Eine Maschine kann jedoch mit einer solchen Einrichtung nicht als Gleichstromquelle dienen, weil der Induktionsfluß durch jede rotierende Windung sich nicht monoton ändert. Speziell ändert sich der Induktionsfluß bei gleichmäßiger Drehung einer Windung in einem homogenen Magnetfeld nach dem Sinusgesetz.

Folglich ruft, nach dem Induktionsgesetz, die an den Bürsten einer solchen Maschine auftretende Spannung einen Wechselstrom hervor. Wendet man jedoch einen Kommutator an, der die Enden der Ankerwicklung von einer Bürste auf die andere in dem Moment automatisch umschaltet, wenn die Spannung an den Enden der Wicklung durch Null geht (wonach sie ihr Vor-

zeichen ändern müßte), so können wir im äußeren Kreis eine pulsierende Spannung gleichen Vorzeichens erhalten. Bei einem entsprechenden Bau des Ankers können die Schwankungen der Spannung genügend klein gemacht werden, und wir können sie in der Praxis in vielen Fällen unbeachtet lassen und einen solchen Generator als Gleichstromquelle auffassen.

Es ist leicht einzusehen, daß in dem uns interessierenden Fall einer zweipoligen Maschine sich das Vorzeichen der Spannung in jeder Windung jedesmal in dem Moment ändert, wenn die Windungsfläche mit der Ebene AB (Abb. 131), die zu den Polen symmetrisch liegt und senkrecht auf den Kraftlinien steht, zusammenfällt. Diese Ebene heißt *neutrale Zone*, weil in der

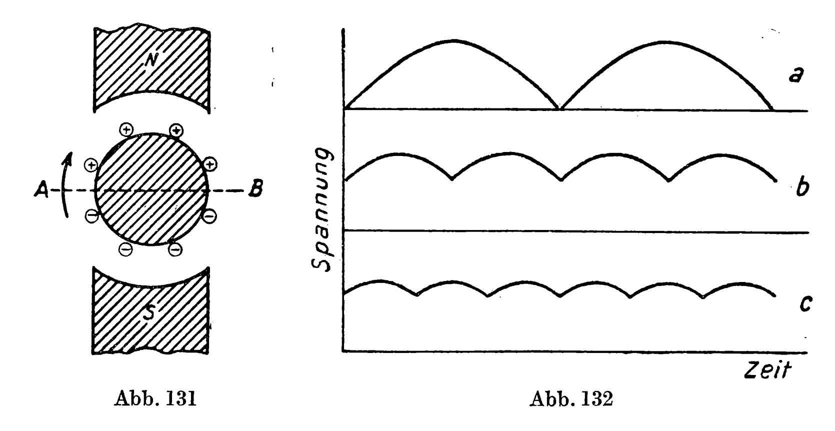


Abb. 131 Abb. 132

parallel zu ihr liegenden Windung keine Spannung induziert wird, da in diesem Moment der Induktionsfluß zwar seinen Maximalwert erreicht, seine Änderung aber gleich Null ist.

Beachten wir das Gesagte, so können wir die Ankerwicklung in zwei gleiche Teile teilen, die zu beiden Seiten der neutralen Zone liegen und in denen die Spannung stets das entgegengesetzte Vorzeichen besitzt. (Dieses Vorzeichen hängt von der Lage der Pole und der Drehrichtung des Ankers ab; siehe Abb. 131.) Wenn man deshalb anstatt der vollen Ringe eine Einrichtung, die aus zwei voneinander isolierten Halbringen besteht, den sogenannten Kollektor, benutzt, so erhält man, wenn man die Bürsten auf der neutralen Zone anordnet, in dem äußeren Kreis einen Strom gleicher Richtung, weil die Spannung an den Bürsten nun ihr Vorzeichen nicht ändert. Das geschieht deshalb, weil gleichzeitig mit der Änderung des Vorzeichens der Spannung in den Windungen der Ankerwicklung ein Umschalten der Enden von der einen Bürste auf die andere erfolgt.

Die Änderung der Spannungshöhe an den Bürsten ist in dem betrachteten Fall sehr groß, und seine graphische Darstellung gleicht einer gleichgerichteten Sinuskurve (Abb. 132, a). Dabei erreicht die Spannung ein Maximum, wenn die Enden der Wicklung auf der neutralen Zone liegen, und ist gleich Null, wenn die Enden senkrecht zur neutralen Zone liegen (in diesem Fall werden

beide Enden der Halbringe kurzgeschlossen; jedoch ist die Spannung, unabhängig davon, zwischen ihnen fast Null, weil die Spannungen in den einzelnen auf beiden Seiten der neutralen Zone liegenden Teilen der Wicklung sich kompensieren). Um die großen Spannungsschwankungen zu verkleinern, geht man zur Teilung sowohl der Wicklung als auch des Kollektors über. Die Enden jeder Teilwicklung werden mit den entsprechenden Kollektorlamellen verbunden, deren Anzahl gleich der der Teilwicklungen ist.

Eine solche Verbindung ist im Falle einer Trommelwicklung in Abb. 133 dargestellt, worin die Pfeile die Stromrichtung angeben. (Zur Vereinfachung ist hier nur eine Wicklungsschicht angeführt, wobei jeder Teilwicklung eine Windung entspricht. In der Praxis werden im allgemeinen mehrschichtige Wicklungen verwendet, dabei enthält jede Teilwicklung eine große Zahl von Windungen. Doch gelten hierfür genauso alle angestellten Überlegungen.)

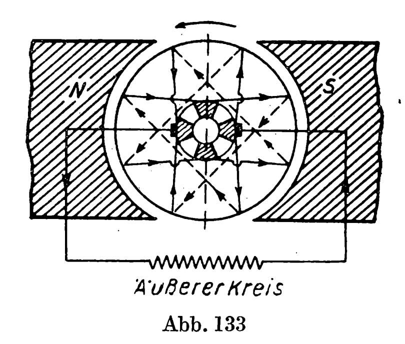


Abb. 133

Da die einzelnen Teilwicklungen des Ankers hinsichtlich der Bürsten hintereinandergeschaltet sind, ist die volle Spannung der Maschine gleich der Summe aus den in den Teilwicklungen erzeugten Spannungen. Deshalb ist die Spannung an den Bürsten der Dynamomaschine, deren Ankerwicklung geteilt ist, gleich der Summe aus einer bestimmten Zahl von sinusförmigen Halbwellen, die in der Phase gegeneinander verschoben sind. Sowohl die Zahl der Halbwellen als auch die Phasenverschiebungen werden durch die Zahl der Teilwicklungen bestimmt. Für vier Teilwicklungen erhalten wir vier sinusförmige Halbwellen, die, relativ zueinander, um den Winkel $\frac{2\pi}{4}$, für sechs Teilwicklungen sechs Halbwellen, die um den Winkel $\frac{2\pi}{6}$ usw. verschoben sind. Die resultierende Spannung ergibt sich in allen Fällen als die Summe dieser sinusförmigen Halbwellen. In Abb. 132, b und c sind die Spannungen eines Generators mit vier bzw. sechs Teilwicklungen des Ankers dargestellt. Wie man aus dieser Abbildung sieht, nimmt die Größe der Schwankung sehr stark mit der Unterteilung der Ankerwicklung ab. Um jedoch eine genügend konstante Spannung zu erhalten, muß man eine sehr große Zahl von Teilwicklungen benutzen, die in einigen Maschinen bis zu hundert und mehr beträgt.

Für ein richtiges Arbeiten des Generators müssen die Bürsten, unabhängig vom Wicklungstyp des Ankers, stets mit den Windungen verbunden sein, die in der neutralen Zone liegen.

Ein Herausrücken der Bürsten aus der neutralen Zone führt zur Verkleinerung der von der Maschine erzeugten Spannung. Das rührt daher, daß die Generatorspannung in jedem vorgegebenen Moment, unabhängig von der Stellung und vom Ankertyp, gleich der Summe der in allen Windungen einer der beiden parallelen Zweige (in die die Ankerwicklung geteilt ist) her-

vorgerufenen Spannung ist. Folglich nimmt die Spannung ihren Maximalwert an, wenn die Bürsten in der neutralen Zone liegen, weil dann alle sich addierenden Spannungen das gleiche Vorzeichen besitzen. Außerdem führt ein Herausrücken der Bürsten zu starker Funkenbildung unter den Bürsten, wenn sie von einer Kollektorlamelle zur nächsten übergehen, was natürlich unerwünscht ist. Schließlich müssen wir noch bemerken, daß die durch die Ankerwicklung fließende Stromstärke immer halb so groß ist wie die Stromstärke im äußeren Kreis, weil die Ankerwicklung durch die Bürsten stets in zwei parallele Zweige geteilt wird (siehe Abb. 133).

Alles bisher Gesagte gilt für zweipolige Generatoren. Wie schon bemerkt, werden häufig mehrere Polpaare bei Maschinen verwendet. Ohne diese Maschinen näher zu beschreiben, müssen wir bemerken, daß unter sonst gleichen Bedingungen die Erhöhung der Zahl der Polpaare letzten Endes zur Vergrößerung der Leistung eines Generators führt. Dabei kann eine mehrpolige Maschine, im Vergleich zu einer zweipoligen, bei gleichen Umdrehungsgeschwindigkeiten, gleicher Windungszahl der Ankerwicklungen und gleicher Stärke des gewickelten Drahtes, entweder eine höhere Spannung oder einen größeren Strom abgeben, ohne sich der Gefahr einer Überlastung der Wicklung auszusetzen. Das läßt sich dadurch erklären, daß in den Teilen der Ankerwicklung, die symmetrisch zu den Polen gleichen Vorzeichens liegen, die gleichen Spannungen induziert werden. Schalten wir diese Teilwicklungen hintereinander oder parallel, so erhalten wir die angegebenen Resultate.

Die Erregung. Es wurde schon darauf hingewiesen, daß zur Erzeugung einer Spannung im Generator der Anker in einem Magnetfeld laufen muß, d. h., daß die Elektromagneten erregt werden müssen, die dieses Magnetfeld erzeugen. Aus diesem Grunde muß man gleichzeitig den Anker in Drehung versetzen und durch die Polwicklungen des Generators einen Strom schicken. Das kann durch Anschließen der Polwicklungen, also der Erregerspulen, an eine eigene Stromquelle verwirklicht werden. In diesem Fall erhalten wir eine Maschine mit konstanter oder unabhängiger Erregung.

Eine Fremderregung ist jedoch nicht unbedingt notwendig, sondern man läßt die Maschine ohne fremde Stromquelle arbeiten, indem man durch die Erregerspulen einen vom Generator selbst erzeugten Strom fließen läßt. Natürlich wird eine solche Selbsterregung nur möglich, wenn die Pole einen Restmagnetismus aufweisen, der beim Anlassen der Maschine einen, wenn auch nur kleinen, induzierten Strom erzeugt. Bei der Selbsterregung wird die Polwicklung an die Bürsten entweder zum äußeren Kreis parallel- oder hintereinandergeschaltet. Im ersten Fall erhalten wir einen *Nebenschlußgenerator* (Abb. 134) und im zweiten einen *Reihenschlußgenerator* (Abb. 135). Die Erregerspule des Nebenschlußgenerators wird zur Beschränkung der Stromstärke im Erregerkreis (bei einem sehr starken Strom im Erregerkreis würde Energie zur Erwärmung der Erregerspule nutzlos verbraucht werden und zu einem Spannungsabfall an den Klemmen der Maschine führen) aus einer großen Zahl von Windungen gefertigt und besitzt einen hohen Widerstand. Beim Reihenschlußgenerator wird die Erregerspule zur Verhinderung eines Spannungsabfalls innerhalb der Maschine umgekehrt mit einem sehr kleinen Widerstand gefertigt (um den Spannungsabfall an dieser Spule so

klein wie möglich zu halten). Außer den angegebenen Möglichkeiten kann man auch eine parallele und eine hintereinandergeschaltete Erregung kombinieren. Dabei werden auf die Pole zwei Spulen gewickelt: die eine, von hohem Widerstand, wird zum äußeren Kreis parallel-, die andere, vom kleinen Widerstand, mit dem äußeren Kreis hintereinandergeschaltet. Maschinen eines solchen Typs werden *Doppelschluß- oder Compoundgeneratoren* genannt.

Größere Verbreitung haben in der Technik die Nebenschlußgeneratoren gefunden, weil ihre Spannung in genügendem Maße von der Größe der Belastung unabhängig ist. Der Reihenschlußgenerator wird nur in Ausnahmefällen verwendet. Weil die Erregerwicklung dabei mit dem äußeren Kreis hintereinandergeschaltet ist, ändert sich die Größe des erregenden Magnetfeldes und damit

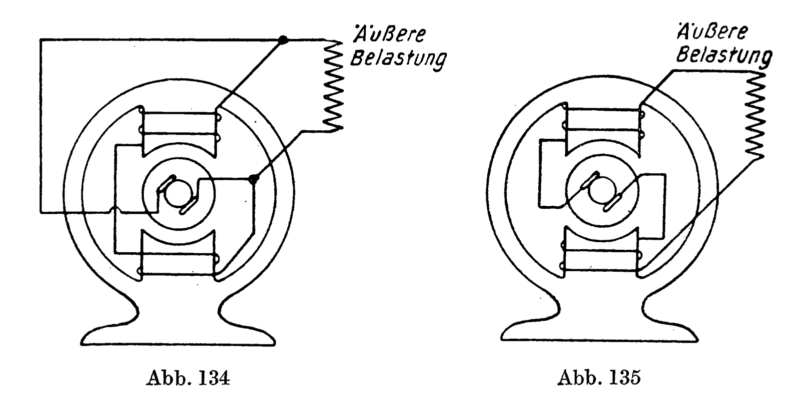


Abb. 134 Abb. 135

die von der Maschine erzeugte Spannung mit der Änderung des Widerstandes des äußeren Kreises (d. h., sie hängt stark von der Größe der Belastung ab).

Beim Anlassen des Generators mit Selbsterregung muß man auf die Richtung des Restmagnetismus der Pole achten. Die Drehung des Ankers muß in solcher Richtung erfolgen, daß der im Anker durch den Restmagnetismus entstehende Strom in der Polwicklung diesen Restmagnetismus verstärkt. Im umgekehrten Fall werden die Pole vollständig entmagnetisiert, und es findet keinerlei Erregung statt.

Der Motor. Der Elektromotor wurde im Jahre 1839 durch die Arbeiten des hervorragenden Physikers und Elektrotechnikers, des Petersburger Akademiemitgliedes B. S. JACOBI erschaffen[1]).

Wenn wir an die Bürsten des Generators, dessen Magnetfeld auf irgendeine Art erzeugt wird, eine Gleichspannung anlegen, so greift an jedem diametral liegenden Leiterpaar ein Kräftepaar an, weil die Ströme in diesen Leitern der Größe nach stets gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Dieses Kräftepaar erteilt den Leitern eine Drehbewegung und versetzt damit den ganzen Anker

[1]) Anm. d. Übers.: PIXII und RITCHIE gaben unabhängig voneinander 1832 Konstruktionen an, aus denen sich die sogenannten „magnetoelektrischen Maschinen“ entwickelten (Näheres siehe MÜLLER-POUILLET: Lehrbuch der Physik, Braunschweig 1932, Bd. IV, 1).

in Drehung. Auf diese Weise läßt sich der Gleichstromgenerator umkehren, d. h., man kann ihn eine Arbeit verrichten lassen.

Wenn auch das Drehmoment, das auf jedes Windungspaar einwirkt, sich mit der Drehung des Ankers ändert und dann verschwindet, wenn die Windungen in der neutralen Zone stehen (Abb. 136), hat das auf den Anker wirkende Gesamtmoment bei genügend großer Windungszahl einen bestimmten, fast konstanten Wert während der ganzen Drehung. Es ist leicht einzusehen, daß das Drehmoment bei der Drehung des Ankers sich um so weniger ändert, je mehr Teilwicklungen der Anker besitzt. Der mittlere Wert des Moments hängt bei einer Umdrehung von der Stellung der Bürsten ab und erreicht seinen Maximalwert, wenn sie in der neutralen Zone liegen. Die Drehrichtung des Ankers wird durch die Kraftlinien des Magnetfeldes und die Richtung des Stromes, der dem Anker zugeführt wird, bestimmt. Sie ändert sich folglich nicht, wenn beides gleichzeitig geändert wird.

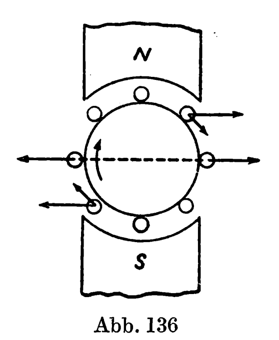


Abb. 136

Die Zahl der Umdrehungen des Ankers hängt im allgemeinen, wie wir noch sehen werden, von der Größe der angelegten Spannung und von der Belastung ab. Ist keine Belastung vorhanden, wird sie dadurch bestimmt, daß die bei der Drehung des Ankers im Magnetfeld induzierte Spannung, die nach der Lenzschen Regel der angelegten Spannung entgegengerichtet ist, ungefähr die Größe der angelegten Spannung erreicht. Deshalb wird nur ein geringer Strom für den Leerlauf des Motors benötigt. Bei Belastung fällt die Geschwindigkeit des Motors, die entgegengerichtete Spannung nimmt ab, und die Maschine verbraucht mehr Strom.

Genauso wie bei den Generatoren unterscheidet man nach der Schaltung der Polwicklungen Motoren mit Nebenschluß-, Reihenschluß- und Doppelschluß- (Compound-) Erregung. Der Einfluß der Belastung wirkt sich am wenigsten auf die Umdrehungsgeschwindigkeit des Nebenschluß- und des Doppelschlußmotors aus (besonders günstige Ergebnisse im Sinne einer Verkleinerung des Einflusses der Belastung erhält man mit Motoren des letzteren Typs).

Die Umdrehungsgeschwindigkeit des Reihenschlußmotors wird vollständig durch die Größe der Belastung bestimmt und läßt sich folglich in weiten Grenzen verändern. Das benutzt man zur Regulierung des Ganges der Gleichstrommotoren, besonders solcher, die in Servomechanismen verwendet werden.

Ebenso wird die Reihenschlußerregung in Motoren verwendet, von denen eine große Anfangsleistung verlangt wird, wie z. B. bei Straßenbahnmotoren. Der starke Strom in der Erregerspule erzeugt, solange die entgegengerichtete Spannung des langsam rotierenden Ankers noch klein ist, ein starkes Magnetfeld und ein großes auf den Anker des Motors wirkendes Drehmoment. Die Umdrehungsgeschwindigkeit der Motoren mit Nebenschlußerregung kann durch Änderung der Stromstärke in der Erregerspule reguliert werden.

Da der Widerstand der Ankerspule klein ist (was zur Erreichung eines hohen Wirkungsgrades notwendig ist), werden die Motoren mit Hilfe von Vorwiderständen (Anlassern) angelassen. Ohne diese könnte gleich nach dem Einschal-

ten, solange sich noch der Anker langsam dreht und die entgegengerichtete Spannung noch keinen genügend hohen Wert erreicht hat, durch die Ankerwicklung ein sehr starker Strom fließen und diese Wicklung durchbrennen.

Zum Schluß müssen wir bemerken, daß die Lage der neutralen Zone, von der oben die Rede war, angegeben worden ist, ohne den Einfluß des von der Ankerwicklung erzeugten Magnetfeldes auf die Verteilung des Magnetfeldes der Maschine zu berücksichtigen. Denn das resultierende Magnetfeld der Maschine wird nicht nur durch das von den Polen erzeugte Feld, sondern auch durch das Magnetfeld des Ankers selbst bestimmt (dieses Feld entsteht, wenn durch die Ankerwicklung ein Strom fließt). Wenn man diese *Ankerreaktion* berücksichtigt, so ergibt es sich, daß die neutrale Zone des belasteten Generators etwas in Bewegungsrichtung verschoben ist. Bei Motoren verschiebt sie sich entgegen der Bewegungsrichtung. Natürlich ändert sich die Verschiebung der neutralen Zone mit der Änderung der Belastung. Aus diesem Grunde wird die Stellung der Bürsten gewöhnlich so gewählt, daß sie einer bestimmten mittleren Belastung für die gegebene Maschine entspricht.

Kurze Theorie. Wir klären nun den Charakter der wechselseitigen Abhängigkeit der wesentlichen physikalischen Größen, die die Arbeit des Generators und des Motors bestimmen.

Die induzierte Spannung, die Spannung an den Klemmen, die Leistung und der Wirkungsgrad eines Gleichstromgenerators. Wie schon dargelegt, wird die Ankerwicklung einer zweipoligen Maschine bei der Drehung des Ankers in zwei parallele Zweige unterteilt. Folglich ergibt sich die Größe der induzierten Spannung des Generators als die Summe der Spannungen, die in der halben Windungszahl der Ankerwicklung induziert werden. Sind die Bürsten richtig angeordnet, so kann die Berechnung der Größe der Spannung auf folgende Weise geschehen:

Wenn wir den mittleren Wert der Spannung, die in jeder Windung induziert wird, mit e_{mittel} bezeichnen, so ist die erzeugte Gesamtspannung der Maschine

$$E = \frac{n}{2} \cdot e_{\text{mittel}},$$

wobei n die Windungszahl der Ankerwicklung bedeutet.

Die Spannung in jeder Wicklung wird nach dem Induktionsgesetz ausgedrückt durch:

$$e = -\frac{d}{dt}(\Phi \cos \omega t) = \Phi \omega \sin \omega t,$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit der Ankerdrehung und Φ der Induktionsfluß durch den Windungsquerschnitt bedeuten. Der Mittelwert dieser Größe (wenn man ihr stets das gleiche Vorzeichen zuschreibt, weil durch die Wirkung des Kollektors die Spannung im äußeren Kreis ihr Vorzeichen nicht ändert) ist

$$e_{\text{mittel}} = \Phi \omega \frac{2}{\pi} = 4 \Phi N,$$

wobei $N = \frac{\omega}{2\pi}$ die Zahl der Ankerumdrehung je sec bedeutet. Daraus erhält man für die mittlere Spannung der Maschine den Wert

$$E = \frac{n}{2} 4 \Phi N = 2 \Phi N n$$

oder in praktischen Einheiten, wenn Φ in Maxwell[1]) ausgedrückt wird,

$$E = 2\Phi N n 10^{-8} \text{ Volt.} \qquad (1)$$

Die Formel zeigt, daß die Spannung der Maschine der Zahl der Ankerumdrehungen je sec N und der Größe des Flusses Φ proportional ist. Da Φ mit Hilfe von Elektromagneten erzeugt wird, kann man die Gleichung (1) umformen, wenn man Φ als Funktion des Erregerstromes ausdrückt, in

$$E = C\frac{NnBS}{10^8},$$

wobei B die Induktion (die Kraftflußdichte des Magnetfeldes) und S den Querschnitt des Flusses bezeichnen. Hieraus folgt: Wenn die Geschwindigkeit der Maschine konstant ist, dann ist

$$E = C_1 B,$$

d. h., die Spannung der Maschine ist der Induktion des Erregerfeldes proportional. Die Induktion ist ihrerseits eine Funktion des Erregerstromes $\varphi(i)$ (Magnetisierungskurve). Deshalb erhält man endgültig:

$$E = C_1 \varphi(i). \qquad (2)$$

Die graphische Darstellung dieser Funktion ist der Magnetisierungskurve analog. In dem Gebiet, das weit von der Sättigung entfernt liegt und das wir gerade zur Prüfung der erhaltenen Beziehungen benutzen wollen, kommt die Abhängigkeit der Spannung von dem Erregerstrom einer Geraden sehr nahe.

Die Spannung an den Klemmen des Generators (wie auch jeder Stromquelle) fällt der Größe nach nur in dem Fall mit der induzierten Spannung zusammen, wenn sein äußerer Kreis geöffnet ist. Andernfalls ist sie stets um den Spannungsabfall an der Ankerwicklung kleiner als die induzierte Spannung. Deshalb ist die Klemmenspannung U gleich:

$$U = E - RI, \qquad (3)$$

wobei I die Stromstärke im äußeren Kreis und R der Ankerwiderstand[2]) bedeuten.

Die Leistung und der Wirkungsgrad. Als *Nutzleistung* eines Stromgenerators wird das Produkt aus der Klemmenspannung U und der Stromstärke I im Verbraucherkreis (äußerer Kreis) bezeichnet.

Das Verhältnis der Nutzleistung, die man vom Generator erhält, zur mechanischen Leistung P_m, die man zu seiner Arbeit aufwenden muß, heißt der *Wirkungsgrad*:

$$\eta = \frac{UI}{P_m}. \qquad (4)$$

Der Wirkungsgrad hängt ab von der Stromstärke, die die Maschine abgibt, oder, wie man sagt, von der Belastung. Den größten Wirkungsgrad erreicht eine Maschine bei normaler Belastung, für die sie berechnet ist. Bei Unterbelastung verzehren die in jeder Maschine unvermeidlichen Reibungs-, Wirbelstrom- und Hystereseverluste einen hohen Prozentsatz der zugeführten

---

[1]) Anm. d. Übers.: $1\,\text{M} = 1\,\text{cm}^{3/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{sec}^{-1}$; $1\,\text{Weber} = 10^8\,\text{M}$.

[2]) Siehe Anmerkung auf S. 269.

Leistung. Dafür steigen bei Überbelastung wegen der großen Ströme die Wärmeverluste in der Ankerwicklung an.

In der Regel nimmt der Wirkungsgrad einer Maschine mit der Erhöhung seiner Leistung zu. Dabei muß man unter der Leistung der Maschine die der normalen Belastung der Maschine entsprechende Leistung verstehen, bei der der Wirkungsgrad sein Maximum erreicht. Gewöhnlich wird diese Leistung in dem Begleitschein der Maschine oder auf ihrer Verkleidung neben der Angabe des maximal zulässigen Stromes im Anker vermerkt. Der Wirkungsgrad erreicht 95 % für Maschinen hoher Leistungen (bis 100 kW) und geht herunter bis zu 60 bis 70 % für Maschinen geringer Leistung (ungefähr 1 kW).

Gegenspannung, Stromstärke im Anker, Umdrehungszahl, Leistung und Wirkungsgrad eines Motors. Bei der Drehung des Ankers eines Motors im Magnetfeld der Pole wird in ihm eine Spannung induziert, die der angelegten Spannung nach der LENZschen Regel entgegengerichtet ist. Deshalb ist die Stromstärke im Anker gleich

$$I = \frac{V - E_0}{R}, \tag{5}$$

wobei E_0 die Gegenspannung, V die angelegte Spannung und R der Widerstand des Ankers[1]) bedeuten.

Setzen wir in (5) den für den Generator früher erhaltenen Ausdruck für E_0 ein, so erhalten wir:

$$I = \frac{V - N n \Phi 10^{-8}}{R},$$

daraus folgt, daß

$$N = \frac{V - IR}{n \Phi 10^{-8}}.$$

Weil gewöhnlich der Widerstand R der Ankerwicklung klein ist, ist auch IR im Vergleich zu V klein. Im Falle des Leerlaufs ist die Stromstärke ebenfalls klein, so daß wir immer rechnen können, daß

$$N = \frac{V}{n \Phi \, 10^{-8}}, \tag{6}$$

d. h., daß die Umdrehungszahl des Ankers der an den Bürsten angelegten Spannung proportional und dem Erregerfluß umgekehrt proportional ist. Bei den Änderungen von Φ entspricht das einer umgekehrt proportionalen Abhängigkeit der Größe N von dem Erregerstrom.

Die Formel (5) zeigt, daß in dem Moment des Anlassens des Motors oder bei seiner plötzlichen Bremsung die Stromstärke im Anker stark zunimmt. Aus diesem Grunde muß ein Motor, besonders ein Nebenschlußmotor, um das Durchbrennen der Wicklung zu vermeiden, mit Hilfe eines Widerstandes angelassen werden. Der Anlasser wird mit dem Anker in Reihe geschaltet und je nach der benötigten Umdrehungszahl des Motors herausgenommen.

Das Verhältnis der mechanischen Leistung, die an der Welle des Motors entnommen werden kann, zu der den Klemmen des Rotors zugeführten elektrischen Leistung, heißt der *Wirkungsgrad des Elektromotors.*

---

[1]) Unter dem Widerstand des Ankers muß man den gesamten Widerstand zwischen den Bürsten verstehen. Er ist zusammengesetzt aus dem Kontaktwiderstand der Bürsten und dem Widerstand der Wicklung.

Alles über den Wirkungsgrad des Generators Gesagte kann man vollständig auch auf den Elektromotor übertragen.

Die elektrische Leistung des Motors kann ausgedrückt werden als das Produkt aus der Gegenspannung und der Stärke des Stromes, der durch den Anker fließt, d. h.

$$P = E_0 I.$$

Beachtet man, daß die Arbeit bei einer Drehbewegung während einer gewissen Zeitdauer Δt gleich dem Produkt aus dem Drehmoment und dem Winkel $\Delta\alpha$ ist, so kann man leicht das Drehmoment des Motors erhalten. Denn es gilt:

$$P = E_0 I = M \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}.$$

Hierin ist M das gesuchte Moment und $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \omega$ die Winkelgeschwindigkeit, die gleich $2\pi N$ ist (N ist die Zahl der Ankerumdrehungen pro Sekunde). Hieraus folgt, daß

$$M = \frac{E_0 I}{\omega},$$

oder man erhält, wenn man den Ausdruck für E_0 und ω beachtet, endgültig:

$$M = \frac{C\Phi N n 10^{-8} I}{2\pi N} = \frac{Cn}{2\pi 10^8} \Phi I. \tag{7}$$

Wenn Φ in Maxwell und I in Ampere ausgedrückt wird, so erhält man das Drehmoment in Joule. Die Formel zeigt, daß das Drehmoment nicht von der Umdrehungsgeschwindigkeit des Ankers abhängt. Es ist der Stromstärke im Anker und dem Erregerfluß und damit auch dem Erregerstrom proportional.

Die Prüfung der in diesem Abschnitt erhaltenen Ausdrücke stellt den experimentellen Teil der Aufgabe dar.

Als Versuchsobjekte dienen ein zweipoliger Motor mit Nebenschlußerregung und ein zweipoliger Generator (Dynamomaschine) mit unabhängiger Erregung.

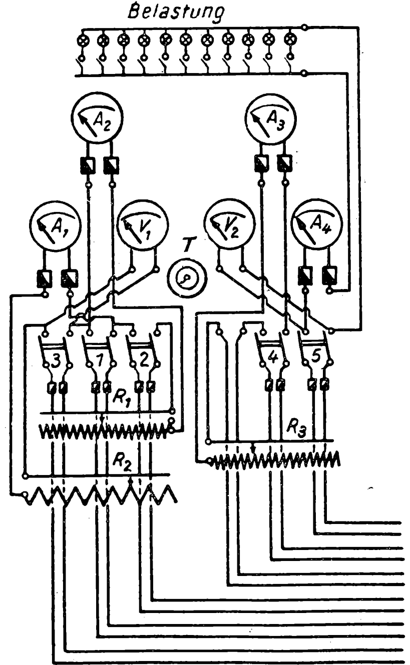


Abb. 137

Die Beschreibung der Anordnung. Die Anordnung besteht aus einem Motor und einem Stromgenerator (Dynamo), die entweder durch eine gemeinsame Welle oder durch einen Treibriemen verbunden sind, sowie einer Schalttafel mit Verteilern, Widerständen und Hebelschaltern. Die vordere Ansicht der Tafel (Abb. 137) ist in zwei Teile unterteilt. Auf der einen Seite liegen die Geräte, die in den Kreis des Motors geschaltet werden: das Amperemeter A_1 und das Voltmeter V_1 des Ankerkreises, das Milliamperemeter A_2 des Erregerkreises, der Widerstand des Erregerkreises R_1 und der Anlasser R_2 sowie die Hebelschalter (1, 2, 3), durch die die Anker- und die Erregerwicklungen mit einer Gleichstromquelle verbunden werden. Auf der anderen Hälfte der Tafel liegen der Widerstand R_3 und das Amperemeter A_3 des Erregerkreises des Generators, das Voltmeter V_2 und das Amperemeter A_4, die in den Ankerkreis des Generators geschaltet sind, und zwei Hebelschalter (4 und 5), von denen der eine den Erregerkreis mit der Gleichstromquelle und der andere die Ankerwicklung mit dem äußeren Kreis (der eingeschalteten Belastung) verbindet. In der Mitte der Tafel liegt das Tachometer T (die Anzeige der Umdrehungszahl pro sec), das mit der Welle des Motors durch eine biegsame Welle verbunden ist. Der prinzipielle Aufbau eines Tachometers ist in Abb. 138 dargestellt. Wie man aus dieser Abbildung sieht, ist es analog dem gewöhnlichen Zentrifugalregler aufgebaut. Die Achse *1* wird mit der Welle verbunden, deren Umdrehungsgeschwindigkeit gemessen werden soll. Bei der Drehung der Welle wird die Muffe *2* gehoben und ruft eine Drehung des Hebels *3* um die Achse *4* hervor. Die Verschiebung des Hebels führt zur Zeigerauslenkung des Gerätes. Die Feder *5* bewirkt, daß das Anheben der Muffe *2* und damit die Drehung des Zeigers stets der Drehgeschwindigkeit der Welle *1* entspricht. Dieser Tachometertyp trägt die Bezeichnung *Zentrifugaltachometer*.

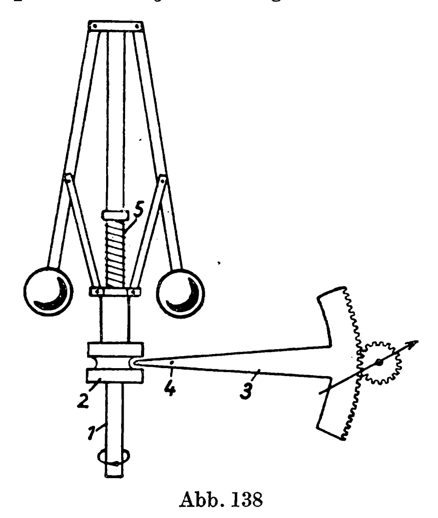


Abb. 138

Auf der Rückseite der Tafel sind die Belastungswiderstände angebracht, die in den Ankerkreis geschaltet werden. Als Belastung wird eine Reihe von Widerständen verwendet, die einzeln und gruppenweise eingeschaltet werden können. Jeder Kreis enthält Sicherungen, die ebenfalls auf der Tafel neben den entsprechenden Hebelschaltern und elektrischen Meßgeräten angebracht sind.

Übung 1

Das Anlassen und das Anhalten des Aggregats

Um das Aggregat in Tätigkeit zu setzen, läßt man zuerst den Motor an. Das Anlassen des Motors geschieht auf folgende Weise:

Zuerst schließt man den Hebelschalter *1* (Abb. 137) und legt damit eine Gleichspannung an den Kreis, dann schaltet man durch Schalter *2* den Erregerkreis ein und stellt mit Hilfe des Widerstandes R_1 den größtmöglichen Erregerstrom ein. Danach schließt man den Hebelschalter *3* des Ankers bei vollem Widerstand R_2 des Anlassers und nimmt langsam den Widerstand heraus, bis die Umdrehungszahl des Ankers den auf dem Motor angegebenen normalen Wert erreicht.

Da gleichzeitig mit dem Anlassen des Motors auch der Anker des Generators in Drehung versetzt wird, hat man, um den Generator in Tätigkeit zu setzen, nur noch den Erregerstromkreis zu schließen. Das erreicht man durch Schließen des Hebelschalters *4* bei maximal hereingenommenem Widerstand R_3. Dann schließt man den Schalter *5*, nimmt allmählich den Widerstand R_3 heraus und vergrößert damit den Erregerstrom, bis die Spannung am Anker des Generators ihren normalen Wert erreicht, der an seiner Verkleidung angegeben ist.

Die Belastung des Generators geschieht durch Einschalten einer Anzahl von Widerständen (Belastungswiderständen) in den Ankerkreis.

Das Anhalten muß unbedingt in umgekehrter Reihenfolge vorgenommen werden: Zuerst öffnet man den Hebelschalter *5* und unterbricht damit den Strom im Anker des Generators, dann nimmt man den Widerstand R_3 vollständig herein und unterbricht durch Schalter *3* den Ankerkreis des Motors. Endlich unterbricht man die Erregerwicklung (Schalter *2*).

Nach Beendigung des Versuches muß der Hebelschalter *1* geöffnet werden.

Übung 2

Die Aufnahme der Charakteristik des Motors

Als Leerlauf-Charakteristik wird entweder die Abhängigkeit der Umdrehungszahl des Ankers von der Spannung an den Bürsten des Motors $N = N\,(V_{\text{Anker}})$ bei konstantem I_{Err} oder die Abhängigkeit der Umdrehungszahl von der Erregerstromstärke $N = N\,(I_{\text{Err}})$ bei konstantem V_{Anker} bezeichnet.

Die Aufnahme der Charakteristiken geschieht auf folgende Weise: Man läßt den Motor an (siehe Übung 1), ändert bei ausgeschaltetem Generator (Leerlauf des Motors) die Spannung an den Bürsten (mit Hilfe des Anlassers), wobei man den Erregerstrom konstant hält, und liest stets die entsprechende Umdrehungszahl des Ankers ab. Dann ändert man den Erregerstrom, wobei man die Spannung am Anker konstant hält, und liest ebenfalls die Umdrehungszahl des Ankers am Tachometer ab. Diese Ablesungen werden graphisch aufgetragen: auf der Ordinatenachse die Umdrehungszahl und auf der Abszissenachse in dem einen Fall die Ankerspannung, im anderen die Stärke des Erregerstromes. Damit prüft man die Richtigkeit der Formel (6).

H i n w e i s. Die Aufnahme der Abhängigkeit der Umdrehungszahl des Ankers von der Ankerspannung muß bei einem Erregerstrom von 0,250 A aufgenommen werden. V_{Anker} wird zwischen 40 und 110 V verändert.

(Wenn bei einer Ankerspannung von 40 V der Anker nicht in Drehung versetzt wird, muß man, um die Reibung zu überwinden, zuerst eine höhere Spannung und dann erst die Spannung von 40 V einstellen.)

Übung 3

Die Aufnahme der Charakteristiken eines Stromgenerators

Als Charakteristik eines Stromgenerators wird die Abhängigkeit seiner Spannung entweder von der Umdrehungszahl $E = E(N)$ oder von der Stärke des Erregerstromes $E = E(I_{\text{Err}})$ bezeichnet. Um diese Charakteristiken zu erhalten, wird die Abhängigkeit der Spannung an den Bürsten des nicht belasteten Generators (Leerlaufcharakteristik) einmal von der Umdrehungszahl des Ankers bei unverändertem Erregerstrom und zum anderen von der Größe des Erregerstromes bei konstanter Umdrehungszahl gemessen. Die Ergebnisse werden graphisch dargestellt. Der Gang der Kurven wird mit dem theoretischen Verlauf verglichen.

Hinweis. Die Änderung der Umdrehungszahl des Generators geschieht entweder durch Änderung des Erregerstromes des Motors oder durch Änderung der Spannung am Anker des Generators.

Da in der vorliegenden Anordnung die Anzeige des Tachometers die Umdrehungszahl des Motorankers angibt, muß man zur Bestimmung der Umdrehungszahl des Generatorankers die Anzeige des Tachometers mit 0,508 multiplizieren. Diese Zahl drückt das Verhältnis der Durchmesser der Scheiben des Motors und des Generators aus. Für die Aufnahme der Charakteristiken muß die Umdrehungszahl des Generators zwischen 500 und 1400 je Minute variiert werden.

Man muß beachten, daß bei der Bestimmung der Abhängigkeit der Spannung des Generators vor dem Erregerstrom eine Hysterese auftritt. Deshalb empfiehlt es sich, bei der Aufnahme dieser Charakteristik den Erregerstrom in einer Richtung (sagen wir, in Richtung einer Zunahme) zu verändern. Er wird zwischen 0 und 8 A geändert.

Übung 4

Die Bestimmung des Wirkungsgrades des ganzen Aggregates. Der Wirkungsgrad des ganzen Aggregates wird auf folgende Weise bestimmt: Man belastet den Generator mit einer Reihe von Widerständen und berechnet die Nutzleistung P_N, die der Generator abgibt, die für die Erregung benötigte Leistung P_E und endlich die dem Motor zugeführte Leistung, die gleich

$$P = V_A I_A + V_E I_E$$

ist, wobei V_A und I_A die an den Motor angelegte Spannung bzw. die Stromstärke im Anker und V_E und I_E die analogen Größen für den Erregerkreis des Motors bedeuten. Es gilt $V_E = V_A$, weil der Anker- und der Erregerkreis von einer Quelle gespeist werden. Den Wirkungsgrad findet man als das Verhältnis

$$\frac{P_N}{P_E + P}.$$

Der Wirkungsgrad wird für verschiedene Größen der Belastung des Generators gemessen, d. h. für verschiedene Stromstärken im Ankerkreis. Die

Messungen werden für die normale Umdrehungszahl durchgeführt, für die die Maschine berechnet ist. Diese Zahl ist auf der Verkleidung des Motors angegeben.

Hinweis. Da im Erregerkreis des Generators (in der vorliegenden Anordnung) kein Voltmeter liegt, wird die für die Erregung benötigte Leistung nach der Formel

$$P_E = I_E^2 R$$

errechnet, wobei R den Widerstand der Erregerspule (gleich 0,66 Ω) und I_E den Erregerstrom bezeichnen.

Aufgabe 53

Die Messung der Kapazität von Kondensatoren mit Hilfe einer Wechselstrombrücke

Zubehör: 1. Meßdraht, 2. Kopfhörer, 3. Stöpselkondensator, 4. Summer oder Tongenerator, 5. Akkumulator, 6. Schalter, 7. zwei zu messende Kondensatoren.

In der vorliegenden Aufgabe benutzt man zur Bestimmung der Kapazität eines Kondensators den Umstand, daß ein in einen Wechselstromkreis geschalteter Kondensator in diesem Kreis einen bestimmten Widerstand darstellt[1]). Ein einfacher quantitativer Zusammenhang zwischen der Größe der Kapazität C und dem Wert des entsprechenden *kapazitiven Widerstandes*

$$Z = -\frac{j}{C\omega} \tag{1}$$

(wobei $j = \sqrt{-1}$) gestattet es, die Kapazitätsmessung auf eine Messung des kapazitiven Widerstandes zurückzuführen. Das Experiment der vorliegenden Aufgabe besteht in dem Vergleich des kapazitiven Widerstandes eines geeichten mit dem des zu untersuchenden Kondensators. Mit Hilfe der Formel (1) gelangt man von der gefundenen Beziehung zwischen den Widerständen zu der Beziehung zwischen der bekannten und unbekannten Kapazität, und damit zur Lösung der gestellten Aufgabe.

Es ist bekannt, daß die Brückenschaltung eine der einfachsten Methoden zur Messung von Widerständen ist (siehe die Aufgaben 36 bis 39 und 54). Diese Schaltungen gestatten es, Widerstände, die in ihren Brückenzweigen liegen, zu vergleichen. In der vorliegenden Aufgabe wird eine Wechselstrombrücke benutzt (Abb. 139). In dieser Schaltung sind mit C_x die unbekannte Kapazität, mit C_0 die bekannte Kapazität, mit r_1 und r_2 die Abschnitte des Meßdrahtes (im allgemeinen sind es induktionslose Stöpselrheostaten) bezeichnet.

Damit die Brücke (Kopfhörerkreis T) stromlos ist, muß, wie stets bei Wechselstrom, die Spannung an den Enden der Brücke sowohl der Ampli-

---

[1]) Eine ganz andere Methode der Kapazitätsmessung ist in Aufgabe 47 beschrieben.

tude als auch der Phase nach gleich sein. Wie in der Theorie der Wechselströme bewiesen wird, sind diese beiden Bedingungen gleichzeitig erfüllt, wenn die komplexen Widerstände Z der Brückenzweige das folgende Verhältnis bilden:

$$Z_1 : Z_x = Z_2 : Z_0 .$$

Die Indizes an den Z entsprechen den Indizes der Kapazitäten und Widerstände der Abb. 139. In unserem speziellen Fall ist

$$Z_1 = r_1, \quad Z_2 = r_2, \quad Z_x = -\frac{j}{C_x \omega}, \quad Z_0 = -\frac{j}{C_0 \omega} .$$

Setzen wir diese Werte Z in die Verhältnisgleichung ein, so lassen sich ω und j

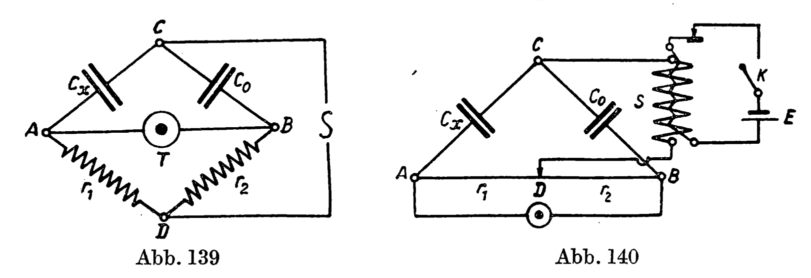


Abb. 139 Abb. 140

kürzen, und wir erhalten eine Beziehung zwischen C_x, C_0, $\frac{r_2}{r_1}$, bei der die Brücke (Kopfhörer) stromlos (tonlos) ist:

$$C_x = C_0 \frac{r_2}{r_1} . \tag{2}$$

Wenn wir also nach Einschalten der unbekannten Kapazität C_x und des geeichten Kondensators C_0 in die Brücke durch Wahl des Wertes $\frac{r_2}{r_1}$ die Brücke stromlos (den Kopfhörer tonlos) machen, dann dürfen wir die Gleichung (2) zur Bestimmung der Kapazität C_x aus C_0 und dem gefundenen Wert $\frac{r_2}{r_1}$ benutzen.

Die Beschreibung der Anordnung. Die praktisch benutzte Schaltung ist in Abb. 140 dargestellt. Sie unterscheidet sich von der prinzipiellen Schaltung (Abb. 139) nur dadurch, daß in ihr eine der möglichen Wechselstromquellen, die für die Speisung der Schaltung benötigt wird, konkret gezeigt ist.

Als Wechselstromquelle dient die Sekundärspule S eines kleinen Induktors, des sogenannten *Summers,* dessen Primärspule durch den konstanten Strom des Akkumulators E[1]) gespeist wird. Als bekannte Kapazität C_0 wird ein Stöpselkondensator verwendet, dessen Aufbau in Abb. 141 schematisch dargestellt ist. Das Einschalten der Kapazitäten geschieht durch das Umstecken der Stöpsel aus der inneren Reihe der Öffnungen in die äußere. Als die zu

[1]) Es ist natürlich bequemer, einen Tonfrequenzgenerator zu benutzen.

messenden Kapazitäten werden zwei Kondensatoren von einigen $10\,\mu$F benutzt.

Die Messung. Man setzt die Schaltung nach Abb. 140 zusammen, schließt den Stromkreis der Primärspule des Induktors, stellt den Schleifkontakt des Meßdrahtes auf die Mitte der Skala ein und stöpselt eine solche Kapazität C_0, daß der Ton im Kopfhörer fast verschwindet. Dann verschiebt man den Schleifkontakt nach irgendeiner Seite und versucht, den Ton vollständig zum Verschwinden zu bringen.

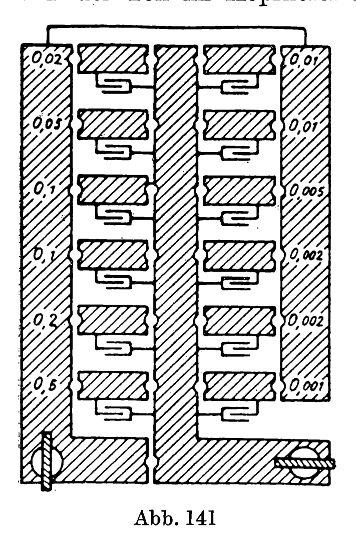


Abb. 141

Aus dem erhaltenen Verhältnis der Längen der Abschnitte und der gestöpselten Kapazität errechnet man mit Hilfe der Formel (1) die Kapazität des zu untersuchenden Kondensators.

Um einen möglichen Fehler auszuschalten, der durch einen Fehler des Stöpselkondensators auftreten kann, empfiehlt es sich, die beschriebene Messung bei einer um 10 bis 20% geänderten Kapazität zu wiederholen.

Die Messung soll mit zwei Kondensatoren durchgeführt werden, die zuerst einzeln, dann beide zusammen sowohl parallel als auch hintereinander in die Brückenzweige geschaltet werden. Man prüfe damit die Gesetze der Addition von Kapazitäten.

Spezialliteratur

1. H. Laporte: „Die Messung und Berechnung von Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten aller Art". Verlag W. Knapp, Halle (Saale) 1950.
2. W. Schwerdtfeger: „Elektrische Meßtechnik". C. F. Wintersche Verlagsbuchhandlung, Leipzig 1941.

Aufgabe 54

Die Messung des Selbstinduktionskoeffizienten einer Spule mit der Wechselstrombrücke

Zubehör: 1. Meßdraht, 2. Galvanometer mit Shunt, 3. zwei Stöpselrheostaten, 4. geeichte Spule, 5. zu messende Spule, 6. Summer, 7. Kopfhörer, 8. Akkumulator, 9. zwei zweipolige Umschalter, 10. zwei Schalter.

Eine Induktivität tritt in Leitern bekanntlich nur dann auf, wenn durch die Leiter ein Strom fließt, dessen Stärke sich zeitlich ändert. Deshalb kann die Messung der Induktivität (des Selbstinduktionskoeffizienten) nur beim Einschalten der Spulen in einen Wechselstromkreis oder einen Kreis mit pulsierendem Strom durchgeführt werden.

Wir stellen uns die Aufgabe, eine Induktivität L_1 (und den Widerstand r_{L_1}) irgendeiner Spule zu messen. Dafür wird in dieser Aufgabe eine Brückenschaltung verwendet, die in der Abbildung 142 zu sehen ist. Darin werden die praktisch induktionsfreien Stöpselrheostaten in den Brückenzweigen mit r_3 und r_4 und die bekannten Werte der Induktivität und des Widerstandes der geeichten Spule, die in einen der Brückenzweige geschaltet ist, mit L_2 und r_{L_2} bezeichnet. Wie aus der Abbildung ersichtlich, kann die Schaltung sowohl an eine Wechselstrom- als auch an eine Gleichstromquelle angeschlossen werden. Entsprechend der eingeschalteten Stromquelle wird in die Diagonale der Brücke entweder ein Kopfhörer oder ein Galvanometer gelegt. Die Zweckmäßigkeit des Anschließens verschiedener Stromquellen wird weiter unten erklärt.

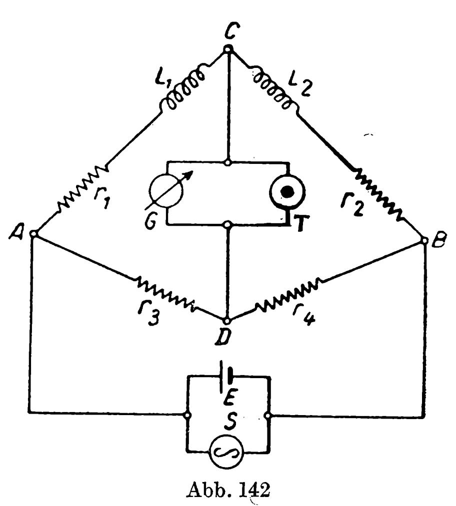


Abb. 142

Betrachten wir die Bedingung der Stromlosigkeit im Kopfhörer bei einer Speisung der Brücke mit Wechselstrom der Frequenz ω, dann ist offensichtlich, daß die Diagonale der Brücke in dem Fall stromlos ist, wenn die Wechselspannung an den Punkten der Schaltung C und D der Amplitude und der Phase nach gleich ist.

Diese Bedingung läßt sich am einfachsten finden, wenn man die Methode der komplexen Widerstände benutzt. Diese Methode ist deshalb so bequem, weil sie sofort sowohl die Amplituden- als auch die Phasenbeziehungen der Spannungen in den Brückenzweigen klärt. Wir bezeichnen die komplexen Widerstände der Brückenzweige mit Z. Der Index an Z für jeden Brückenzweig entspricht den Indizes, die an den Widerständen und Induktivitäten des gleichen Zweiges stehen. Mit diesen Bezeichnungen läßt sich das Gleichgewicht der Brücke ausdrücken durch

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}. \tag{1}$$

In unserem Fall sind $Z_3 = r_3$ und $Z_4 = r_4$, d. h., sie stellen reelle Größen dar. Folglich ist auch das Verhältnis $\frac{Z_3}{Z_4} = \frac{r_3}{r_4}$ eine reelle Größe. Jedoch sind Z_1 und Z_2 komplexe Größen der Art $r + j\omega L$, wobei $j = \sqrt{-1}$. Wir wollen die Bedingung (1) auf unsere Schaltung anwenden und setzen vorerst r_1 und r_2 gleich Null. Eine solche Annahme erlaubt es uns im weiteren, die Notwendigkeit der Einführung dieser Widerstände in die Schaltung leichter zu klären. Wir erhalten dann

$$\frac{r_{L_1} + j\omega L_1}{r_{L_2} + j\omega L_2} = \frac{r_3}{r_4}.$$

Da die rechte Seite der Gleichung eine reelle Größe ist, ist es für die Erfüllung der hingeschriebenen Bedingung notwendig, daß gleichzeitig zwei Gleichungen erfüllt werden, nämlich $\frac{r_{L_1}}{r_{L_2}} = \frac{r_3}{r_4}$ und $\frac{L_1}{L_2} = \frac{r_3}{r_4}$, d. h., die OHMschen Widerstände der Spulen müssen im gleichen Verhältnis zueinander stehen wie ihre Induktivitäten. Es ist leicht einzusehen, daß diese beiden Bedingungen im allgemeinen nicht erfüllt werden, denn es besteht kein direkter Zusammenhang zwischen dem Widerstand einer Spule und ihrer Induktivität. Der Widerstand einer Spule hängt von dem Material und dem Querschnitt des Drahtes ab, aus dem sie gefertigt ist, und die Induktivität der Spule von ihren geometrischen Daten und der Art der Wicklung. Deshalb läßt sich unter den betrachteten Bedingungen die Wechselstrombrücke nicht stromlos machen.

Um nun ein Brückengleichgewicht herstellen zu können, sind in die Brückenzweige die Stöpselrheostaten r_1 und r_2 eingeführt. Mit ihnen läßt sich die Bedingung (1) folgendermaßen schreiben:

$$\frac{r_1 + r_{L_1} + j\omega L_1}{r_2 + r_{L_2} + j\omega L_2} = \frac{r_3}{r_4}.$$

Dann müssen für das Gleichgewicht die beiden Verhältnisse erfüllt sein:

$$\frac{r_1 + r_{L_1}}{r_2 + r_{L_2}} = \frac{r_3}{r_4}, \tag{2}$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{r_3}{r_4}. \tag{3}$$

Da wir den Widerstandswerten, die an den Stöpselrheostaten r_1 und r_2 eingestellt werden, völlig unabhängige Werte geben können, können diese beiden Verhältnisse gleichzeitig erfüllt werden. Die im allgemeinen vorhandene Unproportionalität zwischen den Widerständen und den Induktivitäten der Spulen bilden kein Hindernis mehr für den Abgleich der Brücke. Darin liegt der Wert der in die Brückenzweige in Reihe mit den Spulen geschalteten Widerstände.

Wenn also die Wechselstrombrücke abgeglichen ist (die Brücke stromlos ist), gelten die Verhältnisgleichungen (2) und (3). Aus dem Verhältnis (2) kann man den OHMschen Widerstand r_{L_1} der zu untersuchenden Spule L_1 und aus dem Verhältnis (3) die Induktivität dieser Spule errechnen. Wir setzen die Induktivität der Spule L_2 und ihren Widerstand r_{L_2} als bekannt voraus. Deshalb wird die experimentelle Aufgabe, wie es scheint, auf die Abgleichung der Wechselstrombrücke zurückgeführt. Wenn sie abgeglichen ist, kann man die Aufgabe als gelöst betrachten. Das ist im Prinzip richtig, es erhebt sich nur die Frage, wie kann man eine solche Gleichgewichtsbedingung bei der Wechselstrombrücke realisieren.

Wie man aus den hingeschriebenen Verhältnisgleichungen sieht, müssen in dem vorliegenden Fall die Werte für r_1 und r_2 und das Verhältnis $\frac{r_3}{r_4}$ unter der Bedingung herausgesucht werden, daß in den Brückenzweigen schon die unveränderlichen Widerstände $r_{L_1} + j\omega L_1$ und $r_{L_2} + j\omega L_2$ vorhanden sind. Diese Aufgabe ist nicht so leicht wie der Abgleich einer Gleichstrom-

brücke, bei der man den Widerstand einer der Brückenzweige und das Verhältnis $\frac{r_3}{r_4}$ am Meßdraht frei variieren kann.

Außerdem kann man ein Stromminimum in der Brücke (Tonminimum in dem Kopfhörer) auch dann erhalten, wenn beide Verhältnisgleichungen nicht erfüllt sind. Das würden Bedingungen sein, unter denen der Strom in der Brücke nicht verschwindet, sondern nur ein Minimum annimmt, was nicht das gleiche ist. Die Erklärung hierfür ist folgende: Wird die Schaltung mit Wechselstrom gespeist und verschieben wir den Schleifkontakt, so finden wir ein Tonminimum im Kopfhörer, d. h. die Bedingung für das Amplitudenminimum der Spannung zwischen den Punkten C und D. Wir erhalten ein Spannungsminimum an der Brücke bei einer festen Phasendifferenz der Spannungen zwischen den Punkten C und D. Auf die Größe dieser Phasendifferenz kann die Verschiebung des Schleifkontaktes keinen Einfluß haben (in erster Näherung). Die Berechnung der unter solchen Bedingungen minimalen Spannungsamplitude an den Enden der Brücke bereitet keine Schwierigkeiten. Wir können schreiben:

$$V_D = V_{D0} \sin\omega t; \quad V_C = V_{C0} \sin(\omega t - \varphi),$$

woraus folgt

$$V_{CD} = V_{C0} \sin(\omega t - \varphi) - V_{D0} \sin\omega t.$$

Folglich ist

$$|V_{CD}|^2 = V_{C0}^2 + V_{D0}^2 - 2 V_{C0} V_{D0} \cos\varphi.$$

Um das Minimum dieses Ausdruckes zu finden, müssen wir $\frac{\partial |V_{CD}^2|}{\partial V_{D0}} = 0$ setzen. Aus dieser Bedingung finden wir den vorteilhaftesten Wert für die Spannungsamplitude im Punkte D:

$$V_{D0} = V_{C0} \cos\varphi. \tag{4}$$

Setzen wir diesen Wert in den Ausdruck V_{CD} ein, so finden wir seinen Minimalwert zu:

$$(V_{CD})_{\min} = V_{C0} \sin\varphi.$$

Um den Ton im Kopfhörer vollständig zum Verschwinden zu bringen, müßte aber $V_{CD} = 0$ gelten. Mit anderen Worten, die Bedingung für das Tonminimum im Kopfhörer bei ungleichen Phasen der Spannungen an den Enden der Brücke bedeutet, daß das Vektordiagramm, welches aus den Vektoren der Spannungen an dem ersten induktiven Brückenzweig, an dem ersten Abschnitt des Meßdrahtes und an der Brücke gebildet wird, ein rechtwinkliges Dreieck bilden muß.

Für die richtige experimentelle Lösung der Aufgabe muß man versuchen, von dem eingestellten Minimum zu dem Verschwinden der Spannung an den Enden der Brücke überzugehen. Dabei müssen gleichzeitig beide Verhältnisgleichungen (2) und (3) gelten. Deshalb ist es schwer, den unmittelbaren Abgleich der Wechselstrombrücke eindeutig auszuführen, um so mehr, als wir praktisch natürlich niemals ein vollständiges Verschwinden des Tones im Kopfhörer erreichen können, sondern nur ein Tonminimum, das

tiefer liegt als alle anderen. Das erschwert zusätzlich die Messung. Die gesuchte Bedingung kann man jedoch finden, wenn man einen Hilfsabgleich der Brücke mit Gleichstrom durchführt. Dafür ist die Möglichkeit des Umschaltens der Schaltungen von Wechsel- auf Gleichstrom vorgesehen.

Versuchen wir zu erklären, was der Gleichstrom in der Schaltung bewirkt: Beim Anlegen des Gleichstromes an die Schaltung verschwinden die induktiven Widerstände. Wenn wir die Brücke mit Hilfe des Galvanometers abgleichen, so finden wir die Beziehung:

$$\frac{r_1 + r_{L_1}}{r_2 + r_{L_2}} = \frac{r_3}{r_4}.$$

Wenn es sich erweist, daß der Wert dieses Verhältnisses $\left(\frac{r_3}{r_4}\right)_{\text{Gleich}}$ der gleiche ist wie der des Verhältnisses $\left(\frac{r_3}{r_4}\right)_{\text{Wechsel}}$, so bedeutet dies, daß wir bei Wechselstrom das gesuchte (tiefste) Minimum des Stromes in der Brücke gefunden haben, bei dem der Wert des Verhältnisses $\frac{r_3}{r_4}$ für beide Ströme automatisch erhalten bleibt, wie aus den Verhältnisgleichungen (2) und (3) hervorgeht. Deshalb besteht der Wert des an die Schaltung gelegten Gleichstromes vor allem darin, daß man mit seiner Hilfe das gesuchte tiefe Minimum (Grenzwert: Null), das man bei angelegtem Wechselstrom erhält, von den übrigen möglichen zusätzlichen Minima unterscheiden kann, die bei Nichterfüllung der Verhältnisgleichungen (2) und (3) auftreten können.

Doch wie wir gleich sehen werden, erlaubt das Anlegen der Gleichspannung an unsere Schaltung nicht nur eine Kontrolle darüber, ob das gesuchte tiefe Minimum eingestellt ist, sondern es erlaubt auch, dieses Minimum für Wechselstrom rationell zu finden. Betrachten wir nun die Reihenfolge der Vorgänge bei dem nacheinanderfolgenden Einschalten des Gleich- und des Wechselstromes. Haben wir die Schaltung zusammengestellt, dann stöpseln wir in den Rheostaten irgendwelche Widerstände r_1 und r_2 und finden durch Verschieben des Schleifkontaktes eine Stellung, die dem Tonminimum im Kopfhörer entspricht. Dieser Stellung des Schleifkontaktes entspricht ein bestimmtes Verhältnis der Abschnitte des Meßdrahtes $\left(\frac{r_3}{r_4}\right)_{\text{Wechsel}}$. Wir schalten nun auf Gleichstrom und auf das Galvanometer um. In der Regel wird dann durch das Galvanometer ein Strom fließen und die Brücke nicht abgeglichen sein. Durch Verschieben des Schleifkontaktes bringen wir den Strom durch das Galvanometer zum Verschwinden. Dieser Bedingung entspricht ein anderer Wert des Verhältnisses der Abschnitte des Meßdrahtes $\left(\frac{r_3}{r_4}\right)_{\text{Gleich}}$.

Es erweist sich, daß das Ungleichheitszeichen, das man nun zwischen die Werte $\left(\frac{r_3}{r_4}\right)_{\text{Wechsel}}$ und $\left(\frac{r_3}{r_4}\right)_{\text{Gleich}}$ setzen kann, uns ein Verfahren angibt, wie man zwischen diesen beiden Größen eine Gleichheit herbeiführen kann, was zweifellos für die Lösung der Aufgabe notwendig ist. Nehmen wir z. B. an, es sei $\left(\frac{r_3}{r_4}\right)_{\text{Wechsel}} > \left(\frac{r_3}{r_4}\right)_{\text{Gleich}}$. Das würde bedeuten, daß bei der Stellung des Schleifkontaktes, die das Gleichgewicht der mit Gleichstrom ge-

speisten Brücke hervorruft, die Amplitude der Wechselspannung in dem Punkte D klein ist im Vergleich zu dem Wert, den sie bei dem Minimum für Wechselstrom einnehmen muß [siehe Gleichung (4)]. Deshalb muß man für das Tonminimum im Kopfhörer den Schleifkontakt auf einen größeren Wert von r_3 einstellen, als bei Stromlosigkeit des Galvanometers erforderlich wäre. Um die Werte der Verhältnisse $\frac{r_3}{r_4}$ für beide Stromarten anzugleichen, muß man die Verteilung der Spannungen in den induktiven Zweigen der Brücke etwas verändern. Das erreicht man durch Veränderung der Widerstände r_1 und r_2[1]). Nach welcher Seite sie verändert werden müssen, wird unten bei der Beschreibung der Reihenfolge der Messungen gesagt.

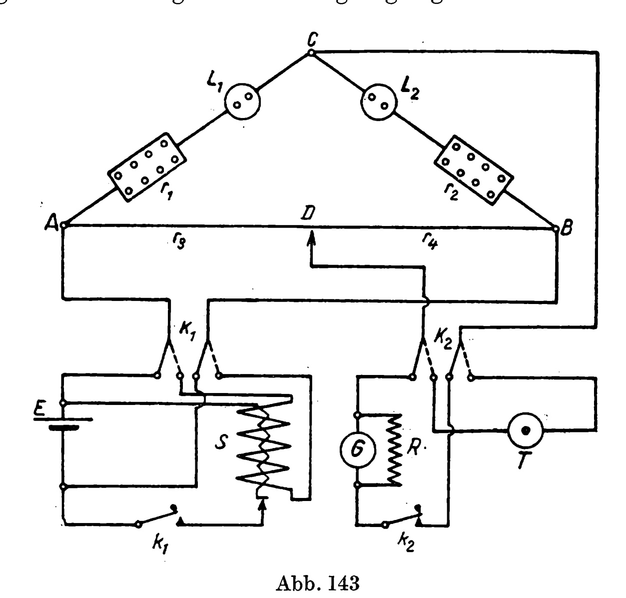


Abb. 143

Die Messung. Für die praktische Anwendung der beschriebenen Meßmethode wird die in Abb. 143 dargestellte Schaltung benutzt.

Man schaltet sie zusammen, legt die Wechselspannung an und gleicht die Brücke ab. Bei der Auffindung dieses Gleichgewichtes kann man zuerst nicht nur die Stellung des Schleifkontaktes, sondern auch den Widerstandswert von r_1 und r_2 in weiten Grenzen variieren, da ihre Änderung noch nicht mit einer oben besprochenen Ungleichheit behaftet ist. Die dieser Gleichgewichtsbedingung entsprechenden Widerstandswerte der Rheostaten und die Längen

[1]) Um von Anfang an eine rationelle Auswahl der Widerstandswerte von r_1 und r_2 treffen zu können, muß man die Widerstände beider Spulen r_{L_1} und r_{L_2} kennen. Dazu kann man sie in einer Schaltung messen, die in Abb. 143 dargestellt ist und die man bis zum Beginn der eigentlichen Messung an Gleichstrom legt. Wenn es sich z. B. erweist, daß $r_{L_1} < r_{L_2}$ und gleichzeitig kein Grund vorhanden ist anzunehmen, daß $L_1 < L_2$, dann muß man $r_1 > r_2$ stöpseln.

der Abschnitte des Meßdrahtes werden aufgeschrieben und aus ihnen das Verhältnis gebildet.

Man schaltet auf Gleichstrom um und findet das Abschnittsverhältnis, bei dem durch das Galvanometer kein Strom fließt. Man vergleicht beide Verhältnisse der Abschnitte des Meßdrahtes. Das Ungleichheitszeichen zwischen diesen beiden Verhältnissen ist für das weitere Arbeiten wichtig. Man läßt die Schaltung unter Gleichstrom, stellt den Schleifkontakt in die Gleichgewichtsstellung für Wechselstrom ein und ändert die Widerstände r_1 und r_2 in Übereinstimmung mit dem Ungleichheitszeichen so, daß das Galvanometer stromlos wird. Wenn $\left(\frac{r_3}{r_4}\right)_{\text{Wechsel}} > \left(\frac{r_3}{r_4}\right)_{\text{Gleich}}$, dann muß entweder r_1 vergrößert oder r_2 verkleinert werden. Gilt das umgekehrte Ungleichheitszeichen, so müssen r_1 und r_2 in umgekehrter Richtung verändert werden.

Danach schaltet man wieder auf Wechselstrom um. Nun wird die Stellung des Schleifkontaktes (im allgemeinen) nicht mehr dem Tonminimum im Kopfhörer entsprechen, weil die Werte von r_1 und r_2 bei der Einstellung der Stromlosigkeit des Galvanometers verändert worden sind. Man sucht erneut mit dem Schleifkontakt das Tonminimum einzustellen, und nach Vergleich des ihm entsprechenden Verhältnisses $\left(\frac{r_3}{r_4}\right)_{\text{Wechsel}}$ mit $\left(\frac{r_3}{r_4}\right)_{\text{Gleich}}$ beginnt man, die ganze Meßoperation von neuem[1]). Diese Operationen müssen so lange fortgesetzt werden, bis die Brücke im Gleichgewicht ist, sowohl für Wechsel- als auch für Gleichstrom bei ein und derselben Stellung des Schleifkontaktes und bei ein und denselben Werten der Widerstände r_1 und r_2. Danach findet man aus den Verhältnisgleichungen (2) und (3) die Werte L_1 und r_{L_1}. Wenn die zu untersuchende Spule einige Klemmen besitzt, so müssen die Messungen sowohl an der Spule im ganzen als auch an den Teilwicklungen durchgeführt werden.

Spezialliteratur

Siehe Literatur zu Aufgabe 53.

---

[1]) Man kann sich leicht davon überzeugen, daß nun der Unterschied zwischen den Werten $\frac{r_3}{r_4}$ für beide Stromarten kleiner ist als beim erstenmal. Die Änderung der Werte r_1 und r_2, die den Gleichgewichtspunkt, an dem der Schleifkontakt steht, bei Gleichstrom in Richtung einer Vergrößerung des Wertes $\frac{r_3}{r_4}$ verschiebt, verschiebt in gleicher Richtung (nur um einen kleineren Wert) den Gleichgewichtspunkt bei Wechselstrom. Die Ableitungen des Verhältnisses $\frac{r_3}{r_4}$ nach den Argumenten r_1 und r_2 ist für Gleichstrom größer als die gleichen Ableitungen nach diesen Argumenten für Wechselstrom. Beide Ableitungen tragen das gleiche Vorzeichen.

Aufgabe 55

Die Messung des Selbstinduktionskoeffizienten, einer Kapazität und die Prüfung des Ohmschen Gesetzes für Wechselstrom

Kurze Theorie. Wenn an die Enden eines Leiters vom Widerstand R_0 eine Wechselspannung angelegt wird, deren Größe zu jedem Zeitmoment t bestimmt ist durch die Gleichung

$$E = E_0 \sin \omega t, \tag{1}$$

wobei E_0 die Amplitude und ω die Kreisfrequenz bedeuten, so tritt in ihm ein Wechselstrom auf, dessen Größe für das gleiche Moment durch das Ohmsche Gesetz bestimmt wird:

$$I = \frac{E}{R_0} = \frac{E_0}{R_0} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t,$$

worin

$$I_0 = \frac{E_0}{R_0}. \tag{2}$$

Wenn außer dem Widerstand R_0 im Kreis eine Induktivität liegt, die durch den Selbstinduktionskoeffizienten L charakterisiert wird, so tritt bei gleicher angelegter Spannung ein Strom der Größe

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi) \tag{3}$$

auf, worin

$$I_0 = \frac{E}{\sqrt{R_0^2 + \omega^2 L^2}} \tag{4}$$

und φ die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung bedeutet, die bestimmt wird aus der Formel

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R_0}. \tag{5}$$

Aus dem Vergleich der Formeln (1) und (3) erkennt man, daß der Strom gegenüber der Spannung in der Phase zurückbleibt.

Die Größe $R_1 = \sqrt{R_0^2 + \omega^2 L^2}$ trägt die Bezeichnung *Widerstand*, weil sie in der Formel (4) die gleiche Rolle spielt wie der gewöhnliche (Ohmsche) Widerstand R_0 in dem Ohmschen Gesetz. Die Größe ωL wird *induktiver Widerstand* genannt.

Wenn statt der Selbstinduktion eine Kapazität C in den Wechselstromkreis geschaltet ist, wird die Stromstärke durch die Formel ausgedrückt:

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

wobei

$$I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R_0^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}} \tag{6}$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{R_0 C \omega}. \tag{7}$$

In diesem Fall eilt der Strom der Spannung in der Phase voraus. Der Widerstand ist gleich

$$R_2 = \sqrt{R_0^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}},$$

wobei die Größe $\frac{1}{C\omega}$ *kapazitiver Widerstand* genannt wird.

Sind endlich in den Kreis alle drei Größen, R, L und C, hintereinandergeschaltet, so ist der auftretende Strom gleich:

$$I = I_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi),$$

worin

$$I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R_0^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \tag{8}$$

und

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R_0}.$$

Der Gesamtwiderstand ist dabei

$$R = \sqrt{R_0^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

Der Ausdruck (8) trägt die Bezeichnung: *Ohmsches Gesetz für Wechselstrom.*

In die Formeln (2), (4), (6) und (8) gehen I_0 und E_0, die Scheitelwerte der Ströme und Spannungen, ein. Da jedoch die von den Meßgeräten angezeigten *effektiven Werte* dieser Größen I_{eff} und E_{eff} mit den Scheitelwerten durch die Formeln

$$I_0 = I_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2} \quad \text{und} \quad E_0 = E_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2}$$

zusammenhängen, so erhalten wir, wenn wir hieraus I_0 und E_0 in die oben aufgeführten Formeln einsetzen,

$$I_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{R_0}, \tag{9}$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{\sqrt{R_0^2 + L^2\omega^2}} = \frac{E_{\text{eff}}}{R_1}, \tag{10}$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{\sqrt{R_0^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}} = \frac{E_{\text{eff}}}{R_2}, \tag{11}$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{\sqrt{R_0^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{E_{\text{eff}}}{R}. \tag{12}$$

In allen diesen Formeln muß man unter R_0 die Summe aller Ohmschen Widerstände im Kreis (auch den der Spule) verstehen, an denen die gesamte Spannung gemessen wird. Wenn die Potentialdifferenz unmittelbar an den Enden der Spule gemessen wird, ist R_0 der Widerstand nur der Spule selbst.

Übung 1

Die Bestimmung des Selbstinduktionskoeffizienten

Zubehör: 1. Spule mit einigen Anzapfungen, 2. Widerstand, 3. Amperemeter für Gleich- und Wechselstrom, 4. Voltmeter für Gleich- und Wechselstrom, 5. zweipoliger Hebelumschalter.

Die Beschreibung der Anordnung. Aus der Formel (10) folgt, daß

$$L = \frac{\sqrt{R_1^2 - R_0^2}}{\omega}, \tag{13}$$

worin

$$R_1 = \frac{E_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}, \tag{14}$$

R_0 der Ohmsche Widerstand

$$R_0 = \frac{E_{\text{Gleich}}}{I_{\text{Gleich}}} \tag{15}$$

und ω die Kreisfrequenz bedeuten.

Sind diese drei Größen bestimmt, so ist damit auch L gefunden. Dazu werden die Spule mit der unbekannten Selbstinduktion L und dem Ohmschen Widerstand R_0, der Widerstand r, das Amperemeter A hintereinandergeschaltet (Abb. 144) und mit den mittleren Klemmen des Hebelumschalters k verbunden, an dessen äußeren Klemmen Gleich- und Wechselstrom von verschiedenen Seiten zugeführt wird. Parallel zur Spule wird das Voltmeter V geschaltet. Beide Geräte, das Volt- und das Amperemeter, können sowohl für Gleich- als auch für Wechselstrommessungen verwendet werden.

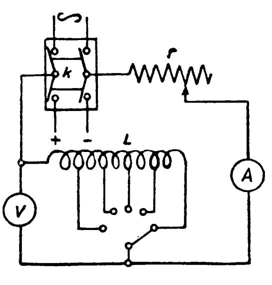


Abb. 144

Zur Bestimmung von ω muß man die Periode des Wechselstromes kennen. Wenn dieser Strom dem Netz entnommen wird, ist $T = \frac{1}{50}$ sec und folglich $\omega = \frac{2\pi}{T} = 100\pi \approx 314\ \text{sec}^{-1}$.

Die Messung. 1. Für die Messung des Ohmschen Widerstandes der Spule stellt man mit dem Gleitkontakt des Schiebewiderstandes den maximalen Wert[1]) ein, schließt das Voltmeter an und legt den Hebel k auf Gleichstrom um. Man verschiebt langsam den Gleitkontakt des Widerstandes und bringt ihn in eine solche Stellung, daß das Amperemeter einen für die Ablesung genügenden Ausschlag zeigt.

Wir lesen außerdem auf den Geräten die Stromstärke I_{Gleich} und die Spannung E_{Gleich} ab, verändern durch Umschalten der Abgriffe die Zahl der angeschlossenen Spulenwindungen und führen analoge Messungen durch.

---

[1]) Das ist notwendig, um die Meßgeräte vor einer Beschädigung zu schützen. Unterläßt man das, so kann beim Einschalten die Gleichstromstärke höher sein, als es das vorliegende Amperemeter verträgt, und es brennt durch.

Wir führen diese Operationen für jeden Abgriff mindestens dreimal durch, setzen den Mittelwert in die Formel (15) ein und errechnen den Wert des Ohmschen Widerstandes für jeden Abgriff der Spule.

Bei der Ausführung der angeführten Messungen muß man folgendes beachten: a) Der Hebel darf nicht länger eingeschaltet bleiben, als es für die Ablesung notwendig ist, weil sich sonst die Spule erwärmt und ihr Widerstand sich wesentlich verändert; b) die Umschaltung auf die einzelnen Abgriffe darf nur ausgeführt werden, wenn der ganze Widerstand im Kreise liegt.

2. Für die Bestimmung des Gesamtwiderstandes der Spule wird der Hebel k auf Wechselstrom geschaltet.

Man ändert die Stellung des Gleitkontaktes am Schiebewiderstand und stellt ihn, wie oben bereits erwähnt, auf eine genügende Auslenkung des Amperemeterzeigers ein. Man führt die entsprechende Ablesung durch, ändert die Zahl der angeschlossenen Windungen der Spule und erhält die unabhängigen Werte I_{eff} und E_{eff} für jeden Abgriff. Man setzt sie in die Formel (14) ein und rechnet die entsprechenden Widerstandswerte aus.

Hat man auf diese Weise die Werte R_0 und R_1 bestimmt, so findet man mit Hilfe der Formel (13) den Wert L und dann mit Hilfe der Formel (5) den Wert φ für jeden Abgriff der Spule.

Übung 2

Die Bestimmung der Kapazität

Zubehör: 1. Zwei Kondensatoren, 2. Schiebewiderstand, 3. Amperemeter für Gleich- und Wechselstrom, 4. Voltmeter für Gleich- und Wechselstrom, 5. zweipoliger Hebelumschalter.

Die Beschreibung der Anordnung. Aus der Formel (11) folgt:

$$C = \frac{1}{\omega \sqrt{R_2^2 - R_0^2}},$$

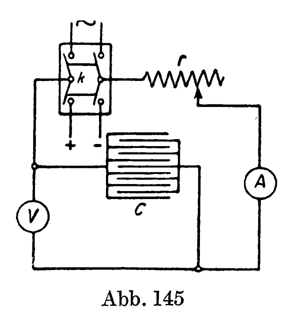


Abb. 145

wobei R_2 und R_0 den Gesamtwiderstand und den rein Ohmschen Widerstand des Kreises darstellen. Wenn die Spannung E_{eff} unmittelbar am Kondensator gemessen wird, vereinfacht sich diese Formel wesentlich, weil der Ohmsche Widerstand des Kreises verschwindet ($R_0 = 0$). Dann gilt:

$$C = \frac{1}{\omega R_2}. \tag{16}$$

Zur Bestimmung von R_2 verfährt man folgendermaßen: Man schaltet den zu messenden Kondensator C, das Amperemeter A und den Schiebewiderstand r hintereinander und schließt sie an die mittleren Klemmen des Hebelumschalters k an (Abb. 145). Parallel zum Kondensator legt man das Voltmeter. Der Widerstand r dient hier nur als Schutzwiderstand für den Fall eines Kondensatordurchschlags und muß stets auf seinen Maximalwert eingestellt bleiben.

Die Messung. Man legt den Hebel auf Wechselstrom und liest an den Meßgeräten die Stromstärke I_{eff} und die Spannung E_{eff} ab. Dann bestimmt man R_2 aus der Formel

$$R_2 = \frac{E_{\mathrm{eff}}}{I_{\mathrm{eff}}}, \tag{17}$$

setzt diesen Wert R_2 in die Formel (16) ein und rechnet C aus. Die Messung führt man zuerst einzeln für jeden Kondensator, dann in Parallel- und Hintereinanderschaltung aus und prüft damit das Additionsgesetz für Kondensatoren.

Übung 3

Die Prüfung des Ohmschen Gesetzes für Wechselstrom

Zubehör: 1. Spule, 2. Kondensator, 3. Schiebewiderstand, 4. Amperemeter, 5. Voltmeter, 6. zweipoliger Hebelschalter.

Die Beschreibung der Anordnung. Aus der Formel (12) erhalten wir für den Fall, daß Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität hintereinandergeschaltet sind:

$$R = \sqrt{R_0^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \frac{E_{\mathrm{eff}}}{I_{\mathrm{eff}}}. \tag{18}$$

Zur Prüfung dieser Formel schaltet man in den Wechselstromkreis hintereinander: eine Spule von bekanntem Ohmschen Widerstand R_0 und Selbstinduktionskoeffizienten L, einen Kondensator von bekannter Kapazität C, den veränderlichen Widerstand (Schiebewiderstand) r und das Amperemeter A (Abb. 146). Parallel zu dem Teil des Kreises, in dem Spule und Kondensator liegen, wird das Voltmeter V geschaltet.

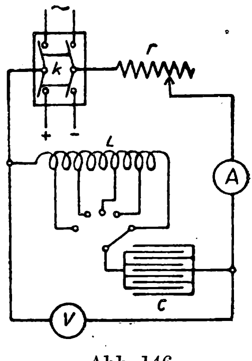


Abb. 146

Die Messung. Man stellt den Widerstand r auf seinen Maximalwert ein, legt den Hebel auf Wechselstrom, verändert den Schiebewiderstand, bis die Meßgeräte einen genügenden Ausschlag zeigen, und liest I_{eff} und E_{eff} ab. Die erhaltenen Ergebnisse setzt man in die rechte Seite der Formel (18) ein und rechnet R aus. Andererseits wird R bestimmt, indem man in die linke Seite der Formel die bekannten Größen R_0, L und C einsetzt.

Die erhaltenen Ergebnisse werden miteinander verglichen und damit die Richtigkeit des Ohmschen Gesetzes für Wechselstrom geprüft. Das Ergebnis wird in Form einer Tabelle dargestellt, die die gemessenen und errechneten Größen enthält.

Spezialliteratur

Siehe Literatur zu Aufgabe 53.

Aufgabe 56

Die Messung der Wechselstromleistung und der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung

Übung 1

Die Messung der Leistung und der Phasenverschiebung mit Hilfe eines Wattmeters

Zubehör: 1. Elektrodynamisches Wattmeter, 2. zwei Amperemeter, 3. Voltmeter, 4. Kondensator, 5. Spule mit einem herausschiebbaren Eisenkern, 6. Belastungswiderstand, 7. Zusatzwiderstände zur Regulierung des Gesamtstromes.

Beschreibung und kurze Theorie der Anordnung. Wie aus der Theorie des Wechselstromes bekannt, wird die mittlere Leistung, die durch einen Strom der Stärke I_{eff} in dem Teil des Kreises erzeugt wird, an dem der Spannungsabfall V_{eff} beträgt, durch die Beziehung ausgedrückt:

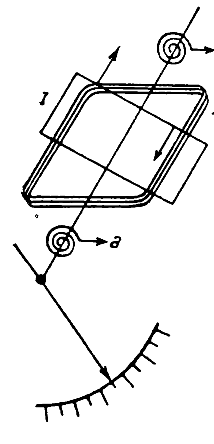


Abb. 147

$$W = I_{\text{eff}}\, V_{\text{eff}} \cos\varphi, \tag{1}$$

wobei I_{eff} und V_{eff} sogenannte *effektive Werte* der Stromstärke und der Spannung bezeichnen. Ihre Werte

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad V_{\text{eff}} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$$

erhält man als Wurzel aus dem zeitlichen Mittelwert des Quadrates der Stromstärke und der Spannung bei sinusförmigem Wechselstrom. Der Winkel φ stellt die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung dar, die von dem Widerstand des Kreises R, seiner Selbstinduktion L, der Kapazität C und der Frequenz ω des Stromes abhängt.

Die vorliegende Aufgabe besteht in der Untersuchung der Werte von $\cos\varphi$ für verschiedene Wechselstromkreise. Wenn W, I_{eff} und V_{eff} experimentell bestimmt sind, so kann man $\cos\varphi$ aus der Formel (1) berechnen. Die Messungen der Größen I_{eff} und V_{eff} gehören bekanntlich zu den einfachsten ektrotechnischen Messungen. Deshalb werden wir nur bei dem Verfahren zur Messung der Größe W verweilen. Der Mittelwert der Leistung läßt sich mit Hilfe besonderer Meßgeräte, *der Wattmeter*, bestimmen. Es existieren eine ganze Reihe von Konstruktionen dieser Geräte. Weiter unten wird die Beschreibung eines Wattmeters mit elektrodynamischem System angeführt. Der Aufbau und die Art der Schaltung eines elektrodynamischen Wattmeters geht aus den Abbildungen 147 und 148 hervor.

Das Wattmeter besteht aus zwei Spulen, der festen Spule I von geringem Widerstand, die in dem Wechselstromkreis mit dem Teil hintereinandergeschaltet ist, an dem die Leistung gemessen werden soll, und der drehbaren Spule II von hohem Widerstand, die zu dem zu untersuchenden Teil des

Kreises parallel geschaltet wird. Die drehbare Spule ist, wie auch jedes technische Amperemeter, mit den beiden Torsionsfedern *aa* versehen.

Wenn durch die Spule *I* und durch den zu untersuchenden Teil des Kreises ein Strom der Stärke

$$I = I_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$$

fließt, ist der durch die Spule *II* fließende Strom der Potentialdifferenz an diesem Teil proportional. Diese Potentialdifferenz ist im allgemeinen mit dem Strom nicht phasengleich und kann folglich in der Form geschrieben werden:

$$V = V_{\max} \sin \omega t$$

und der Strom durch die Spule *II* entsprechend in der Form:

$$i = \frac{V_{\max}}{R} \sin \omega t.$$

Aus der allgemeinen Annahme über die Wechselwirkung von stromdurchflossenen Leitern folgt, daß der momentane Wert des Drehmomentes der elektrodynamischen Kräfte, die an dem Rähmchen des Wattmeters angreifen, ausgedrückt wird durch

$$M = K I_{\max} \frac{V_{\max}}{R} \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t.$$

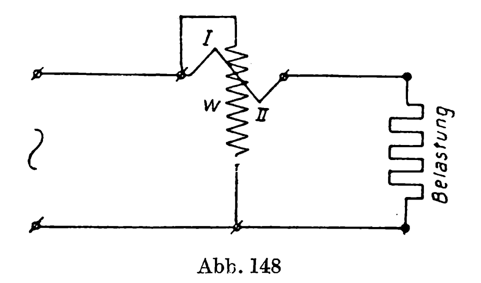


Abb. 148

Aus dieser Formel ist ersichtlich, daß *M* eine Funktion der Zeit von der gleichen Art ist wie auch der bekannte Ausdruck für den momentanen Wert der Leistung des Wechselstromes.

Das drehbare System des Wattmeters besitzt eine große Schwingungsdauer und ist stark gedämpft. Seine konstante Auslenkung aus der Gleichgewichtslage beim Durchgang des Stromes durch das Rähmchen ist bestimmt durch die Gleichheit des Rückstellmomentes der Federn und dem mittleren Wert des durch die elektrodynamischen Kräfte hervorgerufenen Drehmomentes:

$$\overline{M} = \frac{1}{T} \int_0^T M \cdot dt;$$

$$\overline{M} = \frac{K}{T} \int_0^T I_{\max} V_{\max} \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t \cdot dt =$$

$$= A \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}} \cos \varphi = A I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \cos \varphi = A W. \qquad (2)$$

Deshalb ist der Mittelwert des Momentes während einer Periode, der den Drehwinkel des Rähmchens bestimmt, der mittleren Leistung proportional. Diese wird durch den Wechselstrom in dem Teil des Kreises erzeugt, an den

das Wattmeter angeschlossen ist. Die Schwingungen der Energie, die in dem Wechselstromkreis, ohne äußere Arbeit zu leisten, vor sich gehen, haben keinen Einfluß auf die Anzeige des Wattmeters, weil es nur auf die Wirkleistung (verbrauchte Leistung) des Wechselstromes anspricht.

Man setzt den Wechselstromkreis nach der Abb. 149 zusammen, mißt die Werte für W, I_{eff} und V_{eff} und rechnet $\cos\varphi$ aus. Die Messung dieser Größen erlaubt es, auch die anderen Parameter des Kreises zu finden, und zwar den Gesamtwiderstand des zu messenden Teiles des Wechselstromkreises:

$$Z = \frac{V_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}},$$

und aus dem Ausdruck

$$R' = \frac{W}{I_{\text{eff}}^2}$$

kann man den Ohmschen Widerstand bestimmen, in dem die JOULEsche Wärme durch den Wechselstrom erzeugt wird. Benutzt man die Werte für Z und R' und das OHMsche Gesetz für Wechselstrom, so kann man die Ausdrücke bilden:

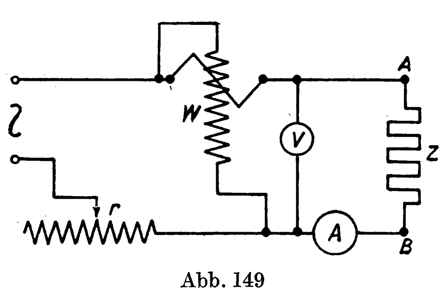


Abb. 149

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = Z^2 - R'^2 = \frac{V_{\text{eff}}^2}{I_{\text{eff}}^2} - \frac{W^2}{I_{\text{eff}}^4}$$

oder

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \frac{\sqrt{I_{\text{eff}}^2 V_{\text{eff}}^2 - W^2}}{I_{\text{eff}}^2} \tag{3}$$

und ebenso

$$W'^2 = I_{\text{eff}}^2 V_{\text{eff}}^2 - W^2, \tag{4}$$

die es gestatten, den induktiven und den kapazitiven Widerstand des Kreises und die in ihm schwingende sogenannte *wattlose Leistung* W' zu errechnen.

Die Messung. 1. In die in Abb. 149 dargestellte Schaltung legt man an Stelle von Z nacheinander die in Abb. 150 dargestellten kombinierten Belastungen und führt die Messungen aus. Die Ergebnisse der Messungen schreibt man in folgende Tabelle ein, in deren letzte Spalte man die ausgerechneten Werte für die in dem Tabellenkopf bezeichneten Größen einträgt:

Eingeschaltet sind	I_{eff}	V_{eff}	$I_{\text{eff}}V_{\text{eff}}$	W	W'	$\cos\varphi$	Z	R'	L	C
R'										
Z										
C										
R, L										
R, C										
usw.										

Man muß das Nichtübereinstimmen zwischen den Werten des Produktes $I_{\text{eff}} \cdot V_{\text{eff}}$ und W beachten und den Sinn dieses Nichtübereinstimmens klären.

2. Hat man die Werte $\cos\varphi$ und die Leistung W, die durch den Wechselstrom in den einzelnen Kreisen erzeugt wird, bestimmt, so untersucht man die Abhängigkeit der Größe $\cos\varphi$ von einem bestimmten Parameter des Kreises. In unserem Fall untersucht man die Abhängigkeit der Größe $\cos\varphi$ von der Größe des induktiven Widerstandes einer in den Kreis geschalteten veränderlichen Induktivität. Sie besteht aus einer Spule mit herausschiebbarem Eisenkern.

Man schaltet in der Anordnung den Widerstand R und die Spule L hintereinander, wie es die Abbildung 150 (IV) zeigt, stellt eine Stromstärke von 2 bis 5 A ein und schiebt allmählich den Eisenkern in die Spule. Für jede Stellung des Kernes bestimmt man auf die oben angeführte Art den Wert für $\cos\varphi$ und den induktiven Widerstand der Spule ωL. Die Meßergebnisse trägt man in eine Tabelle ein, deren Muster hier folgt, und stellt dann die Abhängigkeit der Größe $\cos\varphi$ von ωL graphisch dar.

Abb. 150

I_{eff}	V_{eff}	$I_{\text{eff}} V_{\text{eff}}$	W	$\cos\varphi$	$L\omega$	$R = \text{const}$

Hinweise zur Ausführung der Arbeit

1. Die Schaltung besitzt Zusatzwiderstände r. Beim ersten Einstellen jeder neuen Variante der Schaltungen müssen diese Widerstände auf ihren Maximalwert eingestellt werden.

2. Der zweite Teil der Übung wird bei stärkeren Strömen ausgeführt als die ersten Messungen, deshalb wird die Stromstärke mit einem anderen Amperemeter gemessen.

3. Der starke Strom darf nur für kurze Augenblicke eingeschaltet werden, weil die Erwärmung der Spule eine Änderung ihres Ohmschen Widerstandes bewirkt.

Übung 2

Die Messung der Phasenverschiebung und der Leistung mit Hilfe eines Kathodenstrahloszillographen

Zubehör: 1. Kathodenstrahloszillograph, 2. fest aufgebaute Schaltelemente, 3. Zirkel, 4. Schaltschnüre.

Beschreibung und Theorie der Methode. Der Kathodenstrahloszillograph kann zur anschaulichen Untersuchung der Phasenverschiebung zwischen der

Stromstärke und der Spannung in einem Wechselstromkreis und ebenso auch zur Messung der von dem Wechselstrom erzeugten Leistung benutzt werden. Diese Methode wird am häufigsten in der Radiotechnik verwendet, wo man für hohe Frequenzen keine Möglichkeit besitzt, die üblichen Meßgeräte der Elektrotechnik zu benutzen. In unserer Aufgabe wird von der prinzipiellen Anwendung der Methode gesprochen. Deshalb wird sie unter besonders einfachen Bedingungen, wie sie das Wechselstromnetz schafft, benutzt.

In Abb. 151 ist die Schaltung des zu untersuchenden Teiles des Wechselstromkreises und das prinzipielle Schema des in diesen Kreis geschalteten Kathodenstrahloszillographen dargestellt (die Beschreibung des Kathodenstrahloszillographen wird in Aufgabe 64 durchgeführt). Ein Plattenpaar des Oszillographen (z. B. das horizontale) ist parallel zum zu untersuchenden Kreis geschaltet, und das zweite liegt für alle Versuche unverändert parallel zu dem geeichten Kondensator C_0, der nur für Meßzwecke in die Schaltung eingeführt wird. Die Aufgabe dieses Kondensators wird weiter unten beschrieben.

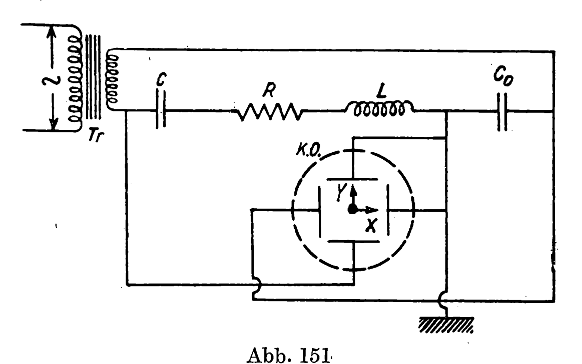


Abb. 151

Die mittlere vom Wechselstrom erzeugte Leistung an C, R und L wird durch die Formel (1) (siehe Übung 1) angegeben, wobei

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi), \tag{5}$$

$$V_{R,\,L,\,C} = I_0 Z \sin\omega t = V_0 \sin\omega t \tag{6}$$

ist, und Z den Gesamtwiderstand des Wechselstromkreises darstellt. Zur Messung der Leistung mit Hilfe des Oszillographen muß man auf die Ablenkplatten eine Spannung geben, die den in die Formel (1) eingehenden Größen proportional ist. Wir analysieren von diesem Standpunkt aus die Arbeit der in Abb. 151 angegebenen Schaltung:

Wir schalten die Zeitablenkung des Oszillographen ab. Die an die horizontalen Platten gegebene Spannung ist der Größe $V_{R,\,L,\,C}$ proportional. Folglich ist die Ablenkung des Kathodenstrahls in Richtung der Y-Achse gleich:

$$y = \frac{V_{R,\,L,\,C}}{q} = \frac{V_0}{q} \sin\omega t, \tag{7}$$

wobei q die *Spannungsempfindlichkeit* des Oszillographen in Y-Richtung ist. Die Größe q wird in V/cm angegeben. Sie ist eine veränderliche Größe und hängt von der jeweils benutzten Oszillographenverstärkung ab.

Die Größe der Ablenkung des Strahls in Richtung X ist der Spannung am geeichten Kondensator proportional. Man sieht leicht ein, daß diese Spannung

ihrerseits der Stromstärke im Kreis proportional ist; denn die durch Formel (5) gegebene Stromstärke führt zum Auftreten einer Ladung am Kondensator von

$$e = \int I_0 \sin(\omega t + \varphi)\, dt = -\frac{I_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi),$$

folglich ist die Potentialdifferenz

$$V_{C_0} = \frac{e}{C_0} = -\frac{I_0}{C_0 \omega} \cos(\omega t + \varphi)$$

der Amplitude der Stromstärke proportional.

Also erlaubt es die Einführung eines geeichten Kondensators in den Kreis, auf die vertikalen Platten des Oszillographen eine Spannung zu geben, die der Amplitude der Stromstärke in diesem Kreis proportional ist. Wenn die Empfindlichkeit des Oszillographen in horizontaler Richtung mit p bezeichnet wird, so läßt sich die Auslenkung in Richtung der X-Achse schreiben als:

$$x = \frac{V_{C_0}}{p} = -\frac{I_0}{p C_0 \omega} \cos(\omega t + \varphi). \tag{8}$$

Damit werden an die Platten des Oszillographen zwei harmonische Spannungen gleicher Frequenz, doch verschiedener Amplitude und Phase gelegt. Diese Spannungen sind den Faktoren proportional, die in die Formel (1) für die Leistung eingehen.

Es ist bekannt, daß als Ergebnis zweier senkrechter harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz die zusammengesetzte Schwingung als eine Bewegung auf einer elliptischen Trajektorie (Bahn) erscheint. Folglich muß der Kathodenstrahl in diesem Fall auf dem Oszillographen eine Ellipse beschreiben. Es ist leicht, eine Beziehung zwischen den Parametern dieser Ellipse, der Leistung des Wechselstromes und der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung aufzustellen. Zuerst zeigen wir, daß die Fläche der Ellipse der vom Strom erzeugten Leistung proportional ist. Für das Flächenelement der Ellipse erhalten wir:

$$dS = y \cdot dx = y \frac{I_0}{p C_0} \sin(\omega t + \varphi) \cdot dt =$$
$$= \frac{V_0}{q} \cdot \frac{I_0}{p C_0} \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t \cdot dt = \frac{1}{p q C_0} W dt,$$

wobei W die Leistung des Stromes ist. Es ist jedoch

$$W_{\text{mittel}} = \frac{1}{T} \int_0^T W dt = \nu \int_0^T W dt,$$

wobei $\nu = \frac{1}{T}$ die Frequenz des Stromes angibt. Folglich ist

$$W_{\text{mittel}} = \nu C_0 p q \int_S dS = \nu C_0 p q S, \tag{9}$$

wobei S die Fläche der Ellipse bedeutet.

Die Frequenz ν beträgt 50 Hz. Die Größen p und q werden aus der Größe der bei dem Versuch benutzten Verstärkung nach beiliegenden besonderen

Eichkurven bestimmt. Die Kapazität des geeichten Kondensators ist bekannt ($C_0 = 2\,\mu$F). Deshalb bleibt zur Messung der Leistung nur noch die Größe der Fläche der Ellipse aus dem Versuch zu bestimmen, die sich auf dem Schirm des Oszillographen aufzeichnet. Die Fläche der Ellipse wird bekanntlich ausgedrückt durch die Formel: $S = \pi a b$, wobei a und b die Halbachsen der Ellipse bedeuten, die sich gerade auf dem Schirm des Oszillographen gut messen lassen.

Die Beobachtung der gleichen Ellipsen erlaubt es auch, $\cos\varphi$ zu bestimmen. Das läßt sich aus folgender Überlegung ableiten:

Es ist klar, daß die Orientierung der Ellipse zu den Koordinatenachsen vom Winkel φ abhängt. So fallen z. B. für $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ usw. die Ellipsenachsen mit den Koordinatenachsen zusammen. Aus der Formel (8), die die Auslenkung des Strahls auf der X-Achse angibt, sieht man, daß man für $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \ldots, n\pi$ $\cos\varphi$ aus dem Ausdruck

$$\cos\varphi = -\frac{x}{x_0} \tag{10}$$

finden kann, wobei x_0 die Schwingungsamplitude in Richtung der X-Achse und x die Koordinate des Schnittpunktes der Ellipse mit der Abszissenachse darstellen (Abb. 152).

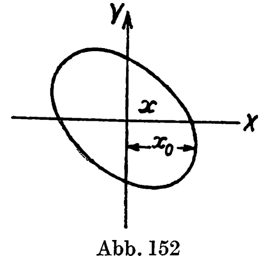


Abb. 152

Der gefundene Wert von $\cos\varphi$ erlaubt es, die vom Strom erzeugte Leistung schon über die effektiven Werte der Stromstärke und der Spannung zu bestimmen, die in die Formel (1) eingehen. Tatsächlich kann man die Amplitudenwerte der Stromstärke und der Spannung aus den Amplitudenwerten x und y_0 finden:

$$V_0 = q y_0,$$
$$I_0 = p \omega C_0 x_0,$$

wonach sich die Größe W berechnen läßt aus dem Ausdruck:

$$W = \frac{1}{2} p q C_0 y_0 x_0 \omega \cos\varphi. \tag{11}$$

Die Beschreibung der Anordnung. Das Blockschaltbild der Aufgabe ist in Abb. 153 dargestellt. Der zu untersuchende Wechselstromkreis enthält den Kondensator C, den Widerstand R und die Spule L, die hintereinandergeschaltet sind, wenn auch die Möglichkeit vorhanden ist, daß sie auch auf andere Weise verbunden werden können.

Um den Änderungsbereich der Phasenverschiebung φ und damit auch den der verbrauchten Leistung W zu erweitern, kann sowohl die Kapazität durch verschiedene Schaltung (hintereinander und parallel) zweier Kondensatoren (die Kapazität jedes der beiden beträgt $1\,\mu$F) als auch die Größe des Widerstandes zweier Schiebewiderstände (der Widerstand jedes der beiden beträgt 2800 Ω) verändert werden. Eine Änderung der Größe der Selbstinduktion L ist nicht vorgesehen.

Die Speisung des Kreises geschieht durch einen Wechselstrom von 50 Hz, der durch den Transformator *Tr* auf 3 V heruntertransformiert wird. Für die Versuche wird ein Kathodenstrahloszillograph benutzt.

Die Messung. Nachdem man die Elemente zusammengeschaltet hat, stellt man vor Beginn der Messung den leuchtenden Punkt auf der Mitte des Oszillographenschirmes so ein, daß er mit dem Schnittpunkt der Mittellinien des Koordinatennetzes zusammenfällt. Man darf jedoch den grellen Punkt nicht lange auf einer Stelle lassen, weil er den Schirm beschädigt. Dann schaltet man den Transformator ein.

Durch Regeln der Verstärkung des Oszillographen kann man eine Ellipse erhalten, die nach der einen oder der anderen Richtung gedehnt ist. Man

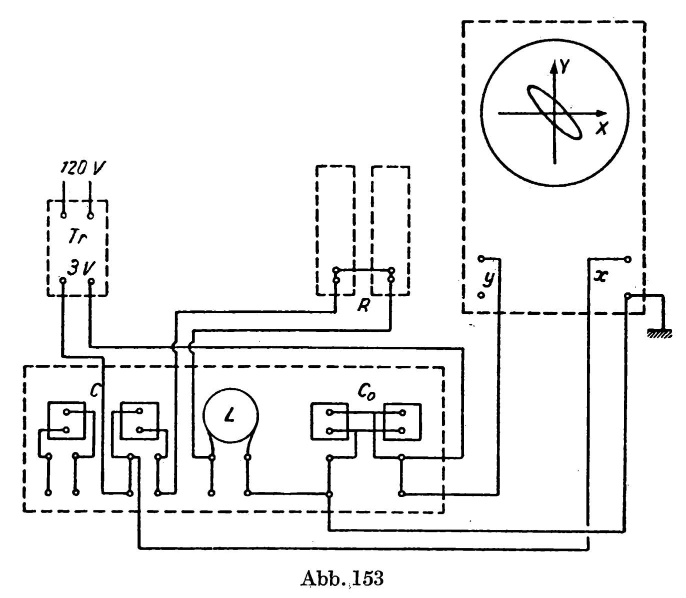


Abb. 153

soll sie jedoch so einstellen, daß der Abstand der Kurve vom Mittelpunkt des Schirmes mehr als 1 cm und weniger als 2,5 cm beträgt.

Zur Bestimmung der Phasenverschiebung φ nach der Formel (10) muß man die Größen x und x_0 messen. Die erste wird mit einem Zirkel unmittelbar auf der Ellipse abgenommen (siehe Abb. 152), und zur Messung der zweiten unterbricht man die Verbindung zwischen den horizontalen Platten des Oszillographen und der übrigen Schaltung und nimmt mit dem Zirkel auf dem Schirm den horizontalen Abschnitt ab. Seine Länge ist gleich x_0. Analog mißt man die Größe y_0. Diese Messungen müssen mehrmals durchgeführt und der Mittelwert gebildet werden.

Die Messung der Leistung muß sowohl nach dem ersten als auch nach dem zweiten Verfahren durchgeführt werden.

Die Größen W und $\cos\varphi$ werden für mehrere Werte von R bei bestimmten

Größen der Kapazität C bestimmt. Die Berechnung geschieht nach den Formeln (9), (10) und (11).

Die Genauigkeit der Messungen von W und $\cos\varphi$ bei der beschriebenen Methode ist an die Genauigkeit des Röhrenvoltmeters, mit dessen Hilfe man zuerst die Größen p und q für den Kathodenstrahloszillographen bestimmt hat, und an die Konstanz der Eichung des Oszillographenverstärkers gebunden.

Der die Aufgabe Ausführende entnimmt die Größen p und q aus den Eichkurven, die den Zusammenhang zwischen der Empfindlichkeit des Oszillographen und den Ablesungen an den Drehknöpfen der Verstärker liefern. Die Eichkurven liegen auf dem Labortisch für diese Aufgabe.

Es ist offensichtlich, daß die beschriebene Anwendung des Oszillographen zur Messung der Phasenverschiebung auf der Annahme beruht, daß die Verstärker dieses Gerätes keine zusätzliche Phasenverschiebung zwischen den ihnen zugeführten Spannungen hervorrufen. In der vorliegenden Aufgabe ist eine solche Forderung erfüllt. Über die Kontrolle der Arbeit des Oszillographen in dieser Hinsicht siehe Aufgabe 63.

Spezialliteratur

1. Siehe Literatur zu Aufgabe 53.
2. J. Czech: „Der Elektronenstrahl-Oszillograph". Verlag für Radio—Photo—Kinotechnik GmbH, Berlin 1955.

Aufgabe 57

Die Bestimmung des Widerstandes von Eisendrähten bei Wechselstrom

Zubehör: 1. Doppelleitung aus zwei Eisendrähten von 30 bis 40 m Länge und 4 mm Durchmesser, 2. Amperemeter, 3. Wattmeter, 4. Voltmeter, 5. Meßwandler, 6. Widerstände.

Einführung und Theorie. Der Wechselstromwiderstand von Drähten hängt ab von der Wechselstromfrequenz (weil sich mit der Änderung der Frequenz die Verteilung der Stromdichte über den Querschnitt des Leiters ändert — *Skineffekt*) und bei ferromagnetischen Drähten außerdem noch stark von der Stromstärke im Draht, die die Feldstärke des magnetischen Feldes bestimmt, in dem sich das Drahtmaterial befindet.

Der Wechselstromwiderstand Z besteht aus dem Wirkwiderstand R und dem Blindwiderstand ωL. Die Gesamtinduktivität L des Drahtes setzt sich zusammen aus der äußeren Induktivität L_e und der inneren Induktivität L_i. Die innere Induktivität L_i hängt von der Form und den Ausmaßen des Drahtquerschnittes, von seiner Permeabilität μ, seiner Leitfähigkeit und der Frequenz des Stromes ab, während die äußere Induktivität L_e von der Form der Oberfläche, die der Leiter besitzt und von den magnetischen Eigenschaften des Mediums, in dem er sich befindet, abhängt.

Wir wollen die Induktivität

$$L = L_e + 2 L_i \tag{1}$$

der Längeneinheit der zu untersuchenden Leitung, die in dieser Aufgabe aus zwei parallelen zylindrischen Drähten von kreisförmigem Querschnitt besteht, bestimmen. Wir berechnen zuerst L_e für zwei in Luft verlaufende Drähte, in deren einem der Strom in der einen Richtung und in deren anderem er in umgekehrter Richtung fließt (Abb. 154).

Der äußere Induktionsfluß beträgt

$$\Phi_e = L_e I,$$

wobei I die Stärke des durch die Drähte fließenden Stromes darstellt. Hieraus erhalten wir:

$$L_e = \frac{\Phi_e}{I}. \tag{2}$$

Der Induktionsfluß Φ_e läßt sich leicht ausrechnen, weil das die Drähte umgebende Medium Luft ist, für das $\mu = 1$ ist:

$$\Phi_e = \int B \cdot ds = \int H \cdot ds.$$

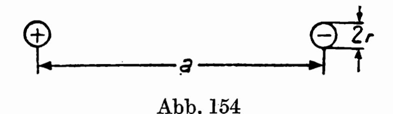


Abb. 154

Die Feldstärke H außerhalb der Drähte wird durch die Beziehung $H = \frac{2I}{x}$ bestimmt. Für das Oberflächenelement gilt $ds = 1 \cdot dx$, weil wir die Größe L je Längeneinheit des Systems bestimmen. Deshalb erhalten wir:

$$\Phi_e = 2 \int_r^{a-r} \frac{2I}{x} \cdot dx = 4 I \cdot \ln \frac{a-r}{r} \approx 4 I \cdot \ln \frac{a}{r}, \tag{3}$$

wobei a den Abstand zwischen den Drähten und r den Radius der Drähte darstellen. Aus den Formeln (2) und (3) folgt, daß für 1 cm des Leiterpaares

$$L_e = 4 \ln \frac{a}{r}. \tag{4}$$

Wir bestimmen nun die Größe der inneren Induktivität L_i der Längeneinheit eines einzelnen Drahtes. Die Feldstärke ist im Drahtinneren im Abstand y von der Drahtachse (der Skineffekt wird nicht berücksichtigt)

$$H_y = \frac{2 I y}{r^2} \tag{5}$$

und an der Oberfläche des Drahtes für $(y = r)$

$$H = \frac{2I}{r}. \tag{6}$$

Zur Berechnung von L_i benutzen wir die Formel für die Energie des Magnetfeldes im Inneren eines Drahtes:

$$\frac{L_i I^2}{2} = \int_0^r \frac{H_y B_y}{8\pi} 2\pi y \cdot dy. \tag{7}$$

Substituieren wir in der Formel (7) die Integrationsvariable, so kommen wir zur Integration nicht über y, sondern über H_y [wir benutzen dafür die Gleichung (5)]:

$$L_i = \frac{2}{I^2} \int_0^H \mu H_y^3 \cdot \frac{2\pi}{8\pi} \cdot \left(\frac{r^2}{2I}\right)^2 \cdot dH_y = \frac{1}{2H^4} \int_0^H \mu \cdot d(H_y^4). \tag{8}$$

Wenn μ unabhängig vom Feld ist, dann erhalten wir für 1 cm eines Drahtes:

$$L_i = \frac{\mu}{2}. \tag{9}$$

Im Falle des Wechselstromes hängt die innere Induktivität L_i, wie auch der Gesamtwiderstand Z, von der Stärke des Stromes und seiner Verteilung über den Querschnitt des Leiters ab. Für ferromagnetische Leiter kann die Permeabilität μ, die eine Funktion von H ist, große Werte annehmen, und deshalb gilt für starke Ströme und kleine Frequenzen für ein Leiterpaar:

$$2L_i \gg L_e.$$

Für die gewöhnlichen nicht ferromagnetischen Leiter ist $2L_i$ klein, und es kann gegenüber L_e vernachlässigt werden.

Hängt tatsächlich μ nicht von H ab, dann ist $2L_i = \mu$ und gleich 1, wenn die Drähte nicht ferromagnetisch sind, aber ungefähr 100 und größer, wenn sie aus Eisen bestehen. Für den Durchmesser $2r = 4$ mm und für den Abstand a von etwa 40 cm finden wir aus der Formel (4) $L_e = 21{,}2$. Hieraus erhält man für nicht ferromagnetische Leiter $\frac{2L_i}{L_e} \approx 0{,}05$ und für solche aus Eisen ≈ 20.

Die Permeabilität des Eisens hängt stark von der Reinheit des Eisens, von der Korngröße, von dem Vorhandensein innerer Spannungen usw. ab. Deshalb hängt auch der Widerstand des Eisendrahtes von diesen Eigenschaften ab.

Der experimentelle Teil. Die Aufgabe besteht darin, den Wirk- und den Blindwiderstand von Eisendrähten zu messen und aus diesen Daten die Größe L_i zu erhalten.

Der Wirkwiderstand R der Drähte, der die Leistung P absorbiert und in Wärme umwandelt, wird aus der Beziehung

$$R = \frac{P}{I_{\text{eff}}^2} \tag{10}$$

bestimmt. Den Gesamtwiderstand Z des Leiters erhält man als das Verhältnis

$$\frac{V_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = Z. \tag{11}$$

Zur Bestimmung von R muß man ein Wattmeter benutzen, dessen Stromwicklung in den Kreis des zu messenden Eisendrahtes geschaltet wird (Abb. 155).

Bei dem kleinsten Widerstand der eingeschalteten Schiebewiderstände R_1 und R_2 erreicht der durch die Drähte fließende Strom etwa 17 A. Das Amperemeter A und das Wattmeter W, die in dieser Aufgabe benutzt werden, sind

nicht für solche großen Ströme bemessen. Deshalb werden diese Geräte über einen Meßtransformator (Stromwandler) angeschlossen (Abb. 156).

Die Stromwicklung des Wattmeters und das Amperemeter werden an die Klemmen U_1 und U_2 des Stromwandlers angeschlossen, und an den Draht schließt man die Klemmen K und 50 A oder K und 15 A an (letztere ist in Abb. 156 nicht aufgeführt). Im ersten Fall müssen die Anzeigen des Amperemeters und des Wattmeters mit zehn und im zweiten mit drei multipliziert werden. Um ein Beschädigen der Geräte zu vermeiden, muß beim ersten Einschalten der Wandler zu Hilfe genommen werden.

Das Voltmeter V muß über einen Zusatzwiderstand eingeschaltet werden, weil bei starken Strömen die Spannung 7,5 Volt übersteigt und damit auch den Bereich des hierbei benutzten Voltmeters. Nur wenn man sich davon überzeugt hat, daß man die Ströme und Spannungen auch ohne Zwischenschalten

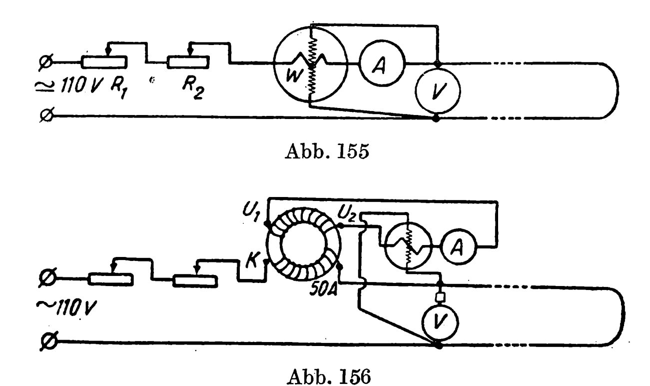


Abb. 155

Abb. 156

eines Stromwandlers und eines Zusatzwiderstandes zum Voltmeter messen kann, können die Meßgeräte nach der Schaltung 155 angeschlossen werden.

Die Messung. 1. Man mißt die Länge der Drähte mit einem Bandmaß und ihren Durchmesser mit einer Mikrometerschraube.

2. Man mißt mit Hilfe des Volt- und des Amperemeters (nach der Schaltung der Abb. 155) den Widerstand R der Drähte bei Gleichstrom. Die Größe R wird als Mittel aus mehreren Messungen genommen. Man rechnet den erhaltenen Widerstand bei Gleichstrom in Ω/km um.

3. Man liest die Spannung, die Stromstärke und die Leistung bei Wechselstrom (nach der Schaltung der Abb. 156) für verschiedene Stellungen der Gleitkontakte der Schiebewiderstände ab. (Dabei darf man den für starke Ströme bestimmten Widerstand erst dann herausnehmen, wenn der für kleine Stromstärken bestimmte vollends herausgenommen ist.)

Man berechnet den Wirk-, den Gesamt- und den Blindwiderstand bei Wechselstrom (in Ω/km) und die innere Induktivität L_i. Der Blindwiderstand wird nach der Formel bestimmt:

$$\omega L = \sqrt{Z^2 - R^2}.$$

Die Größe $2L_i$ wird auf Grund von (1) aus der Formel

$$2L_i = L - L_e$$

bestimmt, dabei wird L_e aus der Formel (4) errechnet.

4. Die erhaltenen Größen werden auf 1 km Drahtlänge umgerechnet und graphisch dargestellt.

Anmerkung. 1. Bei der Berechnung muß man berücksichtigen, daß beim Einschalten der vorliegenden Schaltungen (Abb. 155, 156) ein Teil des vom Wattmeter und Amperemeter registrierten Stromes durch das Voltmeter fließt. Bei dieser Aufgabe wird ein niederohmiges Voltmeter benutzt, so daß erhebliche Ströme durch das Meßgerät fließen und eine Korrektion der Anzeige des Amperemeters (und ebenfalls eine proportionale Korrektion der Anzeige des Wattmeters) erforderlich machen. Diese Korrektion ergibt sich aus der Formel:

$$\Delta I = \frac{V}{R_{\text{Voltmeter}}};$$

folglich ist

$$I_{\text{Draht}} = I_{\text{gemessen}} - \Delta I$$

(ΔI entnimmt man einer Kurve, die der Aufgabe beigefügt wird). Dabei wird nicht berücksichtigt, daß die Phase des Stromes in dem System der Drähte und im Voltmeter nicht genau übereinstimmt. Jedoch kann man in erster Näherung diese Phasendifferenz vernachlässigen, weil, wie man aus den Zahlenwerten von Z und R ersieht, der Blindwiderstand im Vergleich zum Wirkwiderstand klein ist.

Die Korrektion an der Anzeige des Wattmeters hat die Form:

$$P = P_{\text{gemessen}} \frac{I_{\text{Draht}}}{I_{\text{gemessen}}}.$$

2. Der Widerstand der Drähte, in denen die zu messende Leistung verbraucht wird, ist verhältnismäßig niedrig. Unter diesen Bedingungen sind die zu messende und die vom Meßgerät selbst verbrauchte Leistung ihrer Größe nach vergleichbar, was zu bedeutenden Fehlern Anlaß gibt. Da jedoch diese Fehler systematisch auftreten, kann man, wenn man einen Gleichstrom durch die Schaltung schickt, leicht feststellen, daß zur Erhaltung richtiger Anzeigen die Ablesungen am Wattmeter mit einem bestimmten Faktor multipliziert werden müssen (er beträgt 0,90 bis 0,95). Dieser Korrektionsfaktor ist gleich dem Verhältnis aus dem Produkt der Anzeigen des Amperemeters und des Voltmeters zu der Anzeige des Wattmeters, d. h.

$$\frac{I_= V_=}{W_=}.$$

Schickt man durch die Schaltung einen Wechselstrom, so ändert sich die Beziehung zwischen den Widerständen. Streng gesagt, ändert sich der Wert des Faktors, jedoch so wenig, daß man es vernachlässigen kann.

Damit ist der gesamte Korrektionsfaktor für die Anzeige des Wattmeters gleich

$$\frac{I_{\text{Draht}}}{I_{\text{gemessen}}} \cdot \frac{I_= V_=}{W_=}.$$

Aufgabe 58

Die Wirkungsweise der Kontaktgleichrichter

Zubehör: 1. Kupferoxydulgleichrichter für Spannungen bis zu 15 V, 2. Schiebewiderstände von 1000 Ω und von 200 Ω, 3. Voltmeter für Gleich- und Wechselstrom, 4. zweipoliger Umschalter, 5. zu untersuchende Selengleichrichter, 6. Milliamperemeter, 7. Regeltransformator, 8. Transformator, 9. Oszillograph, 10. Wattmeter, 11. Gleichrichtersäulen.

Einführung. Mit *Kontaktgleichrichter* wird eine Einrichtung bezeichnet, die aus zwei verschiedenen Metallelektroden besteht, zwischen denen eine Halbleiterschicht liegt, und die die Eigenschaft besitzt, daß ihr Widerstand sowohl von der Größe als auch von der Richtung der angelegten Spannung abhängt (siehe auch Aufgabe 59). Mit anderen Worten: eine solche Einrichtung besitzt Gleichrichter- oder Detektoreigenschaften. Manchmal werden diese als *Ventileigenschaften* bezeichnet.

Typische Beispiele von Kontaktgleichrichtern sind die Kupferoxydul- und die Selengleichrichter, die hauptsächlich für Ströme von technischer

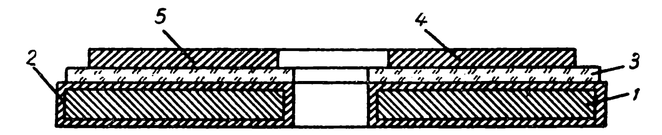


Abb. 157. Schematischer Querschnitt durch einen Selengleichrichter: *1* Eisenplatte; *2* Nickelschicht (Kontaktelektrode); *3* Selenschicht; *4* Schicht aus einer Legierung von Bi-Cd-Sn (Deckelektrode); *5* Sperrschicht, die an der Grenze zwischen Deckelektrode und Selen auftritt.

Frequenz, z. B. 50 Hz, geeignet sind, und verschiedene Typen von Kristalldetektoren, die in der Radiotechnik verwendet werden. Außerdem gibt es viele andere Arten von Kontaktgleichrichtern, die jedoch keine technische Anwendung gefunden haben.

Alle Arten von Kontaktgleichrichtern haben prinzipiell ein und denselben Aufbau. Dabei geht die Gleichrichtung bei Gleichrichtern und Detektoren von hoher Gleichrichterwirkung an der Grenze zwischen Halbleiterschicht und einer der Elektroden vor sich, und an der Grenzfläche der gleichen Schicht und der anderen Elektrode ist die Gleichrichtung unwesentlich oder fehlt vollkommen. Aus diesem Grunde betrachtet man gewöhnlich bei der Diskussion der Gleichrichtereigenschaften nur den Kontakt der einen Elektrode mit dem Halbleiter und nimmt an, daß bei der zweiten Elektrode die Gleichrichtung fehlt.

Die Wirkung der Kontaktgleichrichter beruht auf der Fähigkeit der Kontakte zwischen einigen Metallen und Halbleitern, den Strom in einer Richtung besser zu leiten als in der anderen. Dabei tritt eine effektive Gleichrichtung in der Regel nur dann auf, wenn im gleichrichtenden Kontakt an der Grenze zwischen Metall und Halbleiter eine sehr dünne Schicht von stark erhöhtem Widerstand, d. h. eine *Sperrschicht*, vorhanden ist.

Der Selengleichrichter. Der Selengleichrichter besteht aus zwei Elektroden von verschiedenem Metall und einer dünnen kristallisierten Selenschicht zwischen ihnen (Abb. 157). Die Selenschicht hat eine Dicke von 0,05 bis 0,1 mm. Die eine Elektrode besteht aus einer vernickelten Eisenplatte. Sie wird gewöhnlich *Kontaktelektrode* genannt. Die zweite Elektrode ist eine dünne Schicht aus einer Legierung leichtschmelzbarer Metalle, wie Kadmium — Wismut — Zinn, und wird *Ventilelektrode* (Deckelektrode) genannt.

Eine typische Abhängigkeit der Stromdichte j beim Gleichrichter von der angelegten Spannung U ist in Abb. 158 dargestellt. Die Stromrichtung, die einem kleinen Widerstand entspricht, heißt *Durchlaßrichtung*. Die entgegengesetzte Stromrichtung, die einem hohen Widerstand entspricht, heißt *Sperrrichtung*. Je nach der Stromrichtung spricht man von Durchlaßspannung und Durchlaßwiderstand oder Sperrspannung und Sperrwiderstand.

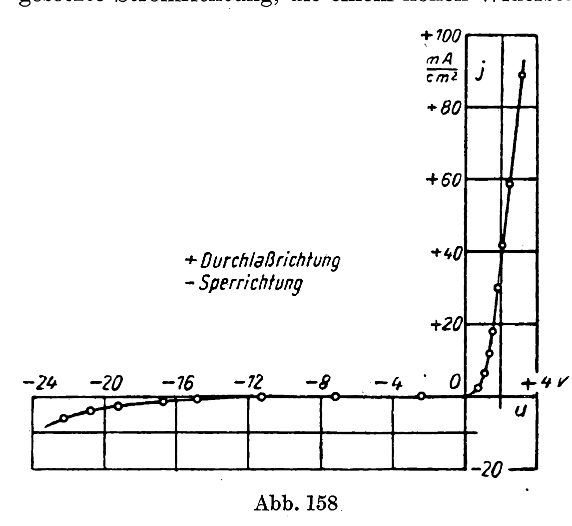


Abb. 158

Aus der Abb. 158 geht *die nichtlineare Abhängigkeit des Stromes von der Größe der angelegten Spannung* sowohl in der Durchlaß- als auch in der Sperrrichtung und ebenfalls *die nichtsymmetrische Charakteristik in bezug auf die Richtung des Stromes und der Spannung* klar hervor.

Bei den Selengleichrichtern entspricht die Durchlaßrichtung der Bewegung der Elektronen von der Deckplatte durch das Selen zur Kontaktplatte. Das entspricht dem Pluspol an der Eisenplatte und dem Minuspol an der Legierungsschicht.

In Durchlaßrichtung nimmt der als Funktion der angelegten Spannung gemessene Widerstand des Gleichrichters rasch ab und strebt einem konstanten Wert zu. In Sperrichtung nimmt zuerst der Widerstand des Gleichrichters zu, erreicht ein Maximum und nimmt dann ab. Eine typische Abhängigkeit des Widerstandes von der angelegten Spannung ist in Abb. 159 dargestellt.

Die Eigenschaften des Gleichrichters werden häufig charakterisiert durch den *Gleichrichtungskoeffizienten*, d. h. durch das Verhältnis der Ströme in Durchlaß- und in Sperrichtung, die bei ihrer Größe nach gleicher Durchlaß- und Sperrspannung gemessen werden. In Abb. 160 ist die Abhängigkeit des Gleichrichtungskoeffizienten K von der absoluten Größe der an den Gleichrichter angelegten Spannung dargestellt. Mit zunehmender Spannung wächst der Gleichrichtungskoeffizient rasch an, erreicht ein Maximum und nimmt dann ab. Die Abnahme des Gleichrichtungskoeffizienten mit zunehmender Spannung

wird durch ein rasches Anwachsen des Stromes in der Sperrichtung hervorgerufen.

Im Selengleichrichter entsteht die Sperrschicht, und damit auch die Gleichrichtung, an der Grenze zwischen der Selenschicht und der Deckplatte. Die Gleichrichterwirkung hängt von den Eigenschaften der Oberfläche der Selenschicht ab. Um eine hohe Gleichrichterwirkung zu erzielen, unterwirft man die Oberfläche der Selenschicht vor dem Aufbringen der Deckelektrode verschiedenen besonderen Bearbeitungen. An der Grenze zwischen der Selenschicht und der Kontaktelektrode fehlt praktisch jede Gleichrichtung. Diese Elektrode spielt nur die Rolle eines guten elektrischen Kontaktes mit der Selenschicht. Das wird durch die Auswahl eines geeigneten Elektrodenmaterials (Nickel) erreicht.

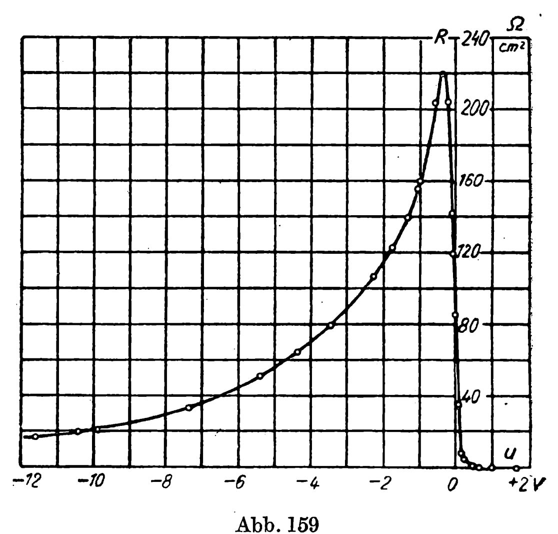


Abb. 159

In der Technik wird gewöhnlich die Güte eines Gleichrichters nicht durch seinen Gleichrichtungskoeffizienten charakterisiert, der bei irgendeiner Spannung gemessen worden ist, sondern durch die Größe der Durchlaß- und der Sperrspannung, die z. B. bei einer Dichte des Durchlaßstromes von 40 mA/cm² und einer Dichte des Sperrstromes von 4 mA/cm² gemessen worden ist. Je höher die Sperrspannung und je niedriger die Durchlaßspannung für die angegebenen Stromdichten, desto besser ist die Güte des Gleichrichters.

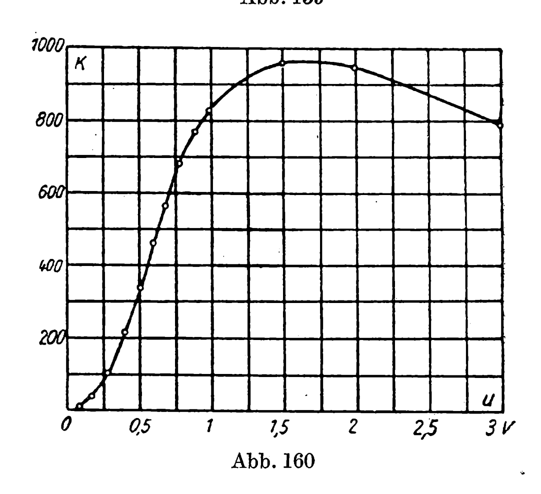


Abb. 160

Bei der Benutzung der Gleichrichter in Schaltungen wird auf eine gleichrichtende Platte eine Spannung gegeben, die 20 bis 25 V nicht übersteigt. Benötigt man höhere, gleichgerichtete Spannungen, so werden die gleichrichtenden Platten hintereinandergeschaltet, so daß auf jede Platte eine

Spannungsamplitude von 20 bis 25 V entfällt. Zum bequemeren Zusammenschalten werden die Platten in Form von Scheiben gefertigt, die mit einem zentrischen Loch versehen sind. Beim Zusammenschalten werden die Platten abwechselnd mit federnden Messingscheiben auf einen Bolzen isoliert aufgereiht. Die Messingscheiben bewirken einerseits einen Kontakt mit der Deckelektrode der einen Platte und andererseits einen Kontakt mit der Kontaktelektrode der nächsten gleichrichtenden Platte. Das Prinzip des Zusammenschaltens geht aus der Abb. 161 klar hervor.

Die Selengleichrichter werden bei natürlicher Kühlung mit Strömen belastet, die nicht größer als 50 mA/cm² sein dürfen. Bei künstlicher Kühlung kann die Belastung erhöht werden. Benötigt man höhere Stromstärken, so werden die Platten parallelgeschaltet.

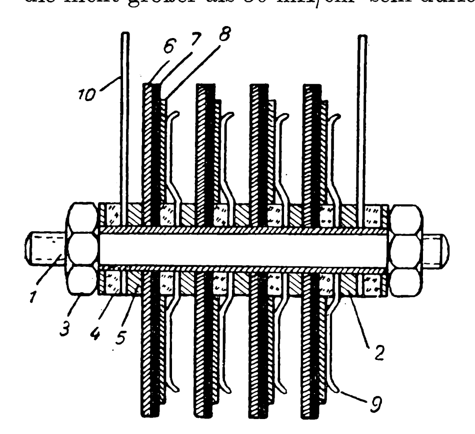


Abb. 161. Das Schema eines zusammengesetzten Selengleichrichters: *1* und *3* Bolzen mit Muttern; *2* Isolationsrohr; *4* Isolationsscheiben; *5* Metallscheiben; *6* Kontaktelektrode der gleichrichtenden Platte; *7* Selenschicht; *8* Deckplatte der gleichrichtenden Platte; *9* federnde Kontaktscheibe; *10* metallische Zuführung.

Man stellt Selengleichrichter auf folgende Weise her: Auf die vernickelte Eisenscheibe, die auf 270 bis 280° C erwärmt ist, wird eine Schicht geschmolzenen Selens aufgetragen und dann die Scheibe mit der Schicht rasch abgekühlt. Das abgekühlte feste Selen hat das Aussehen von schwarzem undurchsichtigem Glas (amorphes Selen). Dann wird die Scheibe mit der erhärteten amorphen Selenschicht bei 140° C gepreßt. Beim Preßprozeß wird die Selenschicht weich, verteilt sich gleichmäßig und kristallisiert.

Im amorphen Zustand stellt Selen einen guten Isolator dar. Nach der Kristallisation nimmt sein Widerstand jedoch um das 10^6-fache ab und nimmt Werte von 1000 bis 2000 $\Omega \cdot$ cm an.

Die Scheiben mit der kristallisierten Selenschicht unterwirft man einer thermischen Behandlung, d. h., man tempert sie unter Atmosphärendruck in Öfen, die auf Temperaturen von 214 bis 216° C gehalten werden. Als das Ergebnis einer solchen Temperung verkleinert sich der Widerstand der Selenschicht um das 2- bis 3fache, und damit wird die Gleichrichtereigenschaft verbessert. Um eine weitere Verstärkung der Gleichrichtereigenschaften zu erhalten, unterwirft man die Scheibe nach der thermischen Behandlung einer Temperung in einem Ofen von 140 bis 150° C in einer Schwefeldampfatmosphäre. Als das Ergebnis einer solchen Behandlung bildet sich auf der Oberfläche der Selenschicht ein sehr dünnes isolierendes Schwefelhäutchen und eine Selen-Schwefel-Legierung, d. h. eine künstliche Sperrschicht. Auf die so bearbeiteten Schichten wird eine metallische Schicht, die Deckelektrode, aus einer geschmolzenen Legierung gespritzt.

Die erhaltene gleichrichtende Platte wird einer elektrischen Formierung unterworfen. Dazu wird etwa eine halbe Stunde lang ein starker Strom in Sperrichtung durch die Platte geschickt. Als das Ergebnis einer solchen Formierung werden die Gleichrichtereigenschaften stark verbessert und stabilisiert.

Der Kupferoxydulgleichrichter. Der Kupferoxydulgleichrichter besteht aus einer Kupferplatte, die auf der einen Seite eine Kupferoxydulschicht besitzt. Auf diese Oxydulschicht ist eine Zink- oder Aluminiumschicht aufgebracht. Als eine Elektrode dient die Kupferplatte, als die andere die Zink- oder Aluminiumschicht. Die Gleichrichtung tritt an der Grenze zwischen der Kupferplatte und der Kupferoxydulschicht auf, d. h., die Kupferplatte ist hier die Ventilelektrode. Die Zink- oder Aluminiumschicht bildet die Kontaktelektrode. Manchmal wird die Kontaktelektrode federnd hergestellt. In diesem Fall wird die Oberfläche der Kupferoxydulschicht zur Verbesserung des Kontaktes mit Graphit eingerieben und die Elektrode aus Blei gefertigt. Der Aufbau des Kupferoxydulgleichrichters ist in Abb. 162 dargestellt.

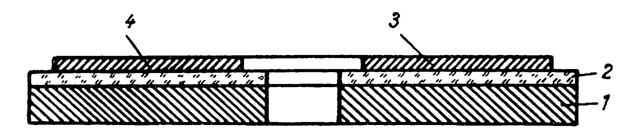


Abb. 162. Schematischer Querschnitt durch einen Kupferoxydulgleichrichter: *1* Kupferscheibe (Ventilelektrode); *2* Kupferoxydulschicht; *3* Zink- oder Aluminiumschicht (Kontaktelektrode); *4* Sperrschicht, die an der Grenze zwischen der Ventilelektrode und der Kupferoxydulschicht liegt.

Die Durchlaßrichtung entspricht einer Bewegung der Elektronen von dem Kupfer zu dem Kupferoxydul, d. h., wenn am Kupfer der Minuspol und an der Kontaktelektrode der Pluspol liegt.

Der Charakter der Abhängigkeit des Stromes von der angelegten Spannung ist für den Kupferoxydulgleichrichter dem des Selengleichrichters analog.

Der Kupferoxydulgleichrichter unterscheidet sich von dem Selengleichrichter durch einen etwas höheren Gleichrichtungskoeffizienten für kleine Spannungen. Jedoch können die Kupferoxydulgleichrichter nicht bei höheren Spannungen als 12 bis 15 V arbeiten, weil der Strom in der Sperrichtung stark anwächst.

Historisch gesehen, wurden die Kupferoxydulgleichrichter früher entwickelt als die Selengleichrichter, doch haben letztere eine stärkere Verbreitung gefunden.

Die Theorie der Gleichrichterwirkung. Wie schon oben angeführt, tritt nur dann eine Gleichrichtung an der Grenze zwischen Metall und Halbleiter auf, wenn an dieser Grenze eine dünne Schicht von hohem Widerstand, d. h. eine Sperrschicht, vorhanden ist, die die Rolle einer Potentialbarriere zwischen beiden Stoffen spielt. Das Auftreten einer Schicht von erhöhtem Widerstand hängt mit der Kontaktspannung zwischen zwei sich berührenden Stoffen zusammen.

Bekanntlich fließen bei Berührung zweier Körper, die verschiedene Austrittsarbeiten besitzen, Elektronen von dem einen Körper zu dem anderen über. Dabei lädt sich der Körper mit kleiner Austrittsarbeit positiv und der mit größerer Austrittsarbeit negativ auf, d. h., an der Grenze zwischen zwei Körpern tritt eine elektrische Doppelschicht auf. Die zwischen den Körpern auftretende Potentialdifferenz wird *Kontaktspannung* genannt.

Die dabei entstehenden Ladungen sind nicht streng an der Oberfläche verteilt (wie man es in der Elektrostatik annimmt), sondern sind in einer Grenzschicht endlicher Dicke verteilt. Bei Metallen, die eine hohe Elektronendichte besitzen, sitzt diese Ladung fast genau auf der Oberfläche (in einer Schicht von 1 bis 2 Atomlagen), bei Halbleitern, die eine geringe Leitfähigkeit besitzen, verteilen sie sich in einer wesentlich größeren Tiefe. Die effektive Schichtdicke der Raumladung kann bei Halbleitern den Abstand zwischen den Atomen (Gitterkonstante) um einige Größenordnungen überschreiten.

Bringen wir ein Metall in Kontakt mit einem Elektronenhalbleiter, der eine kleinere Elektronenaustrittsarbeit besitzt als das Metall selbst, so lädt sich das Metall nach Einstellung eines Gleichgewichtes negativ auf, und im Halbleiter entsteht als Resultat der Konzentrationsabnahme der Elektronen in Grenznähe eine der Größe nach gleiche positive Ladung. Je kleiner die Elektronendichte in der an das Metall angrenzenden Halbleiterschicht (Randschicht) im Vergleich zu der in ihrem Inneren herrschenden ist, desto größer ist der Widerstand dieser Randschicht gegenüber dem des Inneren. Deshalb entsteht nur bei Berührung einer Metallelektrode mit dem Halbleiter eine Randschicht von erhöhtem Widerstand. Diese infolge Verarmung von Elektronen auftretende Randschicht wird gewöhnlich *physikalische Sperrschicht* genannt.

Eine Sperrschicht entsteht an der Grenze zwischen Metall und Elektronenhalbleiter nur dann, wenn das angegebene Verhältnis der Austrittsarbeiten vorliegt, d. h., wenn die Austrittsarbeit aus dem Metall größer ist als die Austrittsarbeit aus dem Halbleiter mit Elektronenleitung[1]).

Wenn jedoch die Austrittsarbeit aus dem Elektronenhalbleiter größer ist als aus dem mit ihm in Kontakt stehenden Metall, so entsteht keine Potentialschwelle und damit auch keine Schicht von erhöhtem Widerstand. Da hierbei der Halbleiter negativ aufgeladen wird, entsteht in der Grenzschicht ein Konzentrationsüberschuß der Elektronen und damit eine Schicht mit einem verkleinerten Widerstand. Ein solcher Kontakt wirkt nicht als Gleichrichter,

---

[1]) Alle Halbleiter werden in zwei Arten eingeteilt: Elektronen- oder Überschußhalbleiter und „Löcher"- oder Defektelektronenhalbleiter. In den Halbleitern der ersten Art wird die Leitung von Elektrizitätsträgern mit negativem Vorzeichen, den Elektronen, getragen und in Halbleitern der zweiten Art von Elektrizitätsträgern mit positivem Vorzeichen, die man auch „Löcher" nennt.

Eine Gleichrichtung tritt auch an der Grenze zwischen Metall und Defektelektronenhalbleiter auf. Dazu muß aber eine andere Beziehung zwischen den Austrittsarbeiten des Metalls und des Halbleiters gelten. Die Richtung der Gleichrichtung ist dabei gerade umgekehrt als bei den Elektronenhalbleitern. Bei Elektronenhalbleitern entspricht die Durchlaßrichtung der Bewegung der Elektronen vom Halbleiter zum Metall und für Löcherhalbleiter der vom Metall zum Halbleiter. Selen- und Kupferoxydulgleichrichter sind Beispiele von Kontaktgleichrichtern mit Löcherleitung. Germaniumdetektoren sind Kontaktgleichrichter mit Elektronenleitung.

weil der verkleinerte Widerstand der Schicht, die eine Dicke von 10^{-5} bis 10^{-6} cm besitzt, sich auf den Gesamtwiderstand der Halbleiterschicht, die zwischen den Gleichrichterelektroden eingeschlossen ist, praktisch nicht auswirkt.

Wir betrachten nun den Einfluß des an die Randschicht angelegten Feldes. Die Spannung legen wir so an die Metallkontakte, daß sie der Kontaktspannung entgegengerichtet ist, d. h. den Pluspol an das Metall und den Minuspol an den Halbleiter. Dabei wird das Feld in der Randschicht schwächer, und die positive Raumladung nimmt in dieser Randschicht ab. Das führt zu einer Abnahme der Dicke und folglich auch des Widerstandes der Sperrschicht. Erreicht die angelegte Spannung die Größe der Kontaktspannung (doch mit umgekehrtem Vorzeichen), so verschwindet die Raumladung und damit auch die Schicht mit erhöhtem Widerstand, und der Gleichrichterwiderstand nimmt den Ohmschen Widerstand des Halbleiters an. Die weitere Erhöhung des Stromes geht nach einem linearen Gesetz. Diese Richtung des Feldes entspricht der Durchlaßrichtung.

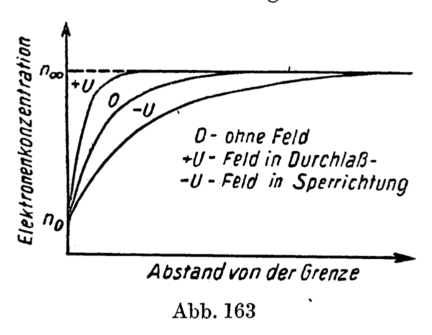


Abb. 163

Legen wir eine Spannung entgegengesetzter Richtung an, die also mit der Richtung der Kontaktspannung zusammenfällt, so verbreitert sich das Gebiet der positiven Raumladung, d. h. das Gebiet der Konzentrationsabnahme der Elektronen. Das führt zur Erhöhung des Widerstandes der Sperrschicht.

Deshalb kann man mit der Annahme einer Änderung der Elektronenkonzentration in der Randschicht des Halbleiters in Abhängigkeit von der Größe und der Richtung der angelegten Spannung qualitativ die Gleichrichtereigenschaften des Kontaktes zwischen Metall und Halbleiter erklären.

In Abb. 163 sind die Kurven der Elektronendichteverteilung n im Halbleiter in der Nähe des mit ihm in Kontakt stehenden Metalls ohne Feld (O) und mit Feld in Durchlaßrichtung ($+U$) und in Sperrichtung ($-U$) schematisch dargestellt.

Die theoretische Berechnung der Abhängigkeit des Stromes von der Spannung führt zu einer Formel der Form

$$I = I_0 \cdot (e^{\alpha U_c} - 1), \tag{1}$$

wobei I_0 eine Konstante bedeutet, die von den Eigenschaften des Halbleiters und der Kontaktspannung zwischen Metall und Halbleiter abhängt; U_c ist die an die Sperrschicht gelegte Spannung, und

$$\alpha = \theta \frac{e}{kT},$$

wobei e die Ladung eines Elektrons, k die Boltzmannkonstante, T die absolute Temperatur und θ einen von dem Aufbau der Sperrschicht abhängenden

Koeffizienten darstellen. Bei Zimmertemperatur beträgt für eine gleichartige Sperrschicht ($\theta = 1$)

$$\alpha = \frac{4{,}8 \cdot 10^{-10}}{1{,}38 \cdot 10^{-16} \cdot 290 \cdot 300} = 40 \left[\frac{1}{V}\right].$$

Weil stets in Reihe mit der Sperrschicht die Halbleiterschicht geschaltet ist und der Spannungsabfall am gesamten Gleichrichter gemessen wird (und nicht an der Sperrschicht), muß die Formel umgeschrieben werden in

$$I = I_0\left(e^{\alpha \cdot (U - IR_S)} - 1\right), \tag{2}$$

wobei U die an den Gleichrichter angelegte Spannung, IR_S der Spannungsabfall an der Halbleiterschicht mit dem Widerstand R_S ist. Übereinstimmend mit der Formel (1) wächst der Strom in Durchlaßrichtung ($U_c > 0$) exponentiell an. Bei genügend hoher Spannung ist die Größe $e^{\alpha U_c} \gg 1$, $U \approx U_c$, und die Formel kann in der Form geschrieben werden:

$$I = I_0 \cdot e^{\alpha \cdot U_c} = I_0 \cdot e^{\alpha U}. \tag{3}$$

Für noch höhere Spannungen, wenn der Spannungsabfall an der ganzen Halbleiterschicht mit dem Spannungsabfall am Gleichrichter vergleichbar wird, muß man die Abhängigkeit in der Form schreiben:

$$I = I_0 \cdot e^{\alpha(U - IR_S)}. \tag{4}$$

Bei starken Durchlaßströmen wird die Charakteristik linear, d. h., der differentielle Widerstand strebt einem konstanten Wert zu. Das folgt aus der Formel

$$R = \frac{dU}{dI} = \frac{1}{\frac{dI}{dU}} = \frac{1}{I\alpha} + R_S. \tag{5}$$

Die Abhängigkeit in Form der Formel (3) ist für den Vergleich mit den experimentell bestimmten Charakteristiken sehr bequem. Die Darstellung der experimentellen Ergebnisse in einem Koordinatensystem ($\lg I; U$) muß die Gerade ergeben:

$$\lg I = \lg I_0 + \alpha U$$

mit dem Anstieg $\alpha = \frac{\Delta \lg I}{\Delta U}$, wenn der theoretische Charakter der Abhängigkeit mit dem experimentellen zusammenfällt.

In Sperrichtung (bei negativem U) strebt die Stromstärke, übereinstimmend mit den Formeln (1) oder (2), mit zunehmender Spannung zur Sättigung, d. h. zur konstanten Größe I_0. In dem Experiment nimmt die Stromstärke in der Sperrichtung bei kleinen Spannungen tatsächlich verzögert zu, d. h., der Widerstand wächst. Jedoch beginnt bei einer bestimmten, genügend hohen Spannung ein rasches Anwachsen des Sperrstromes. Das erklärt man mit Effekten, die von dem starken Feld hervorgerufen werden, das in der Sperrschicht entsteht. Zum Beispiel kann infolge einer hohen Feldstärke, die Werte von 10^5 bis 10^6 V/cm erreicht, die Kontaktspannung, d. h. die Höhe der Potentialschwelle zwischen den sich in Kontakt befindlichen Körpern, stark

abnehmen. Das hat eine Verkleinerung des Widerstandes der Sperrschicht zur Folge und führt zu einem Anwachsen des Sperrstromes und zu einer Abnahme des Widerstandes.

Übung 1

Die Aufnahme der Widerstandscharakteristik eines Selengleichrichters

1. Man setzt die Schaltung zur Aufnahme der Charakteristik nach der Abb. 164 zusammen. Darin ist G ein Kupferoxydulgleichrichter, der als

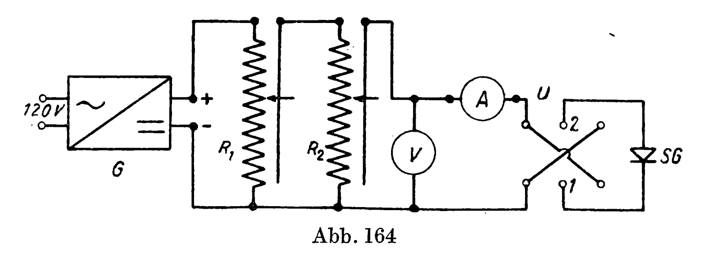


Abb. 164

Gleichstromquelle dient. Er liefert eine Spannung bis zu 15 V. (Die Vorderansicht des Gleichrichters ist in Abb. 165 zu sehen.) R_1 und R_2 sind Schiebewiderstände von 1000 Ω, die auf einem Brett fest montiert sind. Die dargestellte Schaltung mit den Schiebewiderständen erlaubt eine gleichmäßige Regulierung des Stromes in einem weiten Bereich. V ist das Gleichstromvoltmeter. Für kleine Spannungen (bis 1,5 V) und auch für hohe Spannungen empfiehlt es sich, ein Voltmeter vom Typ МПЛ-46[1]) mit den Bereichen 3, 15, 75 V zu benutzen. Für höhere Spannungen kann man auch ein Voltmeter benutzen, das auf die Bereiche 5, 50, 100, 300, 500 V umgeschaltet werden kann. U ist der zweipolige Umschalter und SG der zu untersuchende elementare Gleichrichter, z. B. eine gleichrichtende Selenplatte.

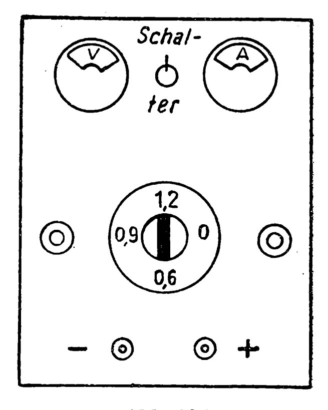


Abb. 165

2. Nach dem Zusammensetzen der Schaltung wird die volle Widerstandscharakteristik für zwei gleichrichtende Platten aufgenommen.

Zur Aufnahme der Charakteristiken empfiehlt es sich, vom Maximalstrom in Sperrichtung (nicht über 50 mA) auszugehen, allmählich den Strom bis zum Verschwinden zu verkleinern, die Stromrichtung umzukehren (durch den Umschalter U) und durch allmähliches Erhöhen der Stromstärke bis zu 0,5 bis 1,0 A die Charakteristiken in Durchlaßrichtung aufzunehmen.

[1]) Anm. d. Übers.: Multizet, Multavi oder ähnliches Vielfachinstrument.

Weil die durch den Gleichrichter fließende Stromstärke von der Spannung nach einem charakteristischen Gesetz abhängt, ist es bequemer, bestimmte Stromstärken einzustellen und die Größe der erhaltenen Spannungen am Voltmeter abzulesen. Es empfiehlt sich dabei, die vorgegebenen Stromwerte logarithmisch, z.B. 1, 1,5, 2, 3, 5, 7, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 70, 100, 150, 200, 300, 500 mA usw., sowohl in Durchlaßrichtung als auch in Sperrichtung zu wählen.

Zur Erhaltung richtiger Spannungswerte am Gleichrichter muß man den Spannungsabfall am Milliamperemeter berücksichtigen. Dazu ist es notwendig, den Widerstand des Milliamperemeters zu kennen. Jedoch ist es leichter, die Korrektur unmittelbar durch Messen des Spannungsabfalls am Milliamperemeter bei kurzgeschlossenen Klemmen *1* und *2* des Umschalters für die bei der Aufnahme der Charakteristik benutzten Stromstärken zu bestimmen.

Die Meßergebnisse für die Durchlaß- und die Sperrichtung werden in Form von Tabellen zusammengestellt.

I mA	U gemessen V	ΔU Korrektur V	U korrigiert V	R Ω	K	$\lg I$	$\lg R$	$\lg K$

3. Man stellt die Charakteristiken in linearen und halblogarithmischen Koordinaten dar.

Im Falle linearer Koordinaten wird über den Koordinatenachsen der Strom in mA und die Spannung in V aufgetragen. Dabei trägt man die Charakterstiken für die Durchlaß- und für die Sperrichtung in das gleiche Koordinatennetz ein. Man zählt dabei den Durchlaßstrom und die Durchlaßspannung als positiv und den Sperrstrom und die Sperrspannung als negativ. Im Falle halblogarithmischer Koordinaten trägt man auf der Ordinatenachse den Zehnerlogarithmus des absoluten Stromwertes in Durchlaß- und Sperrichtung und auf der Abszissenachse den absoluten Spannungswert in Volt auf.

4. Man bestimmt aus der halblogarithmischen Kurve für die Charakteristik in Durchlaßrichtung die Parameter a und I_0 der Charakteristikengleichung (3). Man vergleicht die erhaltenen mit den theoretischen Werten (und bestimmt die Konstante Θ).

5. Man stellt die Abhängigkeit des Widerstandes R des Gleichrichters in Durchlaß- und in Sperrichtung von der Spannung ($\lg R$, $|U|$) graphisch dar.

6. Man stellt die Abhängigkeit des Gleichrichtungskoeffizienten K von der Spannung (bis zur maximal möglichen Durchlaßspannung) mit den Koordinaten ($\lg K$, $|U|$) graphisch dar.

Übung 2

Die Aufnahme der Gleichrichtercharakteristik mit Hilfe eines Oszillographen

1. (Um die Arbeitsweise des Oszillographen kennenzulernen, muß man sich die Beschreibung der Aufgabe 64 ansehen.) Man setzt die Schaltung nach der Abb. 166 zusammen. Hierin ist RT der Regeltransformator

(er wird nach der Skizze an seiner Frontplatte geschaltet); vor dem Einschalten muß sein Drehknopf, der dem Gleitkontakt eines Schiebewiderstandes in Potentiometerschaltungen entspricht, in die Anfangsstellung gedreht werden. *T* ist ein Transformator mit einer Mittelanzapfung seiner Sekundärspule, *R* ein Schiebewiderstand von 200 Ω (wird als Festwiderstand geschaltet), *G* die zu untersuchende gleichrichtende Platte und *KO* ein Kathodenstrahloszillograph.

Die Spannung am Widerstand *R*, die dem durch den Gleichrichter fließenden Strom proportional ist, wird an die Klemmen *v* der vertikalen Ablenkung des Oszillographen gelegt, und die Spannung am Gleichrichter wird an die Klemmen *h* der horizontalen Ablenkung des Oszillographen gelegt. Dann zeichnet der Elektronenstrahl auf den Schirm eine Gleichrichtercharakteristik in das Koordinatensystem: in vertikaler Richtung den Strom und in horizontaler die Spannung.

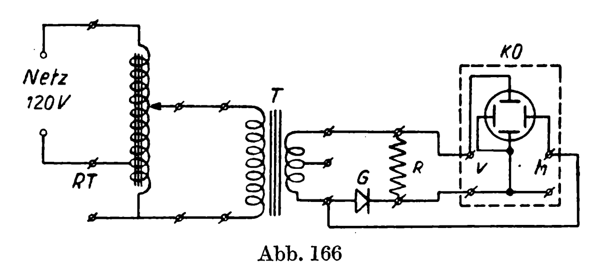


Abb. 166

2. Nach dem Einschalten des Oszillographen wird der Regeltrafo eingeschaltet und sein Drehknopf so weit gedreht, bis auf dem Oszillographen die Charakteristik erscheint.

Durch Änderung der Empfindlichkeit des Oszillographen und der Größe der Spannung am Gleichrichter kann man das am bequemsten zu beobachtende Bild auswählen. Man beobachte die Änderung der Charakteristik mit der Änderung der Wechselspannung. Man zeichne die Charakteristik auf Pauspapier oder photographiere sie.

Wenn die Charakteristik auf dem Schirm des Oszillographen keine übersichtliche Lage einnimmt, so kann man durch Umstecken der Zuleitungen zum Oszillographen und zum Gleichrichter die übliche Orientierung der Charakteristiken bezüglich der Koordinatenachse (ähnlich der der Abb. 158) erreichen.

Man vergleiche die erhaltenen Charakteristiken mit den aus Meßpunkten in linearem Maßstab dargestellten Charakteristiken.

Übung 3

Die Untersuchung der Wirkungsweise von Gleichrichterschaltungen mit Hilfe eines Kathodenstrahloszillographen

1. Man setzt die Schaltung nach der Abb. 167 zusammen. Hierin sind *RT* ein Regeltrafo, *T* ein Transformator mit Mittelabgriff, *R* ein Schiebewiderstand von 200 Ω (als Festwiderstand geschaltet), *GS* eine Gleichrichter-

säule, nach der GRAETZschaltung zusammengesetzt (zweiteilig), *U* ein zweipoliger Umschalter, *KO* ein Kathodenstrahloszillograph, *V* ein Voltmeter für Wechselstrom bis zu 150 V und *A* ein Amperemeter für Gleichstrom bis zu 0,5 A.

In dieser Übung wird der Oszillograph mit Zeitablenkung für die Beobachtung der Form der Spannung am Belastungswiderstand, d. h. für die Abhängigkeit des Stromes von der Zeit, benutzt.

2. Nach dem Einschalten des Oszillographen wird der Regeltrafo eingeschaltet und die Spannung auf 120 bis 130 V eingestellt.

Wenn man den Hebel des Umschalters *U* in die Stellung *I* legt, so wird die eine Hälfte der Gleichrichtersäule kurzgeschlossen und die zweite abgeschaltet. Dann fehlt jede Gleichrichtung, und man beobachtet auf dem Oszillographenschirm eine Sinuskurve. Stellt man den Hebel des Umschalters in die Stellung *II*, dann ist die eine Hälfte des Gleichrichters und der Sekundärspule des Transformators eingeschaltet. Man erhält eine Einweg-Gleich-

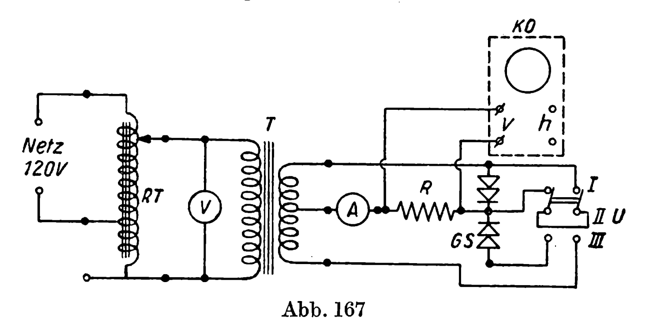


Abb. 167

richterschaltung. Auf dem Oszillographenschirm zeigt sich eine Sinuskurve, deren negative (untere) Halbwellen[1]) abgeschnitten sind. Die notwendige Orientierung des Bildes erreicht man durch Umstecken der Schnüre am Oszillographeneingang.

Wenn der Hebel in die Stellung *III* gelegt wird, sind beide Hälften der Gleichrichtersäule und beide Hälften der Sekundärwicklung des Transformators eingeschaltet, und man erhält eine Zweiweg-Gleichrichterschaltung mit Mittelabgriff.

Für alle drei Stellungen, *I*, *II*, *III*, des Hebels des Umschalters müssen die Oszillogramme abgezeichnet oder photographiert und die Anzeigen des Amperemeters aufgeschrieben werden.

Übung 4

Die Messung des Wirkungsgrades einer Kontaktgleichrichterschaltung

1. Man setzt die Einweg-Gleichrichterschaltung nach der Abb. 168 zusammen. Hierin sind *RT* der Regeltrafo, *W* das Wattmeter (wird nach

[1]) Die Fragen der Glättung der gleichgerichteten Spannung werden genauer in Aufgabe 59 behandelt, in der über Röhrengleichrichter gesprochen wird.

Abb. 169 geschaltet; die Skala entspricht 150 W), *GS* die Gleichrichtersäule, die als Einweg-Gleichrichter zusammengesetzt ist, *V* das Voltmeter für Gleichstrom, *A* das Amperemeter für Gleichstrom mit Umschalter, *R* der

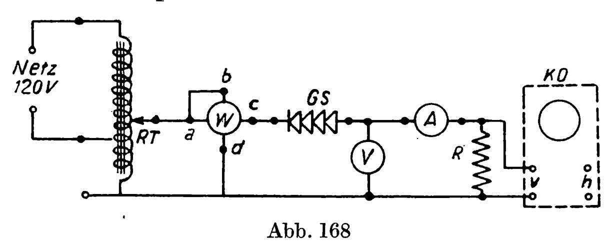


Abb. 168

Belastungswiderstand (Schiebewiderstand von 200 Ω) und *KO* der Oszillograph.

2. Man schaltet den Oszillographen und den Regeltrafo ein, erhöht allmählich die Spannung und nimmt die Abhängigkeit der Anzeige des Amperemeters $I_=$ und des Voltmeters $U_=$ von der Leistung des Wechselstromes $W_\sim$ auf. Bei der Änderung der Stromstärke geht man über 0,5 A nicht hinaus.

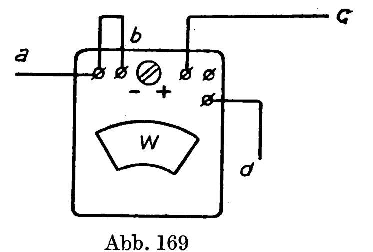


Abb. 169

Die Meßergebnisse werden in einer Tabelle zusammengefaßt, die folgende Größen enthält:

$$W_\sim \text{(Watt)}, \quad I_= \text{(mA)}, \quad U_= (V),$$
$$W_= \text{(Watt)}, \quad \eta\,(\%);$$

dabei ist $W_\sim$ die Leistung des Wechselstromes, die mit dem Wattmeter gemessen wird, $W_=$ die Leistung des Gleichstromes, die gleich $I_= \cdot U_=$ ist, und η der Wirkungsgrad, der gleich $\frac{W_=}{W_\sim}$ ist.

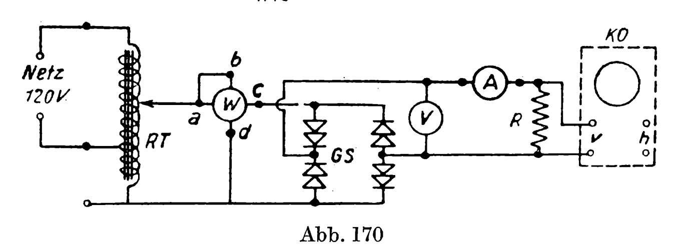


Abb. 170

3. Man zeichnet oder photographiert die Oszillogramme für gleichgerichtete Ströme von 0,2 und 0,5 A.

4. Man stellt die Abhängigkeit des gleichgerichteten Stromes $I_=$, der gleichgerichteten Spannung $U_=$, der gleichgerichteten Leistung $W_=$ und des Wirkungsgrades $\eta\,(\%)$ von der Leistung des Wechselstromes $W_\sim$ dar.

5. Man setzt die Zweiweg-Gleichrichterschaltung (nach GRAETZ) entsprechend der Abb. 170 zusammen (die Bezeichnungen sind die gleichen wie auch in Abb. 168). In dieser Schaltung werden die gleichen Meßgeräte benutzt wie auch in der vorhergehenden. Es wird eine Gleichrichtersäule verwendet, die nach der GRAETZschaltung zusammengesetzt ist.

6. Man nimmt die Abhängigkeit des gleichgerichteten Stromes und der gleichgerichteten Spannung von der Leistung des Wechselstromes auf bis zu Werten des gleichgerichteten Stromes von 0,5 A.

Man zeichnet oder photographiert die Oszillogramme für Stromstärken von 0,2 und 0,5 A.

7. Man stellt die Abhängigkeit des gleichgerichteten Stromes $I_=$, der gleichgerichteten Spannung $U_=$, der gleichgerichteten Leistung $W_=$ und des Wirkungsgrades η von der Leistung des Wechselstromes $W_\sim$ dar. Die Abhängigkeit wird gleich in die Darstellung von der Einweg-Gleichrichterschaltung eingetragen.

Spezialliteratur

1. C. FRITSCHE, K. WICHT: „Halbleiter". Verlag W. Knapp, Halle 1953.
2. H. F. GRAVE: „Gleichrichter-Meßtechnik". AVG Geest und Portig K.-G., Leipzig 1950.
3. E. JUSTI: „Leitfähigkeit und Leitungsmechanismus fester Stoffe". Verlag Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1948.
4. E. SPENKE: „Elektronische Halbleiter". Verlag J. Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955.

Aufgabe 59

Der Röhrengleichrichter

Zubehör: 1. Röhrengleichrichter, der offen auf einem Brett montiert ist, 2. Gleichrichterröhre, 3. Potentiometer, 4. Stöpselrheostat, 5. Vielfachinstrument, 6. Kennlinie der Gleichrichterröhre.

Kurze Theorie. Mit Gleichrichter wird ein Gerät bezeichnet, das einen Wechselstrom in einen Gleichstrom verwandelt.

Der Arbeit jeder Gleichrichteranordnung liegt die Ausnutzung der Eigenschaft eines solchen Leiterelementes einer elektrischen Schaltung zugrunde, bei dem die Stromstärke nicht nur von der Größe, sondern auch von der *Richtung* der angelegten Spannung abhängt. Die Stromstärke gehorcht dabei nicht dem Ohmschen Gesetz (*nichtlinearer* Leiter) (siehe ebenfalls Aufgabe 58).

Den Hauptteil eines *Röhrengleichrichters* bildet die *Diode*, die eine geheizte Kathode und eine kalte Anode besitzt. Bekanntlich kann der elektrische Strom nur in einer Richtung durch die Diode fließen, und zwar so, daß die Elektronen im Vakuum sich von der Kathode zur Anode bewegen. In umgekehrter Richtung fließt kein Strom durch die Röhre. Das wird damit erklärt, daß nur die geheizte Kathode die Eigenschaft erhält, Elektronen auszusenden, während die kalte Anode diese Eigenschaft nicht aufweist. Wenn man deshalb eine Diode in einen Wechselstromkreis legt, so fließt nur in den Halbwellen ein Strom, in denen an der Anode der Pluspol und an der Kathode der Minuspol der Spannung liegt. Folglich fließt nur in einer Richtung ein Strom durch die

Röhre, dessen Stärke außerdem nicht dauernd konstant bleibt. Einen solchen Strom nennt man *pulsierenden Gleichstrom* (Abb. 171).

Röhrengleichrichter werden selten für die Gleichrichtung starker Ströme verwendet, für die sie durch gasgefüllte Entladungsröhren (Hg-Dampf) ersetzt werden, doch sind sie in der Schwachstromtechnik außerordentlich bequem zu handhaben. Besonders häufig werden die Gleichrichterröhren in der Radiotechnik angewendet, wo man gleichgerichtete Spannungen von einigen hundert Volt für Ströme von 10 bis einigen hundert Milliampere benötigt. In den modernen Röntgengeräten haben die Gleichrichterröhren ebenfalls breite Verwendung gefunden, weil der Strom in den Röntgenröhren ebenfalls klein ist.

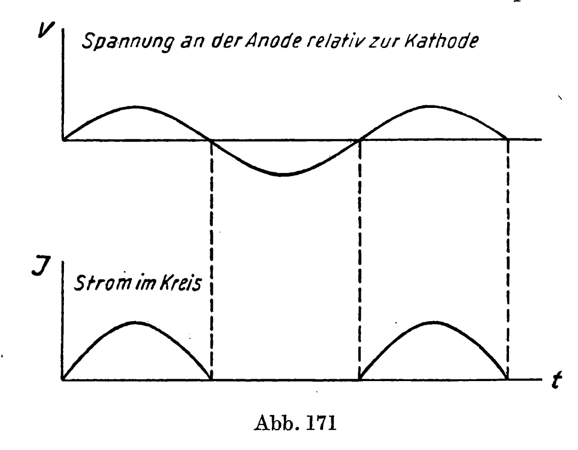


Abb. 171

Die Gleichrichterröhre wird gewöhnlich in den Kreis der Sekundärwicklung eines die Spannung hochtransformierenden Transformators geschaltet (Abb. 172). Von einer die Spannung heruntertransformierenden Wicklung desselben Transformators wird gewöhnlich die Heizung der Röhre gespeist.

Um beide Halbwellen der Wechselspannung auszunutzen, wendet man die sogenannte *Zweiweg-Gleichrichterschaltung* an. Dazu wird eine Röhre verwendet,

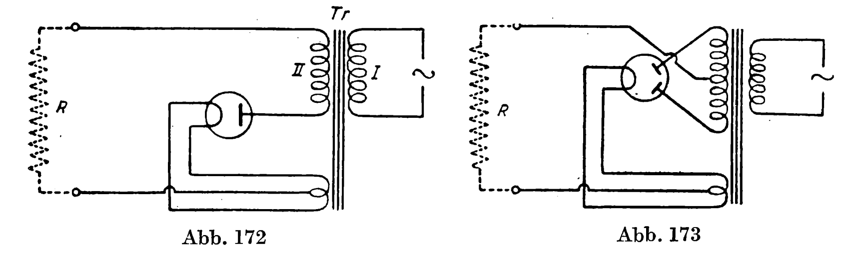


Abb. 172 Abb. 173

die zwei Anoden besitzt. Die einfachste Schaltung dieser Art ist in Abb. 173 dargestellt. Bei dieser Schaltung kann ein Strom während beider Halbwellen durch die Röhre fließen. Die von der Kathode in das Vakuum austretenden Elektronen fließen zur Anode, die in diesem Moment eine positive Spannung gegenüber der Kathode besitzt, und weiter über den Mittelabgriff der Sekundärwicklung des Transformators und den Belastungswiderstand R zur Kathode. Offensichtlich ist bei einer solchen Schaltung die Spannung zwischen Kathode und Anode gleich der halben Spannung, die in der Sekundärwicklung des

Transformators erzeugt wird. Bei einer Zweiwegschaltung fließt der Strom im Kreis stets in einer Richtung, doch ändert sich die Stromstärke dauernd von Null bis zu einem bestimmten Maximalwert (Abb. 174), d. h., wir erhalten, wie bereits erwähnt, einen pulsierenden Gleichstrom.

In den meisten Fällen, z. B. zur Speisung des Anodenkreises eines Radioempfängers, ist ein pulsierender Gleichstrom ungeeignet. Er muß vorher „geglättet" werden. Die *Glättung* des gleichgerichteten Stromes wird gewöhnlich mit Hilfe von Spulen mit Eisenkern von hoher Selbstinduktion (Drosseln) und Kapazitäten (Kondensatoren) erreicht, die z. B. wie in Abb. 175 geschaltet werden. Die Drossel und die Kondensatoren werden zusammen als *Glättungsglied* bezeichnet. Ist ein solches Glied eingeschaltet, so unterscheidet sich die zeitliche Abhängigkeit der durch die Gleichrichterröhre fließenden Stromstärke wesentlich von der in Abb. 174 dargestellten und gleicht nicht der Form des Stromes, der durch den Belastungswiderstand R fließt. (Genaueres darüber siehe weiter unten.)

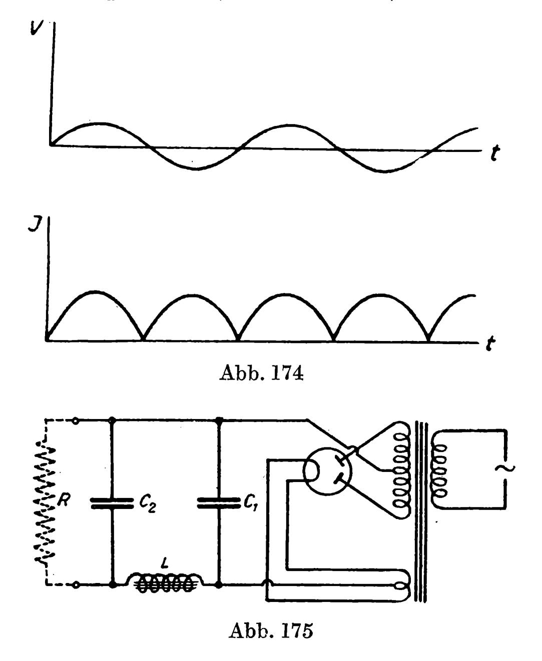


Abb. 174

Abb. 175

Die theoretische Betrachtung der Abhängigkeit der Stromstärke von der Spannung in einer Diode führt zu dem sogenannten „$V^{3/2}$-Gesetz", das zuerst von BOGUSLAWSKI eingeführt wurde[1]),

$$I_a = A\, V_a^{\frac{3}{2}},$$

wobei A eine Konstante und V_a die Spannung an den Elektroden der Gleichrichterröhre bedeuten (siehe Aufgabe 43). Dieses Gesetz ist nur dann gültig, wenn die Gleichrichterröhre in einem Gebiet arbeitet, das weit von dem Sättigungsstrom entfernt liegt. Bei Annäherung an die Sättigung, d. h. an den Zustand, wenn alle aus der Kathode austretenden Elektronen die Anode erreichen, verlangsamt sich die Zunahme des Stromes I_a bei Erhöhung der Spannung V_a. Die Erhöhung von V_a über die Sättigungsspannung hinaus hat fast keinen Einfluß auf die Stromstärke I_a, doch erhöht sie stark die Geschwindigkeit, mit der die Elektronen die Anode erreichen. Dabei tritt eine Erwärmung der Anode auf, die zu einer thermischen Emission von Ionen aus der Oberfläche der Anode führen kann. Hiermit wird die Ventil- (Gleichrichter-) Wirkung der Röhre aufgehoben. Bei starker Erwärmung wird die Anode zerstört.

[1]) Siehe Anmerkung auf S. 203.

Die graphische Abhängigkeit $I_a = f(V_a)$ wird als Kennlinie der Gleichrichterröhre bezeichnet. Diese Kennlinie hat in einem bestimmten Bereich für *positive* Spannungswerte an der Anode einen geraden Verlauf. Das gibt uns die Möglichkeit, die Eigenschaften einer Gleichrichterröhre, die durch bestimmte Parameter[1]) ausgedrückt werden, zu bewerten.

Als Hauptparameter der Röhre dient die *Steilheit der Kennlinie*

$$S = \frac{d I_a}{d V_a}.$$

Für angenäherte Rechnungen nimmt man den oben angeführten Bereich der Diodenkennlinie gewöhnlich als eine Gerade an, die durch den Nullpunkt des Koordinatensystems geht und rechnet mit

$$S = \frac{I_a}{V_a}. \tag{1}$$

Die Steilheit der Kennlinie hat offensichtlich die Dimension einer Leitfähigkeit, und je größer sie ist, desto besser ist die Gleichrichterröhre.

Die reziproke Größe der Steilheit, $R_i = \frac{V_a}{I_a}$, stellt den *inneren Widerstand* der Röhre dar.

Wenn die Gleichrichterröhre mit dem Belastungswiderstand R in Reihe geschaltet wird, so ist der Wirkungsgrad der Gleichrichterschaltung offensichtlich gleich

$$\eta = \frac{I_a^2 R}{I_a^2 (R + R_i)} = \frac{R}{R + R_i}. \tag{2}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß η mit zunehmendem R zunimmt. Jedoch nimmt die vom Gleichrichter gelieferte Leistung ab, wenn man mit R über R_i bei konstanter Anodenspannung hinausgeht, weil dabei die Stromstärke im Kreis stark abnimmt. Für $R = R_i$ erreicht die abgegebene Leistung ihr Maximum (wie auch in allen Stromquellen).

Die Spannung V am Ausgang des Gleichrichters ergibt sich als die Differenz zwischen den Spannungen, die der Transformator erzeugt, und dem Spannungsabfall am inneren Widerstand des Gleichrichters. Dieser innere Widerstand des Gleichrichters ist sowohl durch den Widerstand der Röhre selbst als auch durch den der Glättungsdrossel bestimmt.

Die Untersuchung der Abhängigkeit der Spannung am Ausgang des Gleichrichters von der Stärke des gleichgerichteten Stromes bildet den Inhalt der ersten Übung.

Der Mittelwert der Anodenspannung V_{mittel} für den in Abb. 174 dargestellten Fall ist

$$V_{\text{mittel}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi E_m \sin x \cdot dx = \frac{2}{\pi} E_m, \tag{3}$$

wobei E_m die Amplitude der halben Sinuswelle bedeutet. Wenn man die

---

[1]) Die Kennlinie der in der Aufgabe benutzten Gleichrichterröhre wird der Aufgabe beigegeben.

Kurve der pulsierenden Spannung im Anodenkreis in eine Fourier-Reihe zerlegt und sich auf die ersten Glieder der Reihe beschränkt, so läßt sich der Augenblickswert der Spannung in folgender Form schreiben:

$$e = \frac{2}{\pi} E_m - \frac{4}{3\pi} E_m \cos 2\omega t - \frac{4}{15\pi} E_m \cos 4\omega t. \quad (4)$$

Es treten also außer der konstanten Spannungskomponente V_{mittel}, die durch das erste Glied der Reihe dargestellt wird, in der gleichgerichteten Spannung auch noch harmonische Glieder auf, von denen das Glied der Frequenz 2ω die größte Amplitude, $\frac{4}{3\pi} \cdot E_m$, besitzt. Diese harmonischen Glieder stellen die Wechselstromkomponente des pulsierenden Stromes dar, die auch den Grund für das unangenehme Brummen eines Radioapparates bildet. Die Amplitude der Wechselstromkomponente wird mit Hilfe von Glättungsgliedern verkleinert.

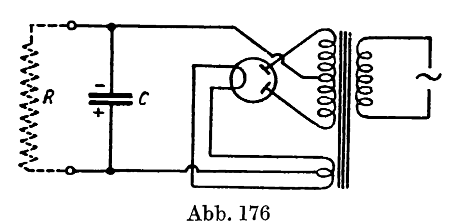


Abb. 176

Um die Wirkung eines Glättungsgliedes zu klären, betrachten wir den einfachsten Fall, wenn es aus einem Kondensator besteht, der parallel zum Belastungswiderstand liegt (Abb. 176). Es ist offensichtlich, daß sich der Kondensator während der Zeit des Stromflusses durch die Gleichrichterröhre auflädt und in der übrigen Zeit über den Belastungswiderstand (wenn er

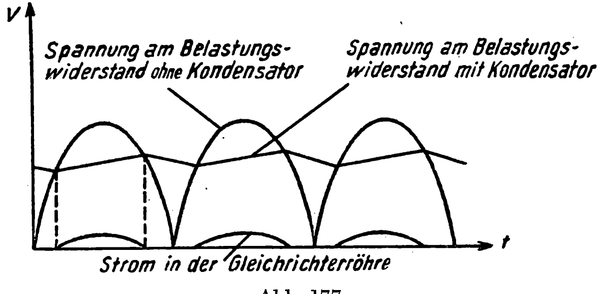


Abb. 177

genügend hoch ist) entlädt. Deshalb besitzt die Spannung am Widerstand bei Anwesenheit eines Kondensators einen bedeutend kleineren pulsierenden Charakter als ohne Kondensator (Abb. 177).

Die Anwendung eines zweiten Kondensators und einer Drossel verkleinert noch in viel stärkerem Maße das Pulsieren des gleichgerichteten Stromes. Die Spannung am Kondensator des Glättungsgliedes ist der Transformatorspannung entgegengerichtet. Folglich fließt nur dann ein Strom durch die Gleichrichterröhre, wenn der Augenblickswert der Spannung des Transformators größer ist als die Spannung am Kondensator. Im Endeffekt ergibt

sich also, daß bei einer Zweiweg-Gleichrichterröhre der Strom nicht dauernd, sondern nur in einem bestimmten Teil der Periode fließt.

Wenn man der Einfachheit halber annimmt, daß die Spannung am Kondensator frei vom Pulsieren und gleich der konstanten Komponente der gleichgerichteten Spannung V_{mittel} ist, dann kann man den Prozeß des Stromdurchganges durch die Röhre durch Kurven illustrieren, die in Abb. 178 dargestellt sind. Auf dieser Abbildung sind in gleichem Maßstab auf den Achsen drei Kurven dargestellt: *I* — die Kennlinie der Gleichrichterröhre, *II* — die Abhängigkeit der Spannung an der Gleichrichterröhre von der Zeit, *III* — die Abhängigkeit des durch die Gleichrichterröhre fließenden Stromes von der

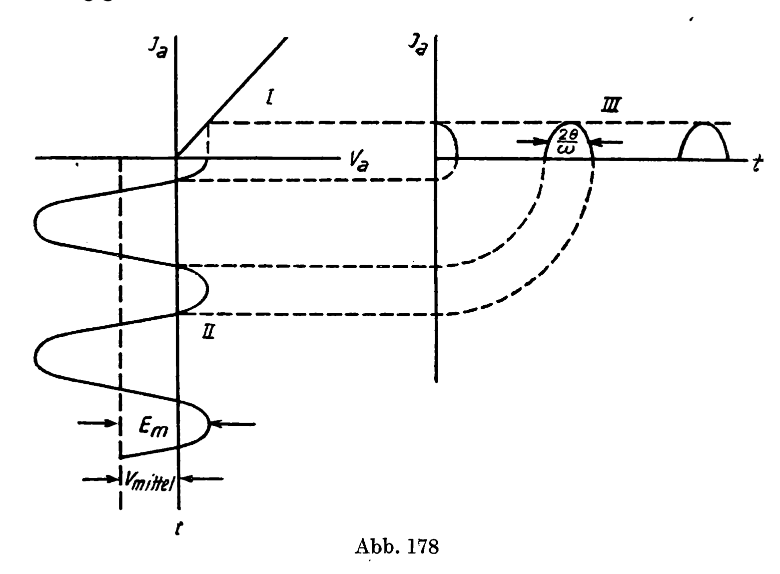


Abb. 178

Zeit. In *II* ist eine Kosinuskurve dargestellt, die auf der Spannungsachse um die Größe der am Kondensator liegenden Spannung verschoben ist. Die Kurve *III* ist das Produkt der ersten beiden. Um sie bequemer konstruieren zu können, sind die drei Darstellungen so angeordnet, wie es die Abb. 178 zeigt.

Aus der Abb. 178 ist ersichtlich, daß der Strom durch die Gleichrichterröhre I_a die Form einer abgeschnittenen Kosinuskurve besitzt, deren Gleichung man in der Form schreiben kann:

$$I_a = S E_m (\cos \omega t - \cos \theta), \tag{5}$$

wobei S die Steilheit der Kennlinie [siehe Gleichung (1)] und θ den Stromflußwinkel bezeichnet, der das Verhältnis der halben Zeit des Stromflusses zur gesamten Periodendauer (einer Periode des Stromes entspricht der Winkel 2π) bedeutet. Dabei nimmt man an, daß $I_a > 0$ infolge der Ventilwirkung der Gleichrichterröhre ist.

Da der Strom beim Gleichwerden der Spannungen am Transformator und am Kondensator verschwindet, gilt

$$V_{\text{mittel}} = E_m \cos\theta\,. \tag{6}$$

Weiterhin, für $t = 0$ erreicht der Strom I_a sein Maximum:

$$I_{\max} = S E_m (1 - \cos\theta)\,. \tag{7}$$

Der Mittelwert des durch den Gleichrichter fließenden Stromes ist gleich

$$I_{\text{mittel}} = 2\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\theta}^{+\theta} I_a d(\omega t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\theta} I_a d(\omega t) =$$

$$= \frac{2\cdot S\cdot E_m}{\pi}(\sin\theta - \theta\cos\theta)\,. \tag{8}$$

Der Mittelwert des Stromes wird durch ein Milliamperemeter im Gleichrichterkreis angezeigt. Die Spannung am Kondensator kann mit einem hochohmigen Gleichstromvoltmeter gemessen werden. Dividieren wir (8) durch (6), so erhalten wir

$$\frac{I_{\text{mittel}}}{V_{\text{mittel}}} = \frac{2S}{\pi}(\operatorname{tg}\theta - \theta)\,. \tag{9}$$

Mit Hilfe der Formel (9) kann man den Stromflußwinkel bestimmen, weil die Steilheit der Gleichstromkennlinie aus der der Aufgabe beigegebenen Kurve leicht entnommen werden kann. Die Bestimmung des Stromflußwinkels ist der Inhalt der zweiten Übung.

Die Beschreibung der Anordnung. Der in dieser Aufgabe untersuchte Gleichrichter stellt einen typischen neuzeitlichen Zweiweg-Röhrengleichrichter für einphasigen Strom dar. Als eine Besonderheit erscheint nur das Vorhandensein eines unabhängigen Heiztransformators, der es gestattet, die Primärspannung des Haupttransformators zu verändern, ohne die Heizung des Fadens zu ändern. Die Anordnung wird, wie in Abb. 179 dargestellt, zusammengeschaltet. (Die Widerstände rr, die an die Anode der Röhre angeschlossen sind, sind für die Übung 6 vorgesehen. Der Sinn des Schalters im Kreis des Kondensators C_1 wird im Text der Übung erklärt.)

Werden als Kapazitäten in der Schaltung Elektrolytkondensatoren benutzt, so muß man im Auge behalten, daß sie polar sind und daß ein falsches Anschließen zu einem Durchschlag der Kondensatoren und zu einer Beschädigung der Gleichrichterröhre führen kann.

Übung 1

Die Untersuchung der Abhängigkeit der Spannung am Ausgang des Gleichrichters von der Stärke des gleichgerichteten Stromes

Man stellt mit Hilfe des Spannungsteilers P (Abb. 179) die Eingangsspannung auf 110 V ein, ändert den Belastungswiderstand R und liest die Anzeigen des hochohmigen Voltmeters V_1 ab, die jeder eingestellten Stromstärke I_{mittel} entsprechen. Man zeichnet die Kurve $V_{\text{Ausg}} = f(I_{\text{mittel}})$.

Der Spannungsabfall am Ausgang des Gleichrichters beim Vergrößern des Stromes im Belastungswiderstand ist mit einer Erhöhung des Spannungsabfalls im Inneren der Gleichrichterröhre und an den Drosseln des Glättungsgliedes verbunden.

Aus der Neigung der erhaltenen Kurve findet man die Größe $\frac{\Delta V_{\text{Ausg}}}{\Delta I_{\text{mittel}}}$, die gleich dem Widerstand des Gleichrichters ist. Diese Größe muß man aus dem linearen Teil der Kurve entnehmen, der einer normalen Belastung des Gleichrichters entspricht. Der Teil der Kurve, der einer geringen Belastung entspricht (5 bis 20 mA), ist nicht linear. Deshalb muß die Spannung am Ausgang des Gleichrichters bei geringer Belastung durch Verändern der Stromstärke in kleinen Intervallen gemessen werden.

Die Versuchsanordnung erlaubt ebenfalls eine quantitative Untersuchung der Wechselstromkomponenten der pulsierenden Spannung an verschiedenen Punkten der Schaltung

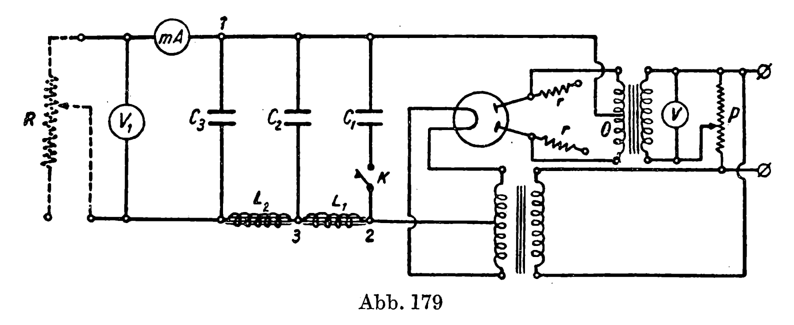


Abb. 179

hinter der Gleichrichterröhre. Dazu wird ein Voltmeter für Wechselstrom (ein Vielfachmeßgerät oder zwei Instrumente mit verschiedenen Meßbereichen) benutzt, das über einen Kondensator angeschlossen wird. Dadurch läßt sich die Wechselstromkomponente der Spannung allein messen. In das Schema (Abb. 179) ist das Voltmeter (und der mit ihm benutzte Kondensator) nicht eingezeichnet. Das Voltmeter wird über den Kondensator erstens an den Ausgang der Gleichrichterröhre, zweitens an das erste Glättungsglied (die Punkte *1*, *3*) und drittens an den Eingangskondensator des Glättungsgliedes (die Punkte *1*, *2*) angeschlossen.

Für jede Art des Anschließens des Voltmeters untersucht man die Abhängigkeit seiner Anzeige von der Stromstärke am Ausgang des Gleichrichters. Die Meßergebnisse werden graphisch dargestellt. Durch dieses Verfahren kann man feststellen, wie die Spannung hinter der Gleichrichterröhre von den einzelnen Elementen der Glättungsglieder geglättet und wie diese Glättung mit Anwachsen der Belastung des Gleichrichters verschlechtert wird.

Die Benutzung eines Vielfachinstrumentes (oder verschiedener Voltmeter) ist deshalb notwendig, weil die Größe der Wechselstromkomponente an den verschiedenen Punkten der Schaltung sehr verschieden ist. Der Anteil der pulsierenden Spannung wird als das Verhältnis der Wechsel- zur Gleichspannung am Ausgang gewertet.

Alle in dieser Übung angeführten Messungen werden bei geschlossenem Schalter K (Abb. 179), der im Kreis des Eingangskondensators C_1 des Glättungsgliedes liegt, durchgeführt. Das entspricht einem kapazitiven Eingang des Glättungsgliedes. Öffnet man den Schalter K, so kann man einen induktiven Eingang des Glättungsgliedes erhalten. Es empfiehlt sich, die Untersuchungen der Wechselstromkomponente auch für den Fall

eines induktiven Eingangs des Glättungsgliedes durchzuführen. Die dabei auftretenden Unterschiede der Wirkungsweise von Glättungsgliedern mit verschiedenem Eingang müssen von den die Aufgabe ausführenden Studenten selbständig erklärt werden können.

Übung 2

Die Bestimmung des Stromflußwinkels des Gleichrichters

Man verbindet das hochohmige Voltmeter mit den Klemmen des Kondensators C_1 bei normaler Eingangsspannung von 110 V und liest für verschiedene Belastungen V_{mittel} und I_{mittel} ab. Nach der Formel (9) errechnet man $\operatorname{tg}\theta - \theta$ und entnimmt der Tabelle (siehe Anhang zu dieser Aufgabe) den Wert für θ. Man stellt die Funktion $\theta = f(I_{\text{mittel}})$ graphisch dar.

Ist der Stromflußwinkel bekannt, so kann man die am Kondensator C_1 auftretende gleichgerichtete Spannung, die durch die Formel (6) gegeben ist, berechnen. Dazu muß man außerdem noch die Spannung an der Sekundärspule des Transformators (die Spannung an der halben Wicklung) kennen. Diese gesuchte Spannung wird aus der Spannung an der Primärspule und dem Übersetzungsverhältnis bestimmt. Das Übersetzungsverhältnis wird der Tabelle entnommen, die der Aufgabe beigegeben ist.

Anmerkung. Im Zusammenhang mit dem hohen Spannungsabfall an den Drosseln L_1, L_2 (Abb. 179) des Glättungsgliedes bei Belastung des Gleichrichters unterscheidet sich die Ausgangsspannung von der Spannung am Kondensator wesentlich.

Oszillographische Untersuchung der Arbeitsweise eines Röhrengleichrichters. Die weiteren ausführlicheren und anschaulicheren Untersuchungen der Arbeitsweise eines Gleichrichters und die Erklärung der einzelnen Elemente eines Glättungsgliedes wird mit Hilfe des Zweistrahloszillographen ausgeführt.

Der Zweistrahloszillograph, der schon für die Aufgabe eingestellt ist, erlaubt es, auf dem Schirm der Braunschen Röhre die zeitliche Abhängigkeit der Spannung zwischen den einzelnen Punkten der Gleichrichterschaltung anschaulich darzustellen. Auf dem Schirm lassen sich gleichzeitig zwei Oszillogramme beobachten, was für einen Vergleich zweier Spannungen oder der Phasenverschiebung zwischen zwei Spannungen sehr bequem ist.

Die Beschreibung eines Einstrahloszillographen wird in der Aufgabe 66 (siehe auch Abb. 228) durchgeführt.

Die Reihenfolge des Einschaltens des Oszillographen. Man steckt die Anschlußschnur des Gerätes in die Netzsteckdose, die sich am Schaltbrett befindet. Das Gerät darf jedoch nicht an Gleichstrom angeschlossen werden, weil es dann beschädigt wird. Man dreht den Schalterknopf L (siehe Abb. 228) an der Frontplatte des Gerätes auf die Stellung „Ein". Wenn die Röhren warm geworden sind, erscheinen auf dem Schirm zwei leuchtende Linien. Die Lage dieser Linien läßt sich durch Drehen der obersten Knöpfe in horizontaler und vertikaler Richtung verändern.

Die Linien werden fokussiert, d. h., sie werden zu scharf begrenzten Geraden mit Hilfe der darunterliegenden Knöpfe eingestellt. Die Länge der Linien wird durch den Knopf „Amplitude" reguliert.

Die Helligkeit des Bildes wird durch die Innenknöpfe unterhalb der Oszillographenröhre verändert. Man muß dabei die minimal notwendige Helligkeit einstellen und darf auf keinen Fall ein helles und fokussiertes Bild ohne Zeitablenkung stehenlassen, weil dabei der Leuchtstoff des Schirmes zerstört wird.

Die zu untersuchende Spannung wird zwischen die geerdeten Buchsen und eine der Eingangsbuchsen zum Verstärker (Eingang V_1, Eingang V_2) gelegt. Die Verstärkung, d. h. im Endeffekt die Größe des Bildes auf dem Oszillographenschirm, wird durch die Knöpfe Verstärker *1* und Verstärker *2* reguliert. Man kann auf dem Schirm ein stehendes Bild erhalten, wenn man die Zeitablenkung des Oszillographen mit der zu untersuchenden Spannung synchronisiert. Dazu benutzt man den Knopf „Synchronisation". Er muß auf den für ein stehendes Bild minimal notwendigen Wert eingestellt werden. Denn es kann sowohl übermäßige Synchronisation als auch übermäßige Verstärkung zu einer Verzerrung der Form des Bildes auf dem Schirm führen.

Man darf dabei nicht vergessen, daß auf dem Schirm ein stehendes Bild nicht nur bei einer Kippfrequenz entsteht, die mit der Frequenz der zu untersuchenden Spannung übereinstimmt, sondern auch bei Frequenzen, die um 2, 3 oder allgemein um eine ganze Zahl kleiner sind als die untersuchte Frequenz. Auf dem Schirm nimmt dann die Zahl der Perioden um 2, 3 oder entsprechend mehr Perioden zu.

Übung 3

Die Beobachtung der Phasenverschiebung der Spannungen an den Anoden der Gleichrichterröhre

Zur Beobachtung der Phasenverschiebung der Spannungen an den Anoden der Gleichrichterröhre wird eine geerdete Buchse des Gerätes mit der Buchse *O* am Grundbrett des Gleichrichters (siehe Abb. 179 und Abb. 228) und die Eingangsbuchsen V_1 und V_2 mit den Anoden der Gleichrichterröhre verbunden. Man zeichnet das Bild ab, das auf dem Oszillographenschirm entsteht.

Bei dieser Übung darf die Ausgangsspannung des Gleichrichters, um die Studenten nicht zu gefährden, 100 V nicht überschreiten.

Übung 4

Vergleich der Frequenz der Wechselstromkomponente am Ausgang des Glättungsgliedes mit der Frequenz der Spannung an den Anoden

Zum Vergleich der Frequenz der Wechselstromkomponente am Ausgang des Glättungsgliedes mit der Frequenz der Spannung an den Anoden der Gleichrichterröhre schaltet man einen der Verstärker des Oszillographen von der Anode der Gleichrichterröhre ab und an die Buchse am Ausgang des Glättungsgliedes des Gleichrichters an. Dabei läßt man zum Vergleich den zweiten Verstärker an der Anode der Gleichrichterröhre. Man zeichnet das auf dem Oszillographenschirm entstehende Bild ab.

Übung 5

Die Beobachtung der Form der Spannung an verschiedenen Punkten des Glättungsgliedes

Die Kurvenform der Spannung zwischen den verschiedenen Punkten des Glättungsgliedes hinter dem Gleichrichter lassen sich beobachten, wenn man nacheinander den Verstärkereingang des Oszillographen mit den Buchsen sowohl nach dem ersten Glättungsglied als auch nach dem zweiten Glättungsglied verbindet. Dabei bleibt zum Vergleich der andere Verstärkereingang des Oszillographen mit dem Eingang des ersten Glättungsgliedes verbunden.

Die Beobachtung wird bei verschiedenen Belastungen des Gleichrichters, d. h. bei verschiedenen Werten des Ausgangsstromes, durchgeführt. Es ist klar, daß den Inhalt dieser Übung die anschauliche Wiederholung der quantitativen Untersuchungen der Wechselstromkomponente nach der Gleichrichtung der Spannung bildet, die in der Übung 1 mit Hilfe des Voltmeters für Wechselstrom und in Verbindung mit einem Kondensator ausgeführt wurde.

Übung 6

Die Beobachtung der Kurvenform der Stromstärke, die durch den Gleichrichter fließt

Mit jeder Anode des Gleichrichters werden die Widerstände *rr* in Reihe geschaltet (Abb. 179), an denen beim Stromdurchgang durch den Gleichrichter die Spannung abfällt, deren Verlauf der Form des Stromes durch den Gleichrichter gleicht. Zur Beobachtung dieser Kurve schließt man die Erdbuchse P_1 und eine der Eingangsbuchsen V_1 oder V_2 an die Enden eines der Widerstände an (siehe Abb. 228). Gleichzeitig unterbricht man die Verbindung zwischen der Schaltung und dem anderen Verstärkereingang.

In dieser Übung muß der vom Gleichrichter gelieferte Strom etwa 10 bis 15 mA betragen, dann beträgt der Spannungsabfall am Widerstand im Anodenkreis etwa 1 V. Zur Beobachtung einer solchen Spannung muß der Verstärkerknopf am Gerät gewöhnlich voll aufgedreht werden.

Hinweis. 1. Von wesentlichem Interesse ist die Durchführung aller in dieser Aufgabe beschriebenen Übungen auch mit einem Einweggleichrichter. Dazu schaltet man die eine Anode der Gleichrichterröhre ab und wiederholt alle Messungen.

2. Die in dieser Aufgabe benutzte Gleichrichterschaltung erlaubt es, wie aus den dargelegten Ausführungen hervorgeht, ihre Arbeitsweise in mehreren Bereichen zu untersuchen. Die erforderliche Zeit für alle diese Messungen überschreitet bei weitem einen Praktikumsnachmittag. Deshalb wählt der Assistent für jeden diese Aufgabe ausführenden Studenten einen besonderen Komplex von Messungen aus, die für das Vertrautwerden mit der Arbeitsweise eines Röhrengleichrichters notwendig und dabei genügend vielseitig in den vorkommenden Übungen sind.

Spezialliteratur

1. Siehe Literatur zu Aufgabe 43.
2. H. F. Grave: „Gleichrichter-Meßtechnik". AVG Geest und Portig K.-G., Leipzig 1950.
3. K. B. Maxl: „Gleichrichter und Spannungsregler". Fachbuchverlag G. m. b. H., Leipzig 1954.

Anlage zur Aufgabe 59

Die Werte für θ in Abhängigkeit von $\operatorname{tg}\theta - \theta$

$\operatorname{tg}\theta - \theta$	θ		$\operatorname{tg}\theta - \theta$	θ		$\operatorname{tg}\theta - \theta$	θ	
	im Bogenmaß	in Grad		im Bogenmaß	in Grad		im Bogenmaß	in Grad
0,00001	0,03	1,72	0,00755	0,28	16,04	0,05592	0,53	30,37
0,00002	0,04	2,29	0,00841	0,29	16,62	0,05943	0,54	30,94
0,00004	0,05	2,86	0,00934	0,30	17,19	0,06311	0,55	31,51
0,00007	0,06	3,44	0,01033	0,31	17,76	0,06695	0,56	32,09
0,00011	0,07	4,01	0,01139	0,32	18,33	0,07097	0,57	32,66
0,00017	0,08	4,58	0,01252	0,33	18,91	0,07517	0,58	33,23
0,00024	0,09	5,16	0,00000	0,34	19,48	0,07944	0,59	33,80
0,00033	0,10	5,73	0,01503	0,35	20,05	0,08408	0,60	34,38
0,00045	0,11	6,30	0,01640	0,36	20,63	0,08892	0,61	34,95
0,00058	0,12	6,38	0,01786	0,37	21,20	0,09391	0,62	35,42
0,00074	0,13	7,45	0,01941	0,38	21,77	0,09911	0,63	36,10
0,00092	0,14	8,02	0,02105	0,39	22,35	0,10454	0,64	36,67
0,00114	0,15	8,59	0,02279	0,40	22,92	0,11020	0,65	37,24
0,00138	0,16	9,17	0,02463	0,41	23,49	0,11610	0,66	37,82
0,00166	0,17	9,74	0,02657	0,42	24,06	0,12225	0,67	38,39
0,00197	0,18	10,31	0,02862	0,43	24,64	0,12866	0,68	38,96
0,00232	0,19	10,89	0,03078	0,44	25,21	0,13534	0,69	39,53
0,00271	0,20	11,46	0,03306	0,45	25,78	0,14229	0,70	40,11
0,00314	0,21	12,03	0,03545	0,46	26,36	0,14953	0,71	40,68
0,00362	0,22	12,61	0,03797	0,47	26,93	0,15707	0,72	41,25
0,00414	0,23	13,18	0,04061	0,48	27,50	0,16492	0,73	41,83
0,00472	0,24	13,75	0,04339	0,49	28,07	0,17302	0,74	42,40
0,00534	0,25	14,31	0,04680	0,50	28,65	0,18160	0,75	42,97
0,00602	0,26	14,88	0,04931	0,51	29,22	0,18896	0,76	43,50
0,00676	0,27	15,47	0,05256	0,52	29,79	0,19963	0,77	44,12

Aufgabe 60

Die Untersuchung der elektromagnetischen Eigenschwingungen eines Schwingungskreises

Zubehör: 1. Pendel mit Uhrwerk und dreifachem Unterbrecher, 2. Kondensator von 20 μF, 3. Akkumulator von 1,3 bis 2 V, 4. Stöpselrheostat bis 1000 Ω, 5. Selbstinduktionsspule von etwa 0,1 Hy und kleinem Ohmschen Widerstand, 6. Ballistisches Galvanometer, 7. Stoppuhr.

Kurze Beschreibung der Erscheinung und ihre Theorie. Eigenschwingungen vollführt ein abgeschlossenes System nach einer Anregung von außen („Anstoß"). Die Bezeichnung *Eigenschwingung* besagt, daß der Schwingvorgang

in diesem Fall (hauptsächlich) durch die Eigenschaften des Systems selbst bestimmt wird. Die Schwingungsenergie wird dem System von außen im Moment der Anregung zugeführt.

In der vorliegenden Aufgabe werden die elektromagnetischen Eigenschwingungen eines Schwingungskreises untersucht, der aus dem Kondensator C, der Induktivität L und dem Ohmschen Widerstand R besteht (siehe Abb. 182). Eigenschwingungen können in einem solchen System unter verschiedenen Anfangsbedingungen entstehen, z. B.: 1. Der Schwingungskreis wird geschlossen, nachdem der Kondensator aufgeladen worden ist. 2. Der Schwingungskreis wird geschlossen und durch die Spule des Schwingungskreises ein konstanter Strom von einer äußeren Stromquelle geschickt, deren Kreis plötzlich außerhalb des Schwingungskreises unterbrochen wird. 3. Der Kondensator wird bei offenem Schwingungskreis aufgeladen, man läßt durch die Spule einen konstanten Strom fließen, dann wird der Schwingungskreis geschlossen und gleichzeitig der Stromkreis außerhalb des Schwingungskreises unterbrochen. Die Anfangsbedingungen des ersten und zweiten Falles kann man sich leicht verwirklicht denken, wenn man die Schaltung der Abb. 182 und darin die verschiedenen Möglichkeiten des Ein- und Ausschaltens betrachtet.

Die Anfangsbedingungen, unter denen die Eigenschwingungen entstehen, bestimmen sowohl die *Anfangsphase* des Prozesses als auch die *Amplitude* der Schwingungen. Der Charakter des Prozesses der Eigenschwingungen hängt, wie es aus der oben gegebenen Definition dieser Schwingungsart hervorgeht, nur von den Eigenschaften des Systems selbst ab. Rufen wir uns kurz den Ablauf des Prozesses der elektromagnetischen Schwingungen in unserem Schwingungskreis unter beliebigen Anfangsbedingungen ins Gedächtnis zurück: Der Prozeß der elektromagnetischen Schwingungen in einem solchen Schwingungskreis besteht in einer periodischen Umladung des Kondensators und in dem Fließen eines Wechselstromes durch den die Kondensatorplatte verbindenden Kreis. Bei diesen Schwingungen verwandelt sich die elektrostatische Energie des Feldes des aufgeladenen Kondensators periodisch in die Energie des magnetischen Feldes, das von dem den Kreis, d. h. den aus einer Kapazität C und einer Selbstinduktivität L bestehenden Schwingungskreis, durchfließenden Strom erzeugt wird. Da jeder Kreis unvermeidlich einen Ohmschen Widerstand enthält, wird der Energievorrat des Systems allmählich für die Erwärmung der Drähte verbraucht, aus denen der Kreis und die Spule bestehen. Deshalb ist die Entladung eines Kondensators über einen solchen Kreis kein vollkommen periodischer Vorgang. Die Spannungsamplitude nimmt am Kondensator nach jeder Umladung ab und damit auch die Stromamplitude.

Die Stromstärke im Schwingungskreis ist mit der Ladung und der Potentialdifferenz am Kondensator durch die Beziehung verbunden:

$$i = -\frac{dQ}{dt} = -C\frac{dv}{dt},$$

wobei $Q = Cv$ die Ladung des Kondensators bedeutet. Das Minuszeichen weist darauf hin, daß wir die Stromrichtung positiv zählen, die einer Abnahme

der Potentialdifferenz an den Kondensatorplatten entspricht. Die zeitliche Änderung dieser Stromstärke ruft eine induzierte Spannung hervor, die gleich

$$E = -L\frac{di}{dt} = LC\frac{d^2v}{dt^2}$$

ist. Übereinstimmend mit dem zweiten KIRCHHOFFschen Gesetz haben wir

$$v + E - iR = 0.$$

Setzen wir die Werte für E und i ein, so erhalten wir

$$v + LC\frac{d^2v}{dt^2} + CR\frac{dv}{dt} = 0$$

oder

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0. \tag{1}$$

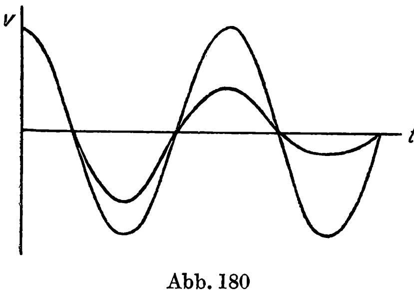


Abb. 180

Die Gleichung (1) ist die Gleichung der Eigenschwingungen eines Schwingungskreises, der aus L, C und R besteht. Ihre Lösung hat die Form

$$v = Ve^{-bt}\sin(\omega t + \varphi), \tag{2}$$

worin

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad b = \frac{R}{2L},$$

und V und φ Konstanten sind, die von den Anfangsbedingungen des Schwingungsprozesses abhängen.

Aus der Lösung ist ersichtlich, daß v sich mit der Zeit ändert. Die Ordinaten der Kurve, die die Gleichung (2) darstellt, erhält man aus den Ordinaten der Sinuskurve

$$v = V\sin(\omega t + \varphi) \tag{3}$$

durch Multiplikation mit dem dauernd abnehmenden Faktor e^{-bt}. Die allgemeine Form der Kurve, die in Abb. 180 gezeigt ist, stellt diesen Prozeß der *gedämpften harmonischen Schwingungen* dar. Die Schwingungsdauer[1]) dieser Schwingungen wird durch die Formel ausgedrückt:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \tag{4}$$

[1]) Den Begriff Schwingungsdauer darf man, strenggenommen, nicht auf eine Funktion der Form (2) anwenden. Hier ist damit die Zeitdauer zwischen zwei Nullwerten von v gemeint, die das gleiche Vorzeichen der Ableitung $\frac{dv}{dt}$ besitzen. So muß man auch weiterhin das Wort Schwingungsdauer verstehen, wenn es in der Beschreibung dieser Aufgabe auftritt. Den strengen Sinn der *Schwingungsdauer* eines Prozesses hat die Größe T_0, die durch den Ausdruck (5) definiert ist.

Wenn R, verglichen mit L, genügend klein ist, kann man das Glied $\frac{R^2}{4L^2}$ vernachlässigen und erhält dann die Formel

$$T_0 = 2\pi \sqrt{LC}, \tag{5}$$

die die *Schwingungsdauer* der ungedämpften Schwingungen eines Schwingungskreises bestimmt.

Die Größe b, die ein Maß für die Dämpfung darstellt, wird *Dämpfungskonstante* genannt. In der Praxis wird jedoch gewöhnlich ein anderes Maß für die Dämpfung benutzt, und zwar

$$\gamma = \ln \frac{V_n}{V_{n+1}}, \tag{6}$$

wobei V_n und V_{n+1} die Größen zweier aufeinanderfolgender Amplituden bedeuten, die den Abstand einer Schwingungsdauer voneinander besitzen. Die Größe γ trägt die Bezeichnung *logarithmisches Dekrement.* Sie hängt mit b auf folgende Weise zusammen:

Weil

$$V_{n+1} = V_n e^{-bT},$$

so gilt

$$\frac{V_n}{V_{n+1}} = e^{bT}$$

und

$$\gamma = \ln \frac{V_n}{V_{n+1}} = bT = \frac{R}{2L} T. \tag{6'}$$

Hieraus entnimmt man: Je kleiner R und je größer L ist, desto kleiner ist die Dämpfung, und desto mehr gleicht die Kurve (2) der Kosinuskurve (3). Außerdem nähert sich die Schwingungsdauer dem Wert T_0, der durch die Formel (5) bestimmt wird. Umgekehrt, bei starkem Anwachsen von R nimmt die Dämpfung wie auch die Schwingungsdauer zu. Für $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, wenn der Ausdruck (4) unendlich groß wird, wird die Entladung durch eine Kurve beschrieben, wie sie in Abb. 181 dargestellt ist. Vergrößert man R über diesen Wert hinaus, so wird der Prozeß *aperiodisch.*

Für die experimentelle Prüfung alles oben Dargelegten liegen folgende Überlegungen zugrunde:

Eine dauernde Beobachtung der periodischen Umladung eines Kondensators würde das Experiment komplizieren und besondere Apparaturen erfordern. Aus diesem Grunde ist es wichtig, eine solche Methode zur Untersuchung dieser Erscheinung zu verwenden, die es gestattet, auf dem Wege einer statischen Messung, welche zu verschiedenen Zeitpunkten der Entladung durchgeführt wird, aus einzelnen Punkten den zeitlichen Verlauf des Entladungsvorganges aufzunehmen. Solche Überlegung liegt dem in dieser Aufgabe beschriebenen Experiment zugrunde.

Der Schwingungskreis (Abb. 182), der aus dem Kondensator C, der Selbstinduktion L und dem Widerstand R (darunter fällt auch der Ohmsche Widerstand der Spule L) besteht, läßt sich an der Stelle a_2 öffnen. Zur Aufladung des

Kondensators ist parallel zu ihm das Element E geschaltet, dessen Stromkreis an der Stelle a_1 unterbrochen werden kann.

Zuerst sind beide Kreise geschlossen, und es fließt über $ERLa_2a_1$ ein konstanter Strom. Dabei liegt am Kondensator eine bestimmte Potentialdifferenz v_0. Wir öffnen nun in einem bestimmten Anfangsmoment den Kontakt a_1. Dann beginnt der Kondensator C, dessen Potentialdifferenz bis zum Öffnen durch das Element E aufrechterhalten wurde, sich über den Kreis RLa_2 zu entladen. Dabei wandelt sich die zu Anfang im Kondensator gespeicherte elektrostatische Energie in die Energie des von dem Strom erzeugten Magnetfeldes um. Endlich ist der Kondensator vollständig entladen, v ist gleich Null, und der Schwingungskreis besitzt nur die Energie des vom Strom erzeugten Magnetfeldes, die in diesem Moment ihr Maximum erreicht. Im nächsten Augenblick beginnen die Kondensatorplatten sich wieder aufzuladen, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen. Die magnetische Energie geht wieder in elektrostatische über. Das geschieht so lange, bis die gesamte

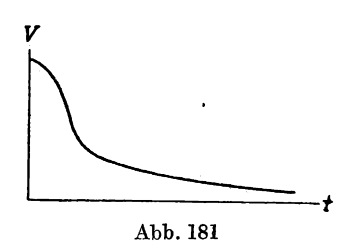


Abb. 181

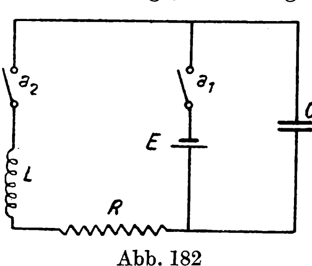


Abb. 182

magnetische Energie (darunter die Energie des magnetischen Feldes des Gleichstromes, der durch die Spule bis zum Beginn der Entladung floß) sich in elektrostatische umgewandelt hat. Deshalb kann die maximale Potentialdifferenz des Kondensators $V_m = V$ größer sein als die anfängliche v_0.

Im weiteren wiederholt sich dieser Prozeß periodisch mit allmählich abnehmender Amplitude V. Die Geschwindigkeit der Abnahme der Größe V hängt von dem Wert des Widerstandes R ab.

Wenn wir nach Ablauf einer bestimmten Zeitdauer, vom Beginn der periodischen Umladung an, den Kontakt a_2 öffnen, d.h., den Prozeß in einer beliebigen Phase unterbrechen und dabei die am Kondensator herrschende Potentialdifferenz messen, so erhalten wir einen der Punkte, die auf der Kurve der Abb. 180 liegen.

Führen wir eine ganze Reihe solcher Messungen für verschiedene Zeitintervalle aus, dann können wir aus den erhaltenenen Punkten eine Kurve der Entladung eines Kondensators im Schwingungskreis erhalten.

Wenn auch jeder Punkt auf dieser Kurve das Meßergebnis eines neuen, vom vorhergehenden völlig unabhängigen Prozesses ist, so verlaufen doch alle Prozesse gleich, weil die Anfangsbedingungen für alle Prozesse sich nicht ändern. Folglich können wir mit diesen Messungen, im Grunde genommen, den zeitlichen Verlauf eines Prozesses bestimmen. Die Aufzeichnung der Spannungsänderung am Kondensator im Verlaufe eines einmaligen Ent-

ladungsprozesses ist ebenfalls möglich, doch muß man dazu einen Kathodenstrahloszillographen benutzen und die Kurve der zeitlichen Auflösung der Entladung photographieren. In der vorliegenden Aufgabe geschieht die Untersuchung des Entladungsvorganges durch die oben beschriebene Methode.

Die Beschreibung der Anordnung. Der Kondensator C, der Akkumulator E, die Spule mit der Selbstinduktion L, der Stöpselrheostat R und das Spiegelgalvanometer G werden miteinander nach der Schaltung verbunden, die in Abb. 183 dargestellt ist, und an einen besonderen Mechanismus angeschlossen, der zum Öffnen des Aufladungs- und des Entladungskreises des Kondensators dient.

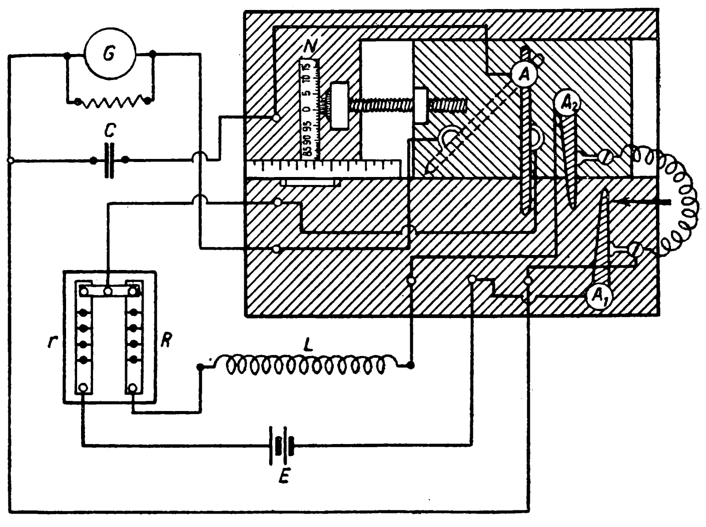


Abb. 183

Der an den Schwingungskreis angeschlossene Schaltmechanismus muß übereinstimmend mit der oben dargelegten Versuchsdurchführung das Öffnen des Schwingungskreises nach einer vorgegebenen Zeitdauer vom Beginn der Entladung an gewährleisten. Folglich muß dieser Mechanismus irgendein bewegliches Element besitzen, das zu bestimmten Zeitpunkten den Kreis der Stromquelle und den Schwingungskreis selbst unterbricht. Als ein solcher Mechanismus kann mit Erfolg ein gewöhnliches Schwerependel verwendet werden, das bei seiner Pendelbewegung die Kontakte der Kreise löst. Der Pendelmechanismus sieht folgendermaßen aus: Auf den in einer isolierenden Grundplatte (Abb. 183) befestigten Säulen drehen sich um ihre Achsen die drei Kontakte: A, A_1 und A_2. Der Kontakt A_1 schließt den Batteriekreis, der den Schwingungskreis speist. Der Kontakt A_2 schließt den Schwingungskreis selbst. Mit Hilfe dieser Kontakte kann man entweder die entsprechenden Kreise schließen oder sie geöffnet lassen. Der Kontakt A unterscheidet sich

seinem Bau nach von den Kontakten A_1 und A_2, und zwar verbindet er in der einen Stellung die eine Kondensatorplatte mit der Batterie und dem Schwingungskreis (in der Abbildung ist gerade diese Kontaktstellung festgehalten) und schafft in der anderen zwischen Galvanometer und Kondensator eine parallele Verbindung. Diese Kontaktstellung ist in der Abbildung punktiert eingezeichnet und ist für die Messung der Restladung des Kondensators vorgesehen. Das wird für die Untersuchung des Entladungsvorganges mit der hier beschriebenen Methode benötigt.

Die Kontakte A und A_2 sitzen auf einem verschiebbaren Stück, mit dem sie relativ zum Kontakt A_1 verschoben werden können. Die Verschiebung läßt sich an einer Teilung ablesen, die auf dem Kopf N einer Mikrometerschraube aufgetragen ist. Die Mikrometerschraube verschiebt das Stück mit den Kontakten. Die Zahl der vollen Umdrehungen der Schraube wird an einer Skala abgelesen, die neben dem Kopf der Mikrometerschraube befestigt ist.

Das Öffnen der Kontakte A_1 und A_2 und das Umschalten des Kontaktes A geschieht durch eine mechanische Pendelvorrichtung (siehe weiter unten), die sich in Richtung des in die Abbildung eingezeichneten Pfeiles bewegt. Die Veränderung des Abstandes zwischen den Kontakten A_1 und A_2 führt dazu, daß das Öffnen dieser Kontakte zu verschiedenen Zeitpunkten möglich wird. Damit läßt sich die Zeitdauer zwischen dem Beginn der zu untersuchenden Entladung (Öffnen des Kontaktes A_1) und ihrem Abreißen in irgendeiner Phase (Öffnen des Kontaktes A_2) variieren.

Der ganze Mechanismus ist auf einer horizontalen Konsole unter dem Aufhängepunkt des schweren starren Pendels befestigt. Das Pendel ist ein dreieckiger Träger, der längs einer seiner Kanten aufgehängt ist. An seinem unteren Ende trägt das Pendel einen Ebonitstab, der bei der Bewegung des Pendels in Pfeilrichtung nacheinander die Kontakte A_1, A_2 und A öffnet und letzteren in eine neue Lage bringt (sie ist in Abb. 183 punktiert eingezeichnet).

Wenn der Abstand zwischen den Kontakten A_1 und A_2 im Vergleich zur Amplitude der ersten Schwingung des Pendels klein ist und die Kontakte sich in der Nähe des Gleichgewichtspunktes des Pendels befinden, kann man annehmen, daß das Pendel diesen Abstand mit konstanter Geschwindigkeit durchläuft. Aus diesem Grunde kann man die Zeitablesung durch den zu ihr proportionalen Abstand $\overline{A_1 A_2}$ ersetzen, der in Umdrehungen der Schraube gemessen wird.

Neben dem Pendel auf der rechten Seite der Konsole ist eine Anordnung zum Ingangsetzen des Pendels angebracht, die aus einem Haken besteht, der hinter einen der Querstreben des Trägers hakt und beim Ziehen an einer Schnur den Träger losläßt. Die Kontakte A_1 und A_2 sind mit Federn versehen, die die Kontakte daran hindern, nach dem Durchgang des Pendels selbständig wieder in ihre Anfangslage zurückzukehren und erneut die Stromkreise zu schließen. Die Feder des Kontaktes A gewährleistet sein Schließen in der neuen Stellung. Bei Befestigung des Pendelhakens müssen die Kontakte von Hand in ihre Anfangsstellung gebracht werden.

Bei der Arbeit muß man dauernd auf die Sauberkeit der Kontakte und darauf achten, daß sie stets genügend dicht aufeinanderliegen. Ihr schlechter

Zustand ist in den meisten Fällen der Hauptgrund für die Fehlerhaftigkeit der erhaltenen Ergebnisse.

Zur Messung der zweiten Größe, der Spannung an dem Kondensator, dient das ballistische Galvanometer, dessen Ausschlag der Ladung auf dem Kondensator proportional und damit bei unveränderter Kapazität der Spannung am Kondensator proportional ist (siehe Aufgabe 47). Das Einschalten des Galvanometers geht, wie schon gesagt, mit Hilfe des Kontaktes A nach Öffnen der Kontakte A_1 und A_2 (und des gleichen Kontaktes A in seiner Anfangsstellung) vor sich.

Der Teil r des Stöpselrheostaten ist in den Aufladekreis des Kondensators geschaltet und dient zur Einstellung des Anfangswertes der Ladung auf dem Kondensator und der Stromstärke in der Spule L auf eine Größe, die der Empfindlichkeit des Galvanometers angepaßt ist. Der übrige Teil des Rheostaten R, der im Schwingungskreis liegt, bestimmt den Widerstand und damit die Dämpfung des Kreises.

Übung 1

Die Untersuchung der Eigenschwingungen bei geringer Dämpfung

Die Messung. Man setzt die Schaltung entsprechend der Abb. 183 zusammen, stellt mit Hilfe der Schraube N die Kontakte A_1 und A_2 in eine Ebene, damit beide Kreise möglichst gleichzeitig geöffnet werden. Im Rheostaten stöpselt man den Widerstand, der der Empfindlichkeit des gegebenen Galvanometers entspricht, und wählt R gleich Null. Man hakt das Pendel ein, stellt die Galvanometerbeleuchtung so ein, daß der Lichtzeiger annähernd mit der Mitte der Ableseskala des Galvanometers zusammenfällt, schreibt seinen Wert auf und bereitet sich zur Ablesung vor.

Man hakt das Pendel aus, beobachtet sofort nach dem Öffnen beider Kontakte A_1 und A_2 den ersten Ausschlag des Galvanometers und schreibt ihn auf. Die Messung wird dreimal wiederholt. Wenn die einzelnen Ablesungen merklich voneinander abweichen, so vergrößert man die Zahl der Ablesungen. Im weiteren wird zur Aufzeichnung der Entladungskurve der Mittelwert der Ausschläge benutzt.

Man dreht die Schraube N um anderthalb Umdrehungen, vergrößert damit den Abstand zwischen den Kontakten und wiederholt den gleichen Meßvorgang. Damit erhält man den zweiten Punkt der Kurve.

Man wiederholt in gleichen Intervallen die Vergrößerung des Abstandes zwischen den Kontakten und führt Messungen durch, bis man für die Kurve, die die Abhängigkeit des Entladungsvorganges von der Zeit darstellen soll, genügend Punkte für mindestens eine ganze Wellenlänge hat. Daß man die nötigen Punkte erhalten hat, zeigt ein zweimaliges Ändern der Ausschlagsrichtung des Lichtzeigers auf der Skala.

Man bestimmt die Schwingungsdauer des Pendels τ durch Ablesen der Zeit auf der Stoppuhr für zehn volle Schwingungen. Man bestimmt die Schwingungsamplitude des Pendels durch Messung des Abstandes zwischen dem Kontakt A_1 und der Stellung des am Haken hängenden Pendels mit Hilfe eines Maßstabes. Diese Angaben werden für die Bestimmung der Entladungsdauer benötigt.

Die Auswertung der Versuchsergebnisse. Die Versuchsergebnisse werden graphisch dargestellt. Die Kurve zeigt die zeitliche Änderung der Potentialdifferenz zwischen den Kondensatorplatten[1]). Zur Darstellung dieser Kurve trägt man auf der Abszisse die Abschnitte auf, die dem Abstand zwischen den Kontakten im Moment ihres Öffnens proportional sind. Diese Abstände sind auch den Zeitintervallen proportional, die seit dem Beginn der Entladung verstrichen sind. Der Abstand zwischen den Kontakten kann unter Vorbehalt in der Darstellung unmittelbar in Umdrehungen der Schraube ausgedrückt werden. Auf der Ordinate werden die Mittelwerte der Ausschläge des Galvanometerzeigers für jede Kontaktstellung aufgetragen.

Der Versuch gestattet es, die Schwingungsdauer der Entladung zu bestimmen und die gefundene Größe mit dem Wert zu vergleichen, der nach der Formel (5) errechnet worden ist. Das geschieht in folgender Weise:

Die Bewegungsgleichung eines Pendels, das harmonische Schwingungen ausführt, hat bekanntlich die Form

$$x = A \sin \frac{2\pi}{\tau} t,$$

wobei A die Schwingungsamplitude und τ die Schwingungsdauer des Pendels bedeuten. Die Geschwindigkeit des Pendels erhalten wir durch Differentiation dieses Ausdrucks:

$$u = \frac{dx}{dt} = A \frac{2\pi}{\tau} \cos \frac{2\pi}{\tau} t.$$

In der Nähe der Gleichgewichtslage ist

$$\cos \frac{2\pi}{\tau} t \approx 1$$

und damit

$$u = \frac{2\pi A}{\tau}.$$

Kennt man andererseits den Gang der Schraube l, dann kann man den Abstand B zwischen den Kontakten in cm ausdrücken, der einer Periode der elektrischen Schwingungen entspricht:

$$B = ln,$$

wobei n der gleiche Abstand in Umdrehungen der Schraube ist. Dann ist

$$T = \frac{B}{u} = \frac{ln\tau}{2\pi A}.$$

Der nach dieser Formel erhaltene Wert für die Schwingungsdauer wird mit dem nach der Formel (5) errechneten Wert verglichen.

---

[1]) Wir erinnern nochmals daran, daß das ballistische Galvanometer die Ladung auf den Kondensatorplatten mißt.

Übung 2

Die Untersuchung der Eigenschwingungen bei starker Dämpfung und die Bestimmung des logarithmischen Dekrementes

Messung und Auswertung. Im Rheostaten wird der Widerstand R von etwa 60 bis 70 Ω gestöpselt. Dann wiederholt man alle Messungen genauso wie in der Übung 1. Die Meßergebnisse werden wieder graphisch dargestellt.

Das logarithmische Dekrement wird nach der Formel (6) bestimmt, wobei statt V_n und V_{n+1} die ihnen proportionalen Größen des Ausschlages für das erste und das zweite Maximum der erhaltenen Kurve genommen werden.

Übung 3

Die Messung der aperiodischen Kondensatorentladung

Die Messung wird genauso durchgeführt wie auch in Übung 2, nur erhält der Widerstand R den Wert von etwa 160 Ω. Die Meßergebnisse werden wieder graphisch dargestellt.

Spezialliteratur

1. Siehe Literatur zu Aufgabe 43.
2. S. J. Model und I. Ch. Newjashskij: „Hochfrequenzsender“. VEB Verlag Technik, Berlin 1953.
3. F. Vilbig: „Lehrbuch der Hochfrequenztechnik“. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, Leipzig 1953.

Aufgabe 61

Die Wirkungsweise eines Röhrensenders und die Untersuchung der erzwungenen Schwingungen in Schwingungskreisen verschiedener Güte[1]

Die vorliegende Aufgabe ist eine von denjenigen, die aus der Physik der elektromagnetischen Schwingungen und der Radiotechnik entnommen sind. Am Anfang der Entwicklung der Radiotechnik liegt die Entdeckung der Funkverbindung durch den russischen Gelehrten A. S. Popow vor mehr als einem halben Jahrhundert. In dieser und den folgenden Aufgaben erhalten die Studenten die Möglichkeit, sich mit der modernen Radiotechnik durch Geräte und Anordnungen vertraut zu machen, die unserer Inlandsproduktion entnommen worden sind.

Bei der Ausführung der vorliegenden Aufgabe muß man sein Augenmerk darauf lenken, daß ihr Inhalt in zwei ihrem Wesen nach verschiedene, doch in gleicher Weise wichtige Teile zerfällt. Bei der Ausführung der ersten Aufgabe kann man sich qualitativ mit der Arbeitsweise eines der einfachsten elektromagnetischen selbstschwingenden Systeme vertraut machen. In der

---

[1]) Es empfiehlt sich, diese Aufgabe nach den Aufgaben 60 und 43 auszuführen, bei denen man mit dem Schwingprozeß in einfachen Kreisen und mit der Wirkungsweise von Elektronenröhren vertraut gemacht wird.

zweiten und dritten Übung dieser Aufgabe werden die erzwungenen elektromagnetischen Schwingungen quantitativ untersucht.

Das selbstschwingende System, in dem elektromagnetische Schwingungen entstehen und sich selbständig aufrechterhalten können, trägt die Bezeichnung *Generator elektromagnetischer Schwingungen* (Sender). Die moderne Radiotechnik verwendet zur Erhaltung ungedämpfter Schwingungen Röhrensender. Im ersten Teil dieser Aufgabe wird ein einfacher Sender mit nur einer Elektronenröhre verwendet. Die Schaltung dieses Senders ist in Abb. 184 dargestellt.

Wie man aus der Schaltung ersieht, ist der Schwingungskreis des Senders in den Anodenkreis der Röhre geschaltet. Der Schwingungskreis besteht aus dem Kondensator C_A und den beiden Spulen L_A und L_1. Die erste der beiden

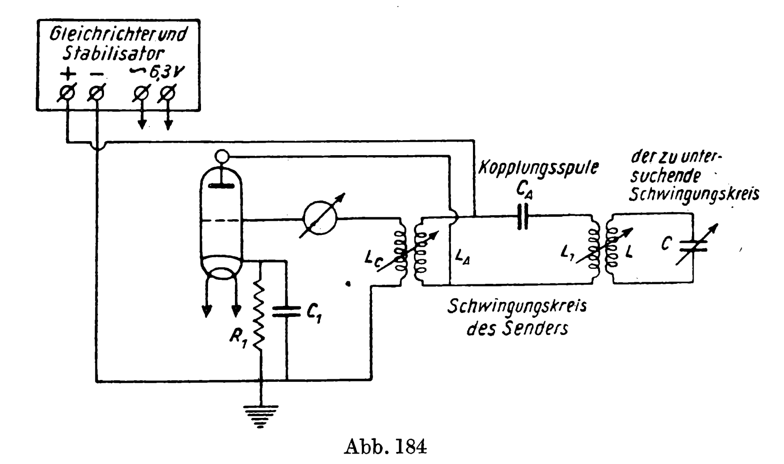


Abb. 184

Spulen bildet mit dem Kondensator den eigentlichen Schwingungskreis. Die mit der ersten Spule und dem Kondensator in Reihe geschaltete kleine Spule L_1 dient nur zur induktiven Kopplung des Senders mit einem anderen Schwingungskreis, der auf der rechten Seite der Abbildung dargestellt ist. Diese induktive Kopplung wird zur Erzeugung von Schwingungen in dem anderen Resonanzkreis verwendet, der in keiner direkten Beziehung zur Arbeit des Senders steht (siehe Übung 2).

Wir setzen den allgemeinen Schwingprozeß, der in einem aus einer Kapazität und einer Induktion bestehenden Schwingungskreis vor sich geht, als bekannt voraus und beschreiben nur den Mechanismus, der in dem Kreis ungedämpfte Schwingungen aufrecht erhält.

In der Schaltung des Senders liegt noch eine Spule L_C, die in den Gitterkreis der Röhre geschaltet und mit der Spule des Schwingungskreises induktiv gekoppelt ist. Diese Spule ist zusammen mit der Röhre und dem Schwingungskreis von prinzipieller Bedeutung für das Arbeiten des Senders.

Die Aufgabe des Gitters bei der Arbeit des Senders besteht darin, den Anodenstrom der Röhre periodisch durchzulassen und zu sperren. Ein Strom

muß deshalb durch die Röhre fließen, damit der Schwingungskreis mit der Anodenbatterie verbunden und damit der Energievorrat des Schwingungskreises aufgefüllt wird, der beim Schwingprozeß für die Erwärmung der Drähte und für die Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen verbraucht wird. Die Verbindung des Schwingungskreises mit der Anodenbatterie über die Röhre muß zu dem Zeitpunkt hergestellt werden, wenn die Vorzeichen der wechselnden Ladung auf den Kondensatorplatten mit der Polarität der Anodenbatterie übereinstimmen. Und wenn die Polarität der Kondensatorplatten nicht mit der der Batterie übereinstimmt, darf kein Strom durch die Röhre fließen. Diese Funktion der Vergrößerung oder Verkleinerung des Anodenstromes in der Röhre erfüllt das Gitter mit Hilfe der Gitterspule.

Die induktive Kopplung des Gitters (sogenannte *Rückkopplung*) mit der Spule des Schwingungskreises muß die Automatisierung und die Erfüllung der oben beschriebenen Funktion des Gitters der Röhre zur rechten Zeit gewährleisten. Die Automatisierung in der Arbeit des Gitters wird dadurch möglich, daß das Potential des Gitters durch den Wert der Spannung bestimmt wird, die in der Gitterspule bei Änderung der Stromstärke in der Spule des Schwingungskreises erzeugt wird. Doch wird das Vorzeichen der Gitterspannung nicht eindeutig durch das Vorhandensein einer solchen Kopplung bestimmt, sondern durch die Wicklungsrichtung der Gitterspule (hinsichtlich der Anodenspule) oder durch Einschalten der Enden der Gitterspule zwischen die Kathode der Röhre und ihr Gitter. Damit die Schwingungen im Schwingungskreis nicht abklingen, ist es notwendig, daß die Phase der Wechselspannung am Gitter der Phase der Wechselspannung an der Anode der Röhre entgegengerichtet ist. Es ist wichtig, daß der Wert der Spannung am Gitter der Röhre stets den Gang der Änderung der Spannung und der Ströme im Spannungskreis unterstützt[1]).

Mit der Kontrolle der Funktionen des Gitters der Röhre und der Rückkopplung ist die Bestimmung des strommessenden Gerätes, das in den Stromkreis des Gitters geschaltet ist, eng verknüpft.

Wie aus der Schaltung ersichtlich, besitzt das Gitter nur dann einen gegenüber der Kathode positiven Spannungswert, wenn eine Spannung in der Gitterspule induziert wird. Nur in diesem Fall fließt ein merklicher Elektronenstrom von der Kathode zum Gitter. Das Gleichstrommeßgerät im Gitterkreis zeigt den mittleren Wert der Stärke des Gitterstromes an. Deshalb zeugt das Auftreten eines Gitterstromes davon, daß der Schwingungskreis des Senders schwingt und die Rückkopplung richtig arbeitet. Diese Art, die Arbeitsweise des Senders zu kontrollieren, wird in der vorliegenden Aufgabe verwendet.

Die Amplitude der Schwingungen im Sender hängt von der Stärke der Rückkopplung zwischen Gitterkreis und Schwingungskreis ab. Deshalb läßt sich die induktive Kopplung zwischen den Spulen L_A und L_G verändern. Die Rückkopplung wird durch Änderung der gegenseitigen Lage dieser Spulen verändert (Abb. 185).

---

[1]) Die Bedingungen, unter denen die Schwingungen im Schwingungskreis regeneriert werden, ist eines der wichtigsten Probleme der Physik der Schwingungsvorgänge. Die Analyse dieser Bedingungen kann jedoch nicht im Rahmen dieses Buches gegeben werden. Die diese Aufgabe Ausführenden müssen sich unbedingt mit ihnen vertraut machen (vor Ausführung der Aufgabe).

Um Störungen zu vermeiden, sind alle Spulen der Schaltung abgeschirmt.

Ein selbständiges Element in der Schaltung des Senders (Abb. 184) ist der Kondensator C_1 und der dazu parallelgeschaltete Widerstand R_1, die im Kathodenkreis der Röhre liegen. Mit diesem Schaltelement wird ein bestimmter Arbeitsbereich der Röhre, d. h. ein Arbeitspunkt A auf der Kennlinie der Röhre, ausgewählt (Abb. 186).

Wir erklären nun das experimentelle Verfahren, das die Auswahl eines bestimmten Arbeitspunktes auf der Kennlinie erlaubt. Der durch den Widerstand R_1 (Abb. 184) fließende Anodenstrom erzeugt die Spannung $I_A \cdot R_1$ zwischen der Kathode und dem Gitter der Röhre. Diese Spannung besitzt ein negatives Vorzeichen. Durch Spannungsabfall an einem Kathodenwiderstand erhält das Gitter eine automatische Gittervorspannung.

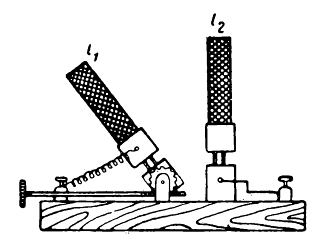


Abb. 185

Eine andere Möglichkeit, dem Gitter eine Vorspannung zu geben, besteht im Einschalten einer besonderen Batterie zwischen die Kathode und das Gitter der Röhre. In diesem Fall hängt die Größe der Verschiebung des Arbeitspunktes auf der Kennlinie nicht von der Stärke des Anodenstromes ab.

Die parallel zum Widerstand geschaltete große Kapazität $C_1 = 0{,}25\,\mu$F (Abb. 184) läßt den Hochfrequenzstrom (der Senderschwingungen) durch, der sonst über den Widerstand R_1 fließen würde.

Eine Kombination von einem Widerstand, zu dem ein Kondensator parallelgeschaltet ist (sie stellen verschiedene Widerstände für Gleichstrom und für Wechselstrom dar), wird häufig verwendet. Wird diese Kombination am Gitter der Röhre verwendet, dann trägt sie die besondere Bezeichnung *Gitterableitung.*

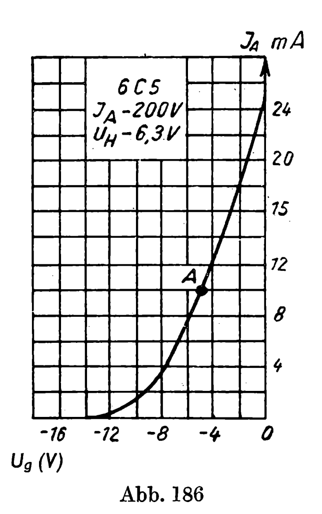


Abb. 186

Die Speisung des Senders geschieht durch den Netzwechselstrom. An die Heizung wird eine heruntertransformierte Spannung und an die Anode eine gleichgerichtete stabilisierte Spannung gelegt.

Übung 1

Das Zusammensetzen und das Einschalten des Röhrensenders

Alle Hauptteile der Schaltung sind auf dem Versuchstisch aufgestellt. Sie sollen eingehend betrachtet und mit den entsprechenden Teilen der Schaltung identifiziert werden. Dann werden die Teile des Senders verbunden und nach Überprüfung durch den Assistenten eingeschaltet.

Man muß versuchen, den Sender zum Schwingen zu bringen (Frequenz: 120 kHz). Dazu stellt man zuerst eine starke Rückkopplung ein. Wenn das im

Gitterkreis liegende Meßgerät keinen Ausschlag zeigt, muß man die Enden der Gitterspule umschalten, um die notwendige Phasenbeziehung zwischen den Wechselspannungen am Gitter und an der Anode herzustellen. Es ist klar, daß dieses nur durch Umschalten der Enden der Gitterspule und nicht durch ihr Drehen oder Umstellen erreicht werden kann.

Nachdem man einen Gitterstrom festgestellt und sich davon überzeugt hat, daß seine Stärke von der induktiven Kopplung zwischen der Gitterspule und dem Schwingungskreis abhängt, wird der Sender eingeschaltet und der Resonanzschwingungskreis zusammengesetzt.

Übung 2

Die Untersuchung der erzwungenen Schwingungen und der Resonanzerscheinungen in Schwingungskreisen verschiedener Güte

In der vorliegenden Übung werden die *erzwungenen Schwingungen* in einem Schwingungskreis untersucht, der mit dem Schwingungskreis des Senders induktiv gekoppelt ist (siehe Abb. 184). Der zu untersuchende Schwingungskreis besteht aus einer Spule mit der Selbstinduktion L, einem induktionsfreien Widerstand R (in Abb. 184 nicht eingezeichnet) und einem geeichten Drehkondensator der veränderlichen Kapazität C. Außerdem muß zur Untersuchung der Schwingungen ein Meßgerät in den Schwingungskreis geschaltet werden. (Es ist in Abb. 184 der Übersicht halber nicht eingezeichnet worden, jedoch in Abb. 188 extra dargestellt. Zur Beschreibung der Aufgabe dieses Gerätes kommen wir später.)

Die Schwingungen werden im Schwingungskreis durch die Spannung erregt, die vom Sender erzeugt und durch induktive Kopplung von L_1 auf L übertragen wird. Die Amplitude dieser Spannung $\mathcal{E}_0$ wird durch den Wert des Wechselinduktionskoeffizienten M der Spulen L und L_1 und durch die Amplitude der zeitlichen Ableitung des Stromes im Sender $\frac{di}{dt}$ bestimmt. Deshalb ist $\mathcal{E}_0 = M\left|\frac{di}{dt}\right| = M\omega i_0$. Die Frequenz dieser Spannung ist offensichtlich die Senderfrequenz ω.

Bei der Untersuchung der erzwungenen Schwingungen ist die Untersuchung der Abhängigkeit der Intensität der Schwingungen von dem Verhältnis der Erregerfrequenz zu der Eigenfrequenz des Systems stets von großem praktischem und theoretischem Interesse. Dieses Verhältnis der Frequenzen läßt sich auf zwei Arten verändern: Man kann entweder die Erregerfrequenz ω ändern (in unserem Falle die Senderfrequenz)[1], oder man ändert die Eigenfrequenz des Systems durch Veränderung seiner Parameter. In der vorliegenden Aufgabe wird die zweite Art benutzt, d. h., die Parameter des zu untersuchenden Schwingungskreises werden verändert, während die Senderfrequenz konstant gehalten wird.

Die Frequenz des Schwingungskreises wird im wesentlichen durch seine Kapazität und Induktivität bestimmt. Aus diesem Grunde werden diese Parameter als die *Hauptparameter* des Schwingungskreises bezeichnet. In der

[1]) Damit werden wir in den Aufgaben 62 und 63 vertraut gemacht.

vorliegenden Übung wird nur ein Hauptparameter, die Kapazität, des Schwingungskreises verändert. Deshalb ist in den Kreis ein Drehkondensator geschaltet. Die Eichkurve des Kondensators liegt unmittelbar neben der Anordnung.

Die Gleichung der erzwungenen Schwingungen (zweites KIRCHHOFFsches Gesetz) schreiben wir für unseren Schwingungskreis in der Form

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{e}{C} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t = M\omega i_0 \sin \omega t .$$

Berücksichtigen wir den Ausdruck $I = \frac{de}{dt}$ für die Stromstärke, wobei e die Ladung auf den Kondensatorplatten bedeutet, so können wir schreiben:

$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \mathcal{E}_0 \omega \cos \omega t .$$

Als Lösung dieser Gleichung für die auftretenden Schwingungen erhalten wir

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi) .$$

In dieser Übung wird die Abhängigkeit der Amplitude der Stromstärke I_0 einer erzwungenen Schwingung des Kreises von seiner Kapazität C bei konstanter Senderfrequenz ω untersucht. (Die Phase φ der erzwungenen Schwingungen soll uns hier nicht interessieren.) Die Amplitude der Stromstärke

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}$$

(Ohmsches Gesetz für Wechselstrom) besitzt ihren Maximalwert $I_{\text{res}} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$ bei **Resonanz**, wenn also $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, d. h., wenn die Frequenz ω der äußeren Spannung gleich der Frequenz der ungedämpften Eigenschwingungen des Kreises ist. Damit die Untersuchung der Amplitude der Stromstärke einen allgemeineren Charakter erhält, ist es bequem, die dimensionslose Größe

$$y = \left(\frac{I_0}{I_{\text{res}}}\right)^2 = \frac{R^2}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}$$

einzuführen.

Die letzte Beziehung stellt die Gleichung der **Resonanzkurve** in dimensionsloser Form dar[1]). Wir formen sie so um, daß man bequem die Abhängigkeit y von einem der Hauptparameter des Schwingungskreises, in unserem Fall von der Kapazität, übersehen kann. (Wir bemerken hier, daß man alle

[1]) Der angeführte Ausdruck gibt in allgemeiner Form die Abhängigkeit der Größe y sowohl von der Frequenz der Erregerspannung als auch von den Parametern des Schwingungskreises wieder. Die Bezeichnung der durch diese Gleichung ausgedrückten Kurve hängt davon ab, als Funktion welcher Parameter y verändert wird. Wenn man die Abhängigkeit von ω betrachtet, dann spricht man von einer **Resonanzkurve**, und wenn man die Abhängigkeit y von L und C bei konstanter Frequenz ω betrachtet, dann spricht man häufig von einer *Abstimmkurve*. Die Veränderung der Parameter des Schwingungskreises (z. B. der Kapazität) mit dem Ziel, die intensivsten Schwingungen zu erhalten, entspricht der Abstimmung eines Radioempfängers auf die konstante Frequenz (Wellenlänge) einer bestimmten Sendestation.

nachfolgenden Überlegungen genauso auch für die Veränderung der Induktivität anstellen kann. Die Endergebnisse sind in beiden Fällen gleich.) Bezeichnen wir mit C_{res} den Wert der Kapazität im Resonanzfall, mit x das Verhältnis $\frac{C_{\text{res}}}{C}$ und mit Q_{res} die *Güte* des Schwingungskreises $\left(Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$ im Resonanzfall, dann nimmt die Gleichung der Resonanzkurve die Form an

$$y = \left(\frac{I_0}{I_{\text{res}}}\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2 Q_{\text{res}}^2 + 1}. \tag{1}$$

Die Resonanzkurve (Abb. 187) ist in diesem Fall zu dem Punkt $x = 1$ symmetrisch.

Es ist nicht schwer, den Zusammenhang zwischen der sogenannten *Halbwertsbreite* der Resonanzkurve und dem Gütefaktor des Schwingungskreises für den Resonanzfall Q_{res} zu finden. Da die Kurve symmetrisch ist, kann man mit der Größe der Änderung Δx des veränderlichen Parameters die halbe relative Breite der Resonanzkurve bezeichnen, bei der die Schwingungsenergie (Quadrat der Amplitude) um das Zweifache gegenüber dem Resonanzwert abnimmt. Dann folgt aus (1) die Bestimmungsgleichung für Q_{res}:

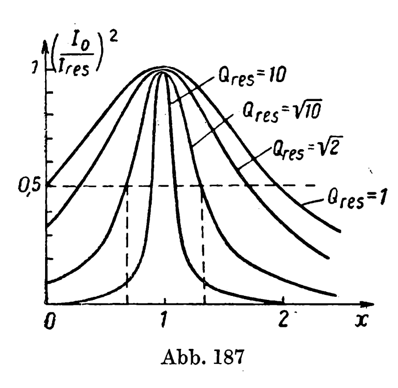


Abb. 187

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{(\Delta x)^2 Q_{\text{res}}^2 + 1}.$$

Hieraus erhält man

$$Q_{\text{res}} = \frac{1}{\Delta x}. \tag{2}$$

Daher ist für die Quadrate der Amplituden die Güte im Resonanzfall der halben relativen Breite der Resonanzkurve reziprok (zum Unterschied zu der Resonanzkurve für veränderliche Frequenz, wo die Güte des Systems zu der relativen Breite der Resonanzkurve für das Quadrat der Amplituden reziprok ist).

Man muß seine Aufmerksamkeit darauf richten, daß im vorliegenden Fall die Gleichungen der Resonanzkurven sowohl für die Amplituden der Schwingungen der Ladungen auf dem Kondensator als auch für die Amplituden der Schwingungen der Spannung an der Induktivität $\left(\left|L\frac{dI}{dt}\right|\right)$ die gleichen sind, wie auch die Gleichung der Resonanzkurve für die Stromamplitude. Sie gehen durch ein Maximum bei dem gleichen Wert $x = 1$. Tatsächlich unterscheidet sich die Amplitude der Stromstärke von der Amplitude der Ladung durch den Faktor ω und von der Amplitude der Spannung an der Induktivität durch den Faktor ω^2. Wenn jedoch die Frequenz ω konstant ist, so sind die Verhältnisse der Amplituden dieser Größen zu ihren Maximalwerten gleich. Wir bemerken weiter, daß in unserem Fall die Resonanzkurve für die Spannungsamplituden am Kondensator $V_0 = \frac{e_0}{C}$ nicht parallel zu der Resonanzkurve für

die Amplitude der Ladung e_0 verläuft, da C veränderlich ist. Das Maximum der Spannung am Kondensator liegt nicht bei dem Wert von x, für den die Amplituden der Ladungen auf dem Kondensator ihr Maximum besitzen[1]).

Der experimentelle Teil der vorliegenden Übung besteht in der Untersuchung der Abhängigkeit der Amplitude der Stromstärke im Resonanzkreis von der Größe der Kapazität des in den Kreis geschalteten Kondensators.

Vor der Ausführung der Messungen muß man darauf achten, daß alle entwickelten theoretischen Überlegungen sich auf den Fall beziehen, wenn auf den untersuchten Schwingungskreis eine Spannung konstanter Amplitude einwirkt. Dabei kann eine Ankopplung des Schwingungskreises sich auf den Arbeitsbereich des Senders auswirken. In Resonanznähe kann, sogar bei schwacher Kopplung, der Sender eine wesentliche Energie an den Resonanzkreis abgeben, und damit kann die Amplitude der Stromstärke des Senders merklich abnehmen. Dieser Umstand führt zu einer Verzerrung der Form der Resonanzkurve, weil von der Amplitude der Stromstärke des Senders die Amplitude der im Schwingungskreis auftretenden Spannung abhängt. Aus diesem Grunde muß man zur experimentellen Untersuchung des betrachteten theoretischen Falles die Amplitude der Stromstärke im Schwingungskreis des Senders konstant halten.

Eine Kontrolle des Wertes dieser Größe kann durchgeführt werden, wenn man in Reihe mit dem Kondensator und der Spule des Senderschwingungskreises einen Hochfrequenzstrommesser schaltet. Als solcher kann in dieser Aufgabe ein Vakuumthermoelement dienen. (Beschreibung dieses Gerätes siehe weiter unten.) Die Konstanz der Anzeige dieses Gerätes bei Annäherung an die Resonanzstelle wird erreicht durch Veränderung des Arbeitsbereiches des Senders. Man ändert die Rückkopplung zwischen dem Gitter der Röhre des Senders und seinem Schwingungskreis und kann damit eine konstante Amplitude der Stromstärke im Schwingungskreis einstellen.

Wir kommen nun zu der Betrachtung der Meßmethode, mit der die Stromstärke im Resonanzkreis bestimmt wird. Der Strom des Schwingungskreises (in unserer Aufgabe) hat eine kleine Amplitude (von der Größenordnung 10^{-4} A) und eine hohe Frequenz (120 kHz), deshalb wird zu seiner Messung ein Vakuumthermoelement (Thermokreuz, Abb. 188) verwendet, das aus dünnen ($\varnothing \approx 10^{-2}$ mm) Kupfer-Konstantan- oder Eisen-Konstantan-Drähten[2]) besteht. Zwei Enden dieses Thermokreuzes gehen zu einem Zeigergalvanometer. Die Messung eines Hochfrequenzstromes ist deshalb möglich, weil im Schwingungskreis die Lötstelle des Thermokreuzes erwärmt wird und die dadurch entstehende Thermospannung einen konstanten Strom im Galvanometer-

[1]) Wenn man jedoch die Resonanz durch Veränderung der Senderfrequenz bei unveränderlichen Parametern des Schwingungskreises einstellt, so erhält man drei verschiedene Resonanzkurven für die Amplitude der Stromstärke, der Ladung auf dem Kondensator und der Spannung an der Induktivität. Diese drei Kurven haben ihr Maximum bei verschiedenen Frequenzen. Die Frequenzen unterscheiden sich um so mehr voneinander, je kleiner die Güte des Schwingungskreises ist. Doch liegen für eine große Güte des Schwingungskreises (kleine Dämpfung des Kreises) diese drei Frequenzwerte, die den drei Maxima der Resonanzkurven entsprechen, sehr nahe beieinander.

[2]) In der Grundschaltung der Aufgabe (Abb. 184) ist dieses Gerät (sowohl in dem Sender- als auch in dem Resonanzkreis) nicht eingezeichnet.

kreis erzeugt[1]). Die Lötstelle befindet sich im Vakuum, um die Wärmeverluste bei ihrer Erwärmung zu verkleinern. Das ist bei der Messung schwacher Ströme sehr wesentlich[2]). Die Ausschläge des Galvanometers sind zur Amplitude der Stromstärke im Schwingungskreis nicht linear. Deshalb muß das vorgegebene System, Thermokreuz — Galvanometer, einer gemeinsamen Eichung unterworfen werden. In unserem Fall ist die Eichung schon vorher durchgeführt worden, und die Eichkurve wird dem Gerät beigegeben.

Man schaltet den Sender ein und verändert mit dem Drehkondensator in kleinen Schritten die Kapazität des Schwingungskreises. Dabei beobachtet man den Zeiger des in den Stromkreis des Thermokreuzes eingeschalteten Galvanometers. (Man muß beachten, daß das Meßsystem Thermokreuz—Galvanometer eine gewisse Trägheit besitzt und muß aus diesem Grunde bei jeder Stellung des Drehkondensators die Einstellung des Zeigers abwarten.) Wenn das Galvanometer auszuschlagen beginnt, dann bedeutet das, daß der Schwingungskreis zu erzwungenen Schwingungen angeregt ist. Durch langsames Drehen am Kondensatorknopf versucht man, das Maximum der durch das Galvanometer fließenden Stromstärke zu finden. Dann reguliert man bei unveränderter Stellung des Drehkondensators die Rückkopplung zwischen Schwingungskreis und Sender so ein, daß der Galvanometerzeiger fast auf Vollausschlag zu stehen kommt[3]). Danach kann man mit den Messungen beginnen.

Man stellt den Kondensator auf den Nullpunkt seiner Skala ein und nimmt eine Resonanzkurve auf bei unveränderter Kopplung zwischen Schwingungskreis und Sender und bei unverändertem Arbeitsbereich des Senders. Zur Aufnahme der Kurve verändert man allmählich die Stellung des Kondensators und schreibt zu jeder seiner Stellungen den Galvanometerausschlag auf, der der jeweiligen Kapazität des Kondensators entspricht. Wenn die Ausschläge des Galvanometers in Resonanznähe sehr stark zunehmen, muß man die Intervalle klein wählen, in denen man die Kapazität verändert. In weiterer Entfernung von der Resonanzstelle können die Intervalle entsprechend größer gewählt werden. Besonders wichtig ist es, genau den Wert der Kapazität zu finden, der dem Maximum der Resonanzkurve entspricht.

Während dieser und den weiteren Messungen wird die Anzeige des strommessenden Gerätes im Senderkreis konstant gehalten.

Weiterhin geht man zu den Messungen mit einem Schwingungskreis über, zu dem verschiedene zusätzliche Ohmsche Widerstände von 25 bis 50 Ω geschaltet werden.

Nach den Messungen führt man die notwendigen Berechnungen durch und zeichnet danach die Resonanzkurve auf. Aus jeder Kurve bestimmt man

---

[1]) Der Aufbau der Thermoelemente für diese Messungen ist sehr unterschiedlich. Hier wird eines beschrieben, bei dem der zu messende Hochfrequenzstrom unmittelbar durch die Lötstelle geht. In anderen Anordnungen fließt er durch einen sehr dünnen Draht, der in der Nähe der Lötstelle angebracht ist und diese erwärmt.

[2]) Das Verfahren, eine Lötstelle in ein evakuiertes Gefäß zu bringen, wurde zuerst von P. N. Lebedew bei seinen bekannten Versuchen zur Messung der Größe des Lichtdruckes angewendet.

[3]) Wie aus dem oben Dargelegten folgt, muß man sich bemühen, bei schwacher Kopplung zwischen Schwingungskreis und Sender zu arbeiten. Zur Verstärkung des Stromes im Schwingungskreis kann man die Rückkopplung im Sender und damit die Amplitude der Stromstärke in der Kopplungsspule vergrößern.

mit Hilfe der Formel (2) die Güte des Schwingungskreises für den Resonanzfall Q_{res}. Die Güte des Schwingungskreises ist mit dem Dämpfungsverhältnis[1]) der Schwingungen im Schwingungskreis ϑ durch die Beziehung $\vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}}$ verknüpft, die bei großem Q die Form $\vartheta \approx \frac{\pi}{Q}$ annimmt. Aus den Gütewerten werden die Werte für das Dämpfungsverhältnis jeder Resonanzkurve ermittelt.

Die erhaltenen Ergebnisse für die Abstimmkurven (Resonanzkurven) mit verschiedenen Gütewerten muß man vom Standpunkt der Selektivität der Schwingungskreise mit verschiedenen relativen Breiten der Abstimmkurven beurteilen. Mit relativer Breite der Abstimmkurve wird die Größe $2\,\Delta x$ bezeichnet, die ebenfalls für alle Abstimmkurven gefunden werden muß.

Übung 3

Die Ausnutzung der Resonanzerscheinung im Schwingungskreis zur Messung der Kapazität und der Selbstinduktion

Die Messung der unbekannten Parameter, der Kapazität C_x, des Koeffizienten der Selbstinduktion L_x und des Koeffizienten der Wechselinduktion M wird nach dem Substitutionsverfahren durchgeführt.

Es wird kein Widerstand in den Resonanzkreis geschaltet.

Parallel zum geeichten, in der vorigen Übung benutzten Drehkondensator wird in den Resonanzkreis ein zweiter ungeeichter Drehkondensator geschaltet. Der Rotor dieses Kondensators wird nacheinander in verschiedene Stellungen gebracht. Für jede Stellung des unbekannten Kondensators wird das Maximum der Resonanzkurve[2]) durch Veränderung der Stellung des geeichten Kondensators eingestellt.

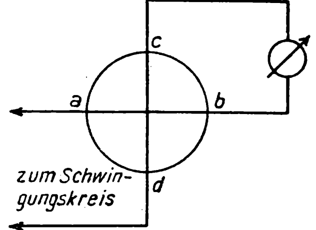


Abb. 188. Schaltung des Vakuumthermoelementes: ab — Konstantandraht; cd — Kupfer-(Eisen-) Draht. Das Meßgerät ist ein Galvanometer.

Da die Frequenz des Senders in allen Übungen unverändert bleibt, ist es klar, daß bei unveränderter Induktivität des Resonanzkreises nur dann Resonanz auftritt, wenn die Summe beider Kapazitäten gleich der in der zweiten Übung bestimmten Kapazität C_{res} des geeichten Kondensators ist:

$$C_x + C' = C_{\text{res}}.$$

Daraus folgt

$$C_x = C_{\text{res}} - C',$$

[1]) Siehe Aufgabe 60.

[2]) In der vorliegenden Aufgabe gewährleistet die Meßmethode nur eine annähernd richtige Bestimmung der Kapazität und der Induktivität aus dem Maximum der Resonanzkurve. Eine genaue Meßmethode, die die Breite der Resonanzkurve verwendet, wird in den Aufgaben 62 und 63 beschrieben.

wobei C' die Kapazität darstellt, die unter der neuen Resonanzbedingung am geeichten Kondensator eingestellt wird.

Die Messung des Selbstinduktions- und des Wechselinduktionskoeffizienten L_x bzw. M geschieht nach den gleichen Überlegungen. Wir schalten hierfür in den Resonanzkreis eine Spule von unbekannter Selbstinduktion in Reihe mit der Hauptspule des Resonanzkreises[1]), deren Induktivität L_0 angegeben wird.

Danach stellen wir wieder das Resonanzmaximum ein. Es entspricht einer neuen Ablesung C'' an dem geeichten Kondensator.

Aus der Konstanz der Schwingungsdauer des Senders erhalten wir:

$$L_0 \cdot C_{\text{res}} = (L_x + L_0)\, C'',$$

woraus folgt

$$L_x = L_0 \left(\frac{C_{\text{res}}}{C''} - 1 \right).$$

Auf diese Weise kann der Selbstinduktionskoeffizient mehrerer Spulen bestimmt werden.

Die gleiche Anordnung kann man auch zur Messung des Wechselinduktionskoeffizienten zweier induktiv gekoppelter Spulen benutzen.

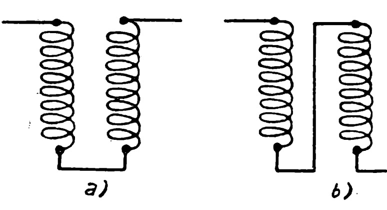


Abb. 189

Der Wechselinduktionskoeffizient wird bekanntlich als die Größe des Induktionsflusses definiert, der die eine Spule durchsetzt, wenn in der anderen Spule eine Einheit der Stromstärke fließt. Deshalb hängt der Wechselinduktionskoeffizient der Spule von der geometrischen Lage der Spulen zueinander und von der Permeabilität des Mediums ab, in das die Spulen eingebettet sind (Abb. 189).

Die Messung wird folgendermaßen ausgeführt: Zwei der schon einzeln gemessenen Spulen werden in Reihe mit der Hauptspule des Resonanzkreises geschaltet. Die zu untersuchenden Spulen werden in eine besondere Halterung eingespannt. Unter diesen Bedingungen sucht man erneut die Stellung C_{I} des geeichten Kondensators, die dem Resonanzmaximum entspricht. Danach schaltet man die Enden einer der beiden Spulen um. Dann behält offensichtlich der Wechselinduktionskoeffizient seinen Wert bei, doch nimmt die Gesamtinduktivität des Kreises ab, weil sich die Richtung des die Spule durchsetzenden Induktionsflusses ändert. Hierauf sucht man erneut die Stellung des geeichten Kondensators C_{II}, die dem Resonanzmaximum entspricht.

Weil sich die Frequenz des Senders nicht ändert, können wir schreiben:

$$(L_0 + L_1 + L_2 + 2M)\, C_{\text{I}} = (L_0 + L_1 + L_2 - 2M)\, C_{\text{II}},$$

woraus folgt

$$M = \frac{L_0 + L_1 + L_2}{2} \, \frac{C_{\text{II}} - C_{\text{I}}}{C_{\text{II}} + C_{\text{I}}}.$$

---

[1]) Es soll keine induktive Kopplung zwischen den Spulen vorhanden sein.

Es ist offensichtlich, daß die Reihenfolge der Messungen keine Rolle spielt, ganz gleich, ob der gesamte Induktionsfluß zu dem Induktionsfluß der Spulen parallel oder antiparallel verläuft. Wichtig ist nur, daß die Neigung der Spulen zueinander bei dem Umschalten der Drahtenden von einer der Spulen (für die zweite Messung) unverändert bleibt.

In dieser Übung ist es nicht notwendig, die ganze Resonanzkurve für jede Kapazitäts- oder Induktionsmessung aufzunehmen. Wichtig ist jedoch, einige Ablesungen der Punkte vorzunehmen, die in und neben dem Maximum der Resonanzkurve liegen. Diese Punkte gestatten es, den Verlauf des Maximums darzustellen und sich von dem normalen Gang der Messung zu überzeugen.

Spezialliteratur

Siehe Literatur zu Aufgabe 60.

Aufgabe 62

Erzwungene Schwingungen und Resonanzerscheinungen im Schwingungskreis

Zubehör: 1. Hochfrequenz-Meßgenerator RFT Typ 159, 2. Röhrenvoltmeter RFT Typ 114a bzw. 116a, 3. Resonanzkreis mit verschiedenen Kondensatoren und Widerständen.

In der vorliegenden Aufgabe werden die erzwungenen Schwingungen in einem Schwingungskreis, der mit einer Wechselstromquelle verbunden ist, untersucht. Die Quelle kann mit dem einfachsten Schwingungskreis entweder hintereinander (Abb. 190a) oder parallel zu ihm (Abb. 190b) verbunden werden. In dieser Aufgabe wird die Schaltung a) benutzt.

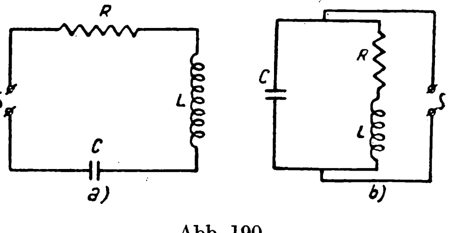


Abb. 190

Bei der Untersuchung erzwungener Schwingungen ist von großem praktischem und theoretischem Interesse die Messung der Abhängigkeit der Intensität der Schwingungen von der Beziehung zwischen der Erregerfrequenz ω und der Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingungen des Systems $\left(\omega_0^2 = \frac{1}{LC}\right)$. Von diesem Standpunkt aus wird der Prozeß der erzwungenen Schwingungen in der vorliegenden Aufgabe behandelt.

Die Intensität der erzwungenen elektromagnetischen Schwingungen im Schwingungskreis kann durch verschiedene Größen charakterisiert werden: 1. durch die Amplitude der Stromstärke, 2. durch die Amplitude der Potentialdifferenz zwischen den Kondensatorplatten, 3. durch die Amplitude der Spannung an der Induktivität des Kreises usw. Die Amplitude jeder dieser Größen läßt sich als Funktion der Größe $\gamma = \omega/\omega_0$ ausdrücken. Diese Funk-

tionen, die häufig die allgemeine Bezeichnung *Gleichungen der Resonanzkurven* tragen, besitzen ein charakteristisches Maximum (wenn die Güte des Kreises $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ nicht zu klein ist) bei einem bestimmten Wert der Größe γ (siehe Abb. 191). Das Maximum jeder Funktion entspricht ihrem eigenen Wert von γ.

Das Verhältnis der Frequenzen ω und ω_0 kann auf zweierlei Arten geändert werden: entweder man variiert den Wert ω_0 (d. h., man verändert die Parameter L und C des Schwingungskreises), oder man ändert die Frequenz ω der auf den Kreis einwirkenden Spannung. Mit der Anwendung der ersten Methode, die dem Abstimmen eines Radioempfängers auf die Frequenz einer bestimmten Sendestation entspricht, kann man sich in Aufgabe 61 vertraut machen. In der vorliegenden Aufgabe bleibt umgekehrt die Eigenfrequenz des Kreises konstant (der Schwingungskreis wird nicht abgestimmt), und es wird die Frequenz der Erregungsspannung geändert. Sehr bequem läßt sich dafür als Wechselstromquelle der Sender vom Typ 159 verwenden. Seine Anwendung wird in der Aufgabe 62 erklärt.

In dieser Aufgabe wird unmittelbar die Abhängigkeit der Amplitude V_0 der Wechselspannung am Kondensator von der Größe $\gamma = \omega/\omega_0$ untersucht. Die Gleichung der Resonanzkurve für die Größe V_0 kann auf folgende Weise erhalten werden: Wir schreiben die Gleichung für die erzwungenen Schwingungen in unserem Kreis in der Form

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{e}{C} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t \qquad \text{(zweites Kirchhoffsches Gesetz).}$$

Berücksichtigen wir, daß die Stromstärke $I = \frac{de}{dt}$ (e = Ladung des Kondensators) ist, so kann man schreiben:

$$L\frac{d^2e}{dt^2} + R\frac{de}{dt} + \frac{e}{C} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t,$$

wobei $\mathscr{E}_0$ die Amplitude der auf den Kreis einwirkenden Spannung bedeutet. Die Lösung dieser Gleichung (wir betrachten nur die sich einstellenden erzwungenen Schwingungen) ist die Funktion

$$e = e_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

wobei

$$e_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2\omega^2 + L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}}.$$

Davon kann man sich durch unmittelbares Einsetzen in die Schwingungsgleichung überzeugen. Benutzen wir die Beziehungen

$$\gamma = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{und} \quad \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = Q$$

(Güte des Schwingungskreises), so erhalten wir

$$e_0 = \frac{\mathscr{E}_0 C}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + \frac{\gamma^2}{Q^2}}}.$$

Uns interessiert die Amplitude der Spannung am Kondensator $V_0 = \frac{e_0}{C}$, folglich ist

$$V_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + \frac{\gamma^2}{Q^2}}}.$$

Die letzte Beziehung ist die gesuchte Gleichung der Resonanzkurve für die Amplitude der Spannung am Kondensator. Für die weitere Untersuchung dieser Kurve und für den Vergleich ihrer graphischen Darstellung mit den Versuchsergebnissen ist es bequemer, ihre Gleichung in dimensionsloser Form zu schreiben:

$$y = \left(\frac{V_0}{\mathscr{E}_0}\right)^2 = \frac{1}{(1-\gamma^2)^2 + \frac{\gamma^2}{Q^2}} = \frac{Q^2}{Q^2(1-\gamma^2)^2 + \gamma^2}.$$

Diese Funktion hat ihr Maximum bei den Werten

$$\gamma = \gamma_{\text{res}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

Für Werte $Q \gg 1$ erhalten wir $\gamma_{\text{res}} \approx 1$; folglich wird das Maximum y bei $\omega_{\text{res}} \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ erreicht.

Nähert sich der Amplitudenwert der Spannung am Kondensator V_0 dem Maximum (bei einem bestimmten Wert γ), so sprechen wir von einer *Resonanzerscheinung* dieser Größe. Aus dem erhaltenen Ausdruck findet man leicht, daß für V_0 bei der Frequenz der äußeren Spannung

$$\omega_{\text{res}}^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{L^2} = \frac{1}{LC} - \frac{1}{2}\frac{R^2}{L^2}$$

Resonanz auftritt. Daraus erhalten wir wieder für schwache Dämpfung des Kreises (für die Güte des Kreises: $Q \gg 1$)[1]):

$$\omega_{\text{res}} \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Setzen wir den Wert von ω_{res} in den Ausdruck für V_0 ein, so finden wir einen maximalen (Resonanz-)Wert dieser Größe:

$$V_{\text{res}} = \frac{\mathscr{E}_0}{CR\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}},$$

und im Falle geringer Dämpfung des Kreises

$$V_{\text{res}} \approx \frac{\mathscr{E}_0}{CR}\sqrt{LC} = \mathscr{E}_0 Q.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß bei Resonanz die Amplitude der Spannung am

[1]) Wir erinnern daran, daß das Maximum der Stromamplitude im Kreis (Resonanz für I_0) stets bei $\omega = \omega_0$ liegt, unabhängig von der Güte des Kreises.

Kondensator größer werden kann als die Amplitude der erregenden Spannung. Geht man von dem letzten Ausdruck für V_{res} aus, so kann man die Güte eines Kreises $Q = V_{\text{res}}/\mathscr{E}_0$ als das Verhältnis der Amplitude der Spannung am Kondensator im Resonanzfall zur Amplitude der erregenden Spannung definieren.

Die dimensionslosen Resonanzkurven für die Spannung am Kondensator sind in Abb. 191 dargestellt. Wenn diese Resonanzkurven experimentell erhalten wurden, so kann man aus ihnen unschwer die Güte des Kreises bestimmen, die als Parameter in die Gleichung für die Resonanzkurve eingeht. Das geschieht auf folgende Weise:

Wir suchen den Wert $\gamma = \gamma_{1/2}$, für den das Quadrat der Amplitude der Spannung am Kondensator halb so groß ist wie das Quadrat der Amplitude im Resonanzfall. Diesen Wert $\gamma_{1/2}$ kann man aus der Bedingung finden:

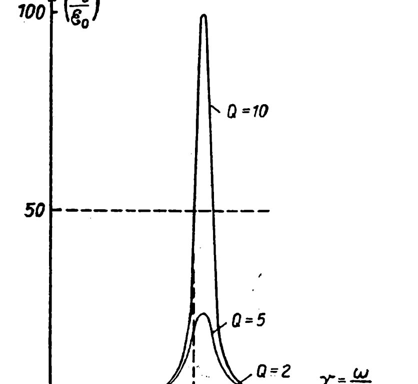


Abb. 191

$$Q^2(1-\gamma_{1/2}^2)^2-\gamma_{1/2}^2=2.$$

Hieraus folgt

$$\gamma_{1/2}^2=1-\frac{1}{2Q^2}\pm\frac{1}{Q}\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}}$$

oder, wenn man die Glieder mit $\frac{1}{Q^2}$ vernachlässigt (d. h., wenn man Kreise betrachtet, für die $Q \gg 1$), so erhält man

$$\gamma_{1/2}^2=1\pm\frac{1}{Q} \quad \text{oder} \quad \gamma_{1/2}=1\pm\frac{1}{2Q}.$$

Wie auch zu erwarten war, existieren zwei Werte für $\gamma_{1/2}$, die auf beiden Seiten vom Maximum der Resonanzkurve liegen und für die das Verhältnis $\left(\frac{V_0}{\mathscr{E}_0}\right)^2$ halb so groß ist wie der Maximalwert. Setzt man $Q \gg 1$ voraus, dann liegen diese beiden Werte symmetrisch zum Punkte $\gamma = 1$, und wir bezeichnen sie mit $\gamma'_{1/2}$ und $\gamma''_{1/2}$. Dann erhalten wir für die Güte des Kreises:

$$Q=\frac{1}{\gamma'_{1/2}-\gamma''_{1/2}}. \tag{1}$$

Das ist richtig für Werte $Q \gg 1$. Wenn man folglich in die experimentell erhaltene Resonanzkurve $\left(\frac{V_0}{\mathscr{E}_0}\right)^2=f(\gamma)$ in der Höhe $\frac{1}{2}\left(\frac{V_0}{\mathscr{E}_0}\right)^2$ eine Gerade parallel zu der γ-Achse einzeichnet, so ergeben die Abszissen der Schnittpunkte dieser Geraden mit der Resonanzkurve die Werte $\gamma'_{1/2}$ und $\gamma''_{1/2}$. Daraus kann man mit Hilfe von (1) die Größe Q ermitteln.

Das Ziel der vorliegenden Aufgabe besteht in der experimentellen Ermittlung einiger Resonanzkurven für verschiedene Kreise und in der Bestimmung der Güte dieser Kreise mit Hilfe der Beziehung (1).

Die Beschreibung der Geräte. Bei den Messungen werden folgende drei Haupteinrichtungen verwendet: die zu untersuchenden Schwingungskreise, das Röhrenvoltmeter RFT Typ 114a und der HF-Meßgenerator RFT Typ 159. Die Kreise sind im zusammengeschalteten Zustand fest montiert. Dabei sind sie, um Platz zu sparen, so angeordnet, daß für alle Kreise die gleiche Induktivität (Spule) benutzt werden kann. Die verschiedenen Kreise werden im Laufe der Ausführung der Aufgabe durch Verbinden verschiedener Kondensatoren mit dieser Spule und durch Hinzufügen verschiedener Widerstände (3 bis 45 Ω) erzeugt. Deshalb kann man durch Veränderung zweier



Abb. 192

Parameter (R und C) bei ein und derselben Spule die Eigenschaften der Kreise in starkem Maße variieren.

Die Spannung am Kondensator des Kreises wird mit Hilfe des Röhrenvoltmeters RFT Typ 114a gemessen. Wir können hier nicht weiter auf die Wirkungsweise eines Röhrenvoltmeters eingehen und verweisen auf die Literatur, die am Ende der Aufgabe 60 angegeben ist. Die Beschreibung dieses Voltmeters wird vom Werk mitgeliefert und steht jedem Studenten im Praktikum zur Verfügung. Wir weisen nur darauf hin, daß unter den Bedingungen der vorliegenden Aufgabe ein Röhrenvoltmeter unentbehrlich ist, weil man ein Meßgerät für den Hochfrequenzbereich benötigt, das außerdem den Kondensator des zu untersuchenden Kreises nicht merklich shuntet.

Der in dieser Aufgabe benutzte HF-Meßgenerator RFT Typ 159[1] erzeugt sinusförmige Schwingungen in einem breiten Frequenzbereich von 30 kHz bis 30 MHz. Die Abb. 192 gibt die Photographie der Frontplatte des Senders wieder, auf der sich alle Drehknöpfe und Anzeigegeräte befinden. In der vorliegenden Aufgabe wird nur ein Teil des Senders benutzt, deshalb wird weiter unten auch nur der zur Messung benötigte Teil beschrieben.

Die Anschlußdose des Senders wird mit dem Wechselstromnetz durch ein Kabel verbunden (siehe Abb. 192). Kippt man den Netzschalter nach oben, so flammt das Signallämpchen *3* auf und zeigt damit an, daß das Gerät mit dem Netz verbunden ist. Die zu untersuchende Schaltung wird mit dem Sender durch ein Kabel verbunden, das in die Ausgangsbuchse gesteckt wird und das an seinen Enden zwei Hochfrequenzstecker (mit Abschirmung, s. Abb. 192) trägt.

Dem Sender kann eine Spannung bis zu 1,5 V entnommen werden. Die Größe dieser Spannung läßt sich durch zwei Knöpfe verändern und wird durch das Meßgerät angezeigt. Um z. B. am Ausgang des Senders 1 V zu erhalten, muß man den Knopf *6* auf den Teilstrich 10 stellen und dann am Knopf *7* drehen, bis der Zeiger des Meßgerätes *5* auf dem Teilstrich 1 der Skala steht.

Die Spannung am Ausgang des Senders ändert sich mit der Frequenz. Deshalb muß man während des Versuches stets auf die Anzeige des Meßgerätes achten und die Spannung konstant halten. Bei den Versuchen wird eine Ausgangsspannung des Senders von 0,8 V benutzt.

Mit einem Schalter wird grob der benötigte Frequenzbereich eingestellt. Die Feineinstellung geschieht durch die Abstimmskala.

Nach dem Versuch wird der Sender durch Herunterkippen des Netzschalters ausgeschaltet.

Die Messung und ihre Auswertung. Man setzt die Anordnung zusammen und schaltet sowohl das Röhrenvoltmeter als auch den Sender ein. Nachdem man sich davon überzeugt hat, daß alle Teile der Anordnung in Betrieb sind, kann man mit der Messung beginnen.

Nach der oben angegebenen Art setzt man die verschiedenen Schwingungskreise aus einer Spule und verschiedenen Kondensatoren zusammen. (Die Widerstände werden vorläufig nicht in die Schaltung gelegt.) Man nimmt die Resonanzkurve für jeden Kreis auf, wobei man die Senderfrequenz von 100 bis 500 kHz variiert. In besonders kleinen Intervallen wird die Frequenz in der Nähe des Maximums der Resonanzkurve verändert. Die Spannung am Ausgang des Generators muß ständig konstant gehalten werden (0,8 V). Aus den erhaltenen Meßergebnissen sucht man sich den Kreis größter Güte, d. h. den Kreis, der den größten Spannungswert am Kondensator besitzt, aus. Dann schaltet man in Reihe mit diesem Kreis verschiedene Widerstände (3 bis 45 Ω), verkleinert damit die Güte des Kreises und nimmt für jeden Widerstandswert die Resonanzkurve auf. Auf diese Weise wird der Einfluß der Güte eines Kreises auf die Form seiner Resonanzkurve untersucht.

---

[1]) Mit dem Aufbau des Senders kann man sich nach der vom Werk mitgelieferten Beschreibung während des Praktikums vertraut machen.

Die erhaltenen Ergebnisse aller Messungen werden graphisch als dimensionslose Resonanzkurven (Abhängigkeit der Größe $\left(\frac{V_0}{\mathscr{E}_0}\right)^2$ von γ) dargestellt. Der zur Bestimmung der Größe γ erforderliche Wert ω_0 wird gleich der Frequenz des Generators angenommen, für die der untersuchte Kreis vor dem Einschalten eines Zusatzwiderstandes die maximale Amplitude der Spannung am Kondensator ergab.

Aus allen dargestellten Resonanzkurven wird die Güte aller Kreise bestimmt. Durch Benutzung des Zusammenhanges des Dämpfungsverhältnisses der Schwingungen im Kreis $\vartheta \approx \pi$ errechnet man das Dämpfungsverhältnis für jeden Kreis. Für jede Kurve bestimmt man $\gamma'_{1/2} - \gamma''_{1/2}$, d. h. die relative Breite der Resonanzkurven. Es ist notwendig, das Problem der Selektivität aller untersuchten Kreise vom Standpunkt ihrer Güte zu beurteilen. Außerdem müssen die Resonanzkurven gezeichnet werden, die die Abhängigkeit $\left(\frac{V_0}{\mathscr{E}_0 Q}\right)^2$ von γ darstellen, d. h., deren Maxima auf Eins normiert sind. Aus ihnen ist besonders anschaulich die Abhängigkeit der Steilheit der Resonanzkurve von der Güte Q des Kreises zu erkennen.

Spezialliteratur

Siehe Literatur zu Aufgabe 60.

Aufgabe 63

Die Vorgänge in einem Schwingungskreis, der parallel zu einer Wechselstromquelle geschaltet ist

Zubehör: 1. zu untersuchender Kreis, 2. Oszillograph, 3. Sender RFT 159.

Einleitung. In der vorliegenden Aufgabe werden Erscheinungen untersucht, die beim Schalten eines Schwingungskreises parallel zu einer Stromquelle auftreten (Abb. 193)[1]).

Betrachten wir den Widerstand Z, den dieser Kreis für den Wechselstrom darstellt: Wir benutzen dazu die Methode der komplexen Widerstände:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{r + j\omega L} + j\omega C$$

oder

$$Z = \frac{r + j\omega L}{j\omega C\,(r + jx)},$$

wobei

$$x = L\omega - \frac{1}{C\omega}.$$

Endgültig erhält man:

$$Z = \frac{1}{\omega C Z_0^2}\left[r\,(\omega L - x) - j\,(r^2 + \omega L x)\right]$$

Abb. 193

1) Siehe auch Abb. 190b im Text der Aufgabe 62, in der verschiedene Möglichkeiten der Schaltung eines Kreises an eine Stromquelle diskutiert werden.

mit

$$Z_0^2 = r^2 + x^2.$$

Wie auch zu erwarten war, hängt der Wert der Größe Z von der Frequenz ω des Stromes ab. Untersuchen wir diese Abhängigkeit genauer.

Man möchte eine Frequenz finden, für die der absolute Widerstand des Kreises $|Z|$ seinen Maximalwert annimmt. Man kann zeigen, daß für Kreise großer Güte

$$\left(Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}} \gg 1\right)$$

die Bedingung des Maximums für $|Z|$ als Funktion von ω praktisch mit der Forderung gleichbedeutend ist, daß der imaginäre Teil von Z verschwindet. Setzen wir den imaginären Teil von Z gleich Null, so erhalten wir:

$$r^2 + \omega L x = 0.$$

Auf Grund des oben Gesagten finden wir aus dieser Gleichung die Frequenz ω_0, für die $|Z|$ den Maximalwert annimmt und gleichzeitig eine reelle Größe wird. Dabei geht der Spannungsabfall am Kreis in Phase mit dem Gesamtstrom, der durch den Kreis fließt, vor sich. Es ist also

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \frac{r^2}{L^2} = \frac{1}{LC}\left(1 - \frac{1}{Q^2}\right).$$

Der Wert der Frequenz ω_0^2, den man auf diese Weise erhält, unterscheidet sich von dem Wert der Frequenz, den man aus der strengen Forderung erhält, daß $|Z|$ ein Maximum wird, durch eine Größe, die kleiner ist als $\frac{\omega_0^2}{6Q^4}$. Die Frequenz ω_0 wird manchmal die *Resonanzfrequenz* genannt, und die Annäherung von $|Z|$ an den Maximalwert für $\omega \to \omega_0$ nennt man *Resonanzwiderstand.* Bei der Wahl dieser Bezeichnung geht man aus von der Analogie zwischen der Abhängigkeit $|Z|$ von ω und dem Streben der Amplitude der Stromstärke zum Maximum für eine bestimmte Frequenz der äußeren Spannung, wenn der Kreis mit der Stromquelle in Reihe geschaltet ist (siehe die Beschreibung der Aufgabe 62)[1]. Wie wir jedoch weiter sehen werden, besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen dieser Erscheinung und den Prozessen, die in der vorliegenden Aufgabe betrachtet werden. Deshalb ist der Begriff „Resonanzwiderstand" nicht immer anwendbar.

Setzen wir die Größe für ω_0^2 in den Ausdruck für Z ein, so finden wir den Maximalwert $Z_{\max}$ (Wirkwiderstand):

$$Z_{\max} = \frac{r}{\omega_0 C Z_0^2}(\omega_0 L - x) = \frac{L}{Cr} = rQ^2,$$

da in diesem Fall

$$Z_0^2 = r^2\left(1 + \frac{r^2}{\omega_0^2 L^2}\right) \quad \text{und} \quad x_0 = -\frac{r^2}{\omega_0 L}.$$

[1]) Wir erinnern daran, daß in diesem Fall nicht nur die Amplitude der Stromstärke, sondern auch die Amplitude der Ladungen auf dem Kondensator und die Amplitude der Spannung an der Induktivität Funktionen (und dabei verschiedene Funktionen) der Frequenz der äußeren Spannung sind. Die Amplitude jeder dieser Größen geht durch ein Maximum, doch hat jede Amplitude dieses Maximum für einen anderen Wert der Frequenz. Bei geringer Dämpfung des Kreises unterscheiden sich diese drei Resonanzfrequenzen nur unwesentlich voneinander.

Aus dem oben Dargelegten folgt: 1. Wenn der Kreis in Reihe mit einem bestimmten Widerstand an eine Stromquelle konstanter Amplitude, aber veränderlicher Frequenz angeschlossen ist, so fällt die Stromstärke im Kreis bei Annäherung der Frequenz der Quelle an der Wert ω_0 und verschwindet um so schneller, je kleiner der Wirkwiderstand r des Kreises ist. Der Spannungsabfall am Kreis wächst dabei und nimmt endlich fast den Wert der Spannung der Quelle an. 2. Wenn in dem Stromkreis, in den der

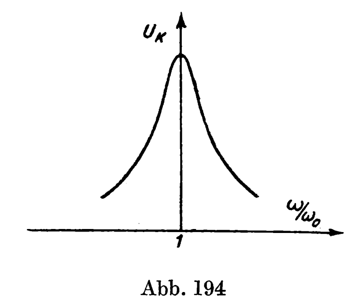


Abb. 194

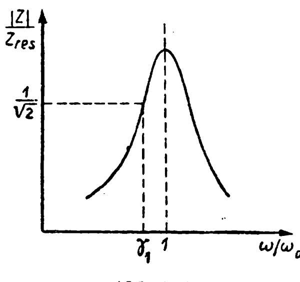


Abb. 195

Schwingungskreis geschaltet ist, die Amplitude der Stromstärke konstant gehalten, doch ihre Frequenz verändert wird, dann ändert sich auch die Größe des Spannungsabfalls am Schwingungskreis. Denn der Abfall am Schwingungskreis ist gleich dem Produkt $Z i_0 \sin \omega t$, und seine Größe ändert sich der Amplitude nach mit der Änderung von $|Z|$ in Abhängigkeit von der Frequenz des Stromes. Die Amplitude des Spannungsabfalls am Schwingungskreis nimmt ein Maximum an für $\omega \approx \omega_0$, wenn die Größe $|Z|$ nahe ihrem Maximalwert ist. Deshalb erlaubt es die experimentelle Untersuchung der Größe des Spannungsabfalls am Schwingungskreis (Abb. 194) als Funktion der Frequenz des Stromes (dessen Amplitude konstant gehalten wird), die Abhängigkeit $|Z|$ von der Frequenz zu untersuchen (Abb. 195). Diese Untersuchung bildet den Hauptinhalt der vorliegenden Aufgabe.

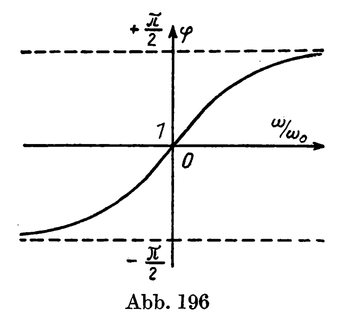


Abb. 196

Außerdem wird in dieser Aufgabe die Phasenverschiebung φ zwischen dem gesamten durch den Schwingungskreis fließenden Strom und dem Spannungsabfall an ihm untersucht. (Der Wert $\operatorname{tg} \varphi$ wird ausgedrückt als das Verhältnis des imaginären Teiles des Widerstandes Z zu seinem reellen Teil.) Die Größe der Phasenverschiebung ist selbstverständlich eine Funktion der Frequenz ω des Stromes. Übereinstimmend mit dem oben Dargelegten ist φ gleich Null für $\omega = \omega_0$. Wir untersuchen nicht die analytische Form der Funktion φ (ω/ω_0), sondern stellen ihren Gang graphisch dar (Abb. 196). Ähnliche Darstellungen müssen experimentell bei der Ausführung dieser Aufgabe erhalten werden.

Bevor wir an die Beschreibung des in dieser Aufgabe auszuführenden Versuches gehen, betrachten wir die Erscheinung im Schwingungskreis selbst in Abhängigkeit von der Frequenz des ihn durchfließenden Stromes. Bisher haben wir uns nicht mit dieser Seite der Aufgabe befaßt, sondern haben den Schwingungskreis nur durch den Wert seines Widerstandes charakterisiert. Bei der Schaltung des Schwingungskreises parallel zu der Wechselstromquelle fließen durch beide Zweige des Kreises (durch den induktiven und den kapazitiven) Ströme, die sowohl ihrer Amplitude als auch ihrer Phase nach unterschiedlich sind. Wenn der induktive Teil keinen Ohmschen Widerstand enthält, hat der Strom in diesem Zweig die entgegengesetzte Phase des Stromes im kapazitiven Zweig. Der gesamte Strom im nicht verzweigten Teil des Kreises ist gleich der Differenz der Stromstärken in den beiden Zweigen des Schwingungskreises. Die Spannung am Schwingungskreis ist in der Phase um $\pi/2$ gegenüber der Stromstärke im nicht verzweigten Kreis verschoben. Mit anderen Worten, der Widerstand des Schwingungskreises ist rein imaginär. Wenn dabei die Frequenz der äußeren Spannung $\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (d. h. gleich der Frequenz der ungedämpften Eigenschwingungen des Kreises) wird, dann werden die Amplituden der Stromstärken, wie man leicht sieht, in dem induktiven und dem kapazitiven Zweig einander gleich, und die Gesamtstromstärke im Kreis der Stromquelle verschwindet. Es fließen jedoch in den Zweigen des Schwingungskreises Ströme, und im Schwingungskreis selbst treten Schwingungen auf. In diesem Fall spielt der Schwingungskreis die Rolle eines Filters (Sperrkreis) hinsichtlich des Wechselstromes der Frequenz Ω_0. Das bedeutet folgendes: Wenn der Schwingungskreis in einen Wechselstromkreis geschaltet wird, an dem Spannungen mehrerer Frequenzen, darunter auch der Frequenz Ω_0, liegen, so verschwindet die Komponente der Stromstärke mit der Frequenz Ω_0 praktisch vollständig, weil der Schwingungskreis vorhanden ist.

Wenn der Schwingungskreis einen Wirkwiderstand enthält (der Schwingungskreis besitzt eine Dämpfung), so ist die Bedingung der Gleichheit der Stromamplituden in den beiden Zweigen des Schwingungskreises und die Bedingung für entgegengesetzte Phasen dieser Ströme verletzt. Folglich ist die resultierende Stromstärke im Kreis ungleich Null. Der durch den unverzweigten Teil des Kreises fließende Strom führt dabei dem Schwingungskreis Energie zu, die im Wirkwiderstand des Kreises in Wärme umgewandelt wird. Den kleinsten Wert nimmt die Amplitude der Stromstärke für den von uns oben errechneten Wert der Frequenz Ω_0 an. Jedoch tritt dieser Abfall der Amplitude der Stromstärke dann auf, wenn auf den Kreis eine Spannung konstanter Amplitude gegeben wird (1. Fall). Wenn man jedoch den 2. Fall betrachtet, d. h., wenn im Kreis der Stromquelle die Amplitude der Stromstärke konstant gehalten wird, dann muß man die am Schwingungskreis liegende Spannung bei Annäherung von ω an ω_0 ständig entsprechend vergrößern.

Der ganze beschriebene Komplex von Erscheinungen, die vom Standpunkt der Amplituden der Stromstärken in den Zweigen des Schwingungskreises und der Amplituden der Stromstärke im äußeren Kreis in Abhängigkeit von der Frequenz betrachtet werden, wird nicht selten als *Stromresonanz* bezeichnet. Wie aus dem Dargelegten ersichtlich ist, entsprechen die beiden Bezeichnungen

„Stromresonanz" und „Resonanzwiderstand" der Betrachtung ein und derselben Erscheinung, jedoch von verschiedenen Standpunkten aus.

Die Messungen und ihre Auswertung. 1. Wie schon oben gesagt, wird die Untersuchung der Abhängigkeit $|Z|$ von ω durch die Untersuchung der Abhängigkeit der Amplitude der Spannung am Schwingungskreis von der Frequenz bei $i_0 =$ const ersetzt. Die Messungen werden mit Hilfe eines Oszillographen ausgeführt, der als Voltmeter benutzt wird. Dazu wird die zu messende Spannung auf die horizontalen Platten des Oszillographen gegeben. Dabei werden die vertikalen Platten geerdet, und die Zeitablenkung bleibt ausgeschaltet. Die Spannung wird aus der Größe der vertikalen Ablenkung des Strahles aus seiner Ausgangslage (nach Möglichkeit aus seiner Zentrallage) bestimmt. Wenn man den Absolutwert der zu messenden Spannung wissen will, muß man vorher die Auslenkung des Strahles in Volt eichen[1]). In unserem Fall wird der Oszillograph nicht geeicht, da keine Absolutwerte der Spannungen gemessen werden. Es wird nur eine solche Verstärkung eingestellt, bei der für alle benutzten Frequenzen eine lineare Abhängigkeit zwischen der Amplitude des Signals und der vertikalen Auslenkung des Strahles gewährleistet ist.

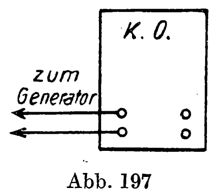


Abb. 197

Vor Beginn der Messung gibt man zur Einstellung der günstigsten Arbeitsbedingungen auf die horizontalen Platten des Oszillographen die Spannung unmittelbar vom HF-Meßgenerator RFT Typ 159 (Abb. 197). Am Generator stellt man eine Frequenz von etwa $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 2{,}5 \cdot 10^5$ Hz[2]) ein und eine Spannung am Ausgang von 0,2 V (nach dem Voltmeter des Senders). Die Verstärkung des Oszillographen stellt man dabei so ein, daß der Strahl um $^2/_3$ des Schirmdurchmessers in vertikaler Richtung ausgelenkt wird. (Danach wird die Verstärkung nicht mehr verändert.) Hierauf setzt man die Schaltung nach Abb. 198 zusammen.

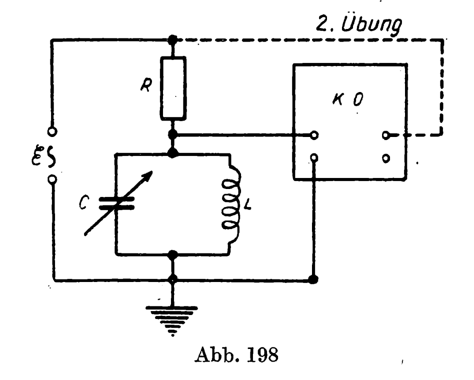


Abb. 198

Die für diese Messung notwendige Konstanz der Stromamplituden wird unter den Bedingungen der vorliegenden Aufgabe auf folgende Weise realisiert: In Reihe mit dem Schwingungskreis (Parameter: $L = 0{,}4$ mHy, $C = 730$

[1]) Das wird durch Anlegen verschiedener bekannter Spannungen an den Eingang des Oszillographen und gleichzeitiger Messung der diesen Spannungen entsprechenden Auslenkung des Strahles bewerkstelligt. Es ist klar, daß diese Eichung bei der gleichen Verstärkung des Oszillographen und bei der gleichen Frequenz durchgeführt werden muß, bei denen er im weiteren als Voltmeter benutzt werden soll.

[2]) Die Parameter vom Schwingungskreis sind weiter unten angegeben. Bei dieser Rechnung nehmen wir $C = 10^3$ pF an.

bis 1280 pF, $r = 5\,\Omega$) ist ein großer Widerstand von $R \approx 1\,\mathrm{M}\Omega$ geschaltet. Die Größe dieses Widerstandes ist $R \geqq 10\,|Z|_{max}$ für alle Frequenzen. Wenn dann am Ausgang des Senders die Amplitude der Spannung konstant gehalten wird, ist die Bedingung der Konstanz der Stromamplitude praktisch für alle Frequenzen erfüllt, trotz einer wesentlichen Änderung von $|Z|$. Am Ausgang des Senders wird die Spannung auf 1,5 V gehalten.

Man ändert die Senderfrequenz und schreibt die Auslenkung des Oszillographenstrahls auf. Die Ergebnisse werden in Form einer Kurve als Abhängigkeit $\frac{|Z|}{Z_{max}}$ von ω/ω_0 dargestellt. Hierbei ist ω_0 der experimentell bestimmte Wert der Frequenz, der dem Maximum der Spannung am Schwingungskreis entspricht. Die Messung wird für drei verschiedene Kapazitäten des Schwingungskreises durchgeführt. Der Frequenzbereich wird dabei so gewählt, daß an den Enden dieses Bereiches der Wert $|Z|$ um einige Male kleiner ist als Z_{max} für den Schwingungskreis größter Güte.

Die graphisch d argestellten Abhängigkeiten $\frac{|Z|}{Z_{max}}$ von ω/ω_0 (siehe Abb. 195) gestatten es, den Wert für die Güte des Kreises leicht zu bestimmen, wenn die Güte groß genug ist ($Q \gg 1$).

Betrachten wir den Wert $|Z|$, wenn wir ihn durch $\gamma = \frac{\omega}{\Omega_0}$, wobei $\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, und durch Q ausdrücken, so erhalten wir:

$$|Z| = r\sqrt{\frac{1+\gamma^2 Q^2}{(1-\gamma^2)^2 + \frac{\gamma^2}{Q^2}}}.$$

Für große Werte von Q (z. B. für $Q \geqq 10$) ist

$$|Z| = r\sqrt{\frac{\gamma^2 Q^2}{(1-\gamma^2)^2}} = r\,\frac{\gamma Q}{1-\gamma^2} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{\omega}{\Omega_0} \approx \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Bilden wir das Verhältnis $\frac{|Z|}{Z_{max}}$, und setzen wir es gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (siehe Aufgabe 62) (diese Größe des Verhältnisses erhält man bei einem bestimmten Wert $\gamma = \gamma_1$), dann erhalten wir:

$$\frac{|Z|}{Z_{max}} = \frac{r\gamma_1 Q}{(1-\gamma_1)^2 r Q^2} = \frac{\gamma_1}{(1-\gamma_1^2)\,Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Hieraus finden wir:

$$Q = \frac{\sqrt{2}\,\gamma_1}{1-\gamma_1^2}.$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß man den gleichen Wert für das Verhältnis $\frac{|Z|}{Z_{max}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ auch für den Wert $\gamma = \gamma_1' = \frac{1}{\gamma_1}$ erhält. Verwendet man dies, so kann man zeigen, daß

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{\gamma_1 - \gamma_1'},$$

d. h., die Güte ist der sogenannten *relativen Breite* der Resonanzkurve umgekehrt proportional (siehe Aufgabe 62). Tatsächlich entsprechen die Werte γ_1 und γ_1' den Werten $|Z|$, wenn man sie um das $\frac{1}{\sqrt{2}}$-fache, verglichen mit dem Maximalwert, vermindert. Die Differenz $\gamma_1 - \gamma_1'$ ergibt die Größe, die man nach Definition mit *relativer Breite der Resonanzkurve* bezeichnet.

Geht man von dem letzten Ausdruck für Q aus, so kann man den Zahlenwert der Güte leicht aus der erhaltenen Kurve (siehe Abb. 195) entnehmen. Die der Länge der Strecke $\gamma_1 - \gamma_1'$ reziproke Größe ergibt den Wert für die Güte. Man wertet auf diese Weise jede Kurve aus und beschriftet sie mit den Werten der Güte, der relativen Breite der Resonanzkurve und der Breite der Resonanzkurve $((\gamma_1 - \gamma_1')\omega_0)$. Vergleicht man die gefundenen Werte für Q mit der Breite der entsprechenden Resonanzkurven, so soll die Brauchbarkeit der Schwingungskreise als Frequenzfilter in Abhängigkeit von dem Wert ihrer Güte beurteilt werden.

2. Das Prinzip der Messung der Phasenverschiebung zweier Schwingungen mit Hilfe des Elektronenstrahloszillographen ist in der Aufgabe 56 beschrieben. Die Messung besteht in der Bestimmung der Parameter einer Ellipse, die man auf dem Schirm als Ergebnis einer Überlagerung zweier Schwingungen erhält, welche sowohl ihrer Phase als auch ihrer Amplitude nach verschieden sind.

Vorher muß man jedoch kontrollieren, ob die Oszillographenverstärker nicht eine Phasenverschiebung bewirken. Dazu gibt man die gleiche Spannung auf beide Eingänge des Oszillographen. Wenn die Verstärker die Phase der verstärkten Signale nicht ändern, dann muß auf dem Schirm eine gerade Linie entstehen. Ihre Neigung hängt von den Amplituden der überlagerten Schwingungen ab. Wenn die Verstärker eine Phasenverschiebung bewirken, dann entsteht auf dem Schirm eine Ellipse. In unserem Fall müssen wir zur Kontrolle beide Eingänge des Oszillographen mit dem Schwingungskreis verbinden und in ihm einen normalen Arbeitsbereich für eine Frequenz ω, die nahe an ω_0 liegt, einstellen. Wenn bei keiner Verstärkung auf dem Schirm eine Gerade erscheint, müssen die Verstärker des Oszillographen überprüft werden. Das wird aber nicht von den Studenten, sondern von Spezialisten ausgeführt.

Nach Beendigung der Kontrolle werden die Oszillographenverstärker mit der Schaltung nach Abb. 198 verbunden (ausgezogene und gestrichelte Linien) und die gesuchte Phasenverschiebung zwischen der Spannung am Schwingungskreis und dem Gesamtstrom durch den Schwingungskreis bestimmt. Dazu mißt man die Ellipsen so aus, wie in Aufgabe 56 angegeben wurde. Die gefundenen Werte der Größe φ werden in Abhängigkeit von dem Verhältnis ω/ω_0 graphisch dargestellt.

Man muß dabei beachten, daß die Art der Schaltung des Oszillographen, wie sie in der Abb. 198 dargestellt ist, zur Messung der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung nicht ganz einwandfrei ist. Wie man aus der Schaltung ersieht, wird ein Eingang des Oszillographen mit dem Schwingungskreis verbunden und der andere (vertikale Platten) parallel zum Meßgenerator gelegt. In Wirklichkeit müßte man den zweiten Oszillographen-

eingang parallel zu dem induktionslosen Widerstand R schalten, an dem die Spannung mit dem Strom in Phase ist. Jedoch läßt sich ein solches Schalten des Oszillographen technisch nicht durchführen, weil bei ihm die unteren Klemmen der Eingänge untereinander und mit der Erde verbunden sind und beim Meßgenerator eine Leitung der Ausgangsspannung geerdet ist. Deshalb lassen sich für die Messung der Phasenverschiebung die Geräte nicht anders zusammenschließen, als es in der Schaltung dargestellt ist. Dort bringt dieser Umstand keine großen Fehler der Messung der Größe φ mit sich. Nach der Bedingung $R \geqq 10\,|Z|$ ist der Strom im nicht verzweigten Teil des Kreises praktisch in Phase mit der Spannung, und wir können anstatt der Phasenverschiebung zwischen dem Gesamtstrom und der Spannung am Schwingungskreis die Phasenverschiebung zwischen der Spannung am Schwingungskreis und der äußeren Spannung messen.

Spezialliteratur

Siehe Literatur zu Aufgabe 60.

Aufgabe 64

Die Arbeitsweise des Kathodenstrahloszillographen

Einführung. Das Ziel der vorliegenden Aufgabe ist es, sich mit dem Prinzip der Arbeitsweise eines Kathodenstrahloszillographen vertraut zu machen.

Der Oszillograph wird hauptsächlich zu folgenden Messungen verwendet:

1. Zur Untersuchung der Spannung oder des Stromes schnell veränderlicher Vorgänge in Abhängigkeit von der Zeit (Form der Kurve) oder in Abhängigkeit von der Spannung oder dem Strom eines anderen Vorganges.
2. Zum Vergleich der Amplituden zweier Spannungen oder zweier Ströme.
3. Zum Vergleich der Phase zweier Ströme, zweier Spannungen oder eines Stromes und einer Spannung.
4. Zur Bestimmung der Schwingungsfrequenz oder zur Messung kleiner Zeitabstände.

Der in dieser Aufgabe verwendete Kathodenstrahloszillograph unterscheidet sich von dem fabrikmäßig hergestellten dadurch, daß er keine Vorverstärkung für das Signal besitzt. Er erlaubt es, veränderliche Vorgänge im Bereich von 10 bis 15000 Hz zu registrieren, deren Momentanwerte der Spannung zwischen 10 und 30 V liegen.

Der Aufbau und die Arbeitsweise des Kathodenstrahloszillographen. Der fabrikmäßig hergestellte Kathodenstrahloszillograph ist ein Gerät, das aus der Elektronenstrahlröhre[1]), den Verstärkern für die Ablenkplatten, dem Kippgerät und dem Netzteil besteht.

Die Elektronenstrahlröhre. Sie erlaubt es, ein schmales, fokussiertes Elektronenbündel zu erhalten, das praktisch trägheitslos ist. Nach dem Prinzip der Fokussierung und der Ablenkung des Strahls unterscheidet man zwei

---

[1]) Anm. d. Übers.: BRAUNsches Rohr.

Typen von Röhren: elektrostatische und magnetische. In Röhren des ersten Typs werden zur Fokussierung und zur Ablenkung des Strahls elektrische Felder und in Röhren des zweiten Typs magnetische Felder verwendet.

Wir wollen etwas eingehender den Aufbau einer evakuierten elektrostatischen Elektronenstrahlröhre betrachten, bei der die Fokussierung des Elektronenstrahls durch zwei Elektronenlinsen verwirklicht wird.

In Abb. 199 ist der schematische Aufbau einer Elektronenstrahlröhre dargestellt. Sie besteht aus einer „Elektronenkanone" (diese ist in der Abbildung gestrichelt umrahmt und mit der Zahl *3* versehen), den Ablenkplatten *8* und *9*, die in zwei senkrecht zueinander stehenden Ebenen angeordnet sind, und dem Fluoreszenzschirm *10*. Die weiteren Einzelheiten der Röhrenkonstruktion werden in der Unterschrift zur Abbildung gegeben.

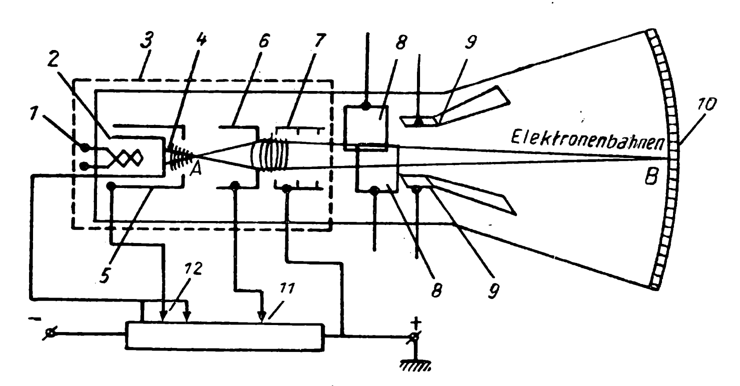


Abb. 199. Die elektrostatische Elektronenstrahlröhre: *1* — Heizung; *2* — Kathode; *3* — „Elektronenkanone" (gestrichelt umrahmt); *4* — emittierende Oberfläche; *5* — fokussierender Zylinder[1]); *6* — erste (fokussierende) Anode; *7* — zweite Anode; *8* — horizontale Ablenkplatten; *9* — vertikale Ablenkplatten; *10* — Fluoreszenzschirm; *11* — Schärfeeinstellung; *12* — Helligkeitseinstellung.

Als Elektronenkanone wird der Teil der Röhre bezeichnet, der das Elektronenbündel liefert. In diesem Teil der Röhre befinden sich: die indirekt geheizte Kathode, die die Elektronenquelle darstellt, der Wehneltzylinder, der die Zahl der je Zeiteinheit herausfliegenden Elektronen reguliert, d. h. die Helligkeit des Punktes auf dem Schirm, die erste (fokussierende) Anode und die zweite (beschleunigende) Anode. Die Spannung, die an die beiden Anoden gelegt wird, beschleunigt die Elektronen und konzentriert sie zu einem engen Bündel. Das Feld zwischen dem Wehneltzylinder und der ersten Anode bildet die objektive Elektronenlinse. Die okulare Elektronenlinse wird durch das Feld zwischen der ersten und der zweiten Anode gebildet.

Die flache vordere Oberfläche der Kathode ist mit einer Oxydschicht bedeckt und wird durch einen Heizfaden erwärmt. Die Mehrzahl der emittierten

[1]) Anm. d. Übers.: Wehneltzylinder.

Elektronen wird durch das Feld zwischen der Kathode und dem Wehneltzylinder längs der Röhrenachse ausgerichtet. Die ausgerichteten Elektronen fliegen durch die Öffnung des Wehneltzylinders und werden durch das elektrische Feld im Punkte A gesammelt. (Das elektrische Feld entsteht durch Anlegen von Spannungen zwischen Kathode, Wehneltzylinder und Anode.) Hinter dem Punkt A gehen die Elektronen wieder auseinander, da die Spannung im Inneren der ersten Anode fast Null ist. Im Gebiet zwischen der ersten und der zweiten Anode werden die Bahnen der Elektronen wieder durch das Feld der Achse genähert. Infolge der erlangten hohen Geschwindigkeiten verlaufen die Elektronenbahnen nach dem Durchgang durch das Feld zwischen erster und zweiter Anode geradlinig und werden im Punkte B fokussiert. Wenn sich dieser Punkt auf der Oberfläche des Schirmes befindet, so spricht man von scharfer Einstellung des Elektronenstrahls.

Die Anoden, die einen Teil der Elektronenlinsen bilden, haben die Form von Zylindern oder von Scheiben, die in der Mitte durchbohrt sind, oder stellen eine Kombination von Scheiben und Zylindern dar. Die im Inneren der Anoden eingebauten Blenden dienen zum Auffangen der nicht genügend fokussierten Elektronen.

Der Schirm der Röhre besteht aus einer Schicht eines fluoreszierenden Stoffes, die auf der Innenseite der Röhre aufgebracht ist. Als fluoreszierende Stoffe werden Willemit, Kalziumwolframat und Zinksulfid verwendet. Treffen Elektronen auf den Schirm auf, so fluoresziert diese Stelle. Von der Art des Leuchtstoffes hängt es ab, ob die Stelle weißlich, grünlich oder bläulich fluoresziert. Die Lichtaussendung nach dem Aufprall der Elektronen dauert Bruchteile einer Sekunde. Es gibt auch besondere Schirme mit erhöhter Nachleuchtdauer.

Durch die Zahlen *8* und *9* sind in Abb. 199 die innerhalb der Röhre befindlichen horizontalen und vertikalen Ablenkplatten bezeichnet. Wenn man an irgendeines dieser Plattenpaare eine Spannung anlegt, so wird der Elektronenstrahl abgelenkt. Die Größe der Ablenkung ist der Spannung zwischen den Platten proportional. An die vertikal angebrachten Platten *8* wird gewöhnlich eine Spannung vom Zeitablenkgerät gelegt, die den Punkt in der horizontalen Ebene ablenkt. Wenn man an die horizontal angebrachten Platten *9* die zu untersuchende, periodisch sich ändernde Spannung anlegt, wird der Punkt auf dem Schirm in der vertikalen Ebene abgelenkt. Aus diesem Grunde erlaubt eine gleichzeitige Einwirkung beider Plattenpaare auf den Elektronenstrahl, auf dem Schirm die zeitliche Veränderung der zu untersuchenden Spannung zu beobachten.

Wenn die Periode der Zeitablenkspannung gleich der Periode der zu untersuchenden Spannung oder durch sie teilbar ist, wiederholt sich das Bild nach jeder Periode der Zeitablenkspannung vollständig, und wir sehen eine stehende (erstarrte) Kurve.

Es gibt auch, worauf schon hingewiesen wurde, Konstruktionen von Elektronenstrahlröhren, bei denen die Ablenkung des Elektronenstrahls durch Anlegen eines magnetischen Feldes bewirkt wird, dessen Kraftlinien senkrecht zu der Röhrenachse verlaufen. Man muß dazu bemerken, daß für Meßzwecke hauptsächlich Röhren mit elektrostatischer Ablenkung des Strahls verwendet

werden. Beim Fernsehen sind Röhren mit magnetischer Ablenkung stärker verbreitet. Bei diesen Röhren wird der Strahl auch magnetisch fokussiert. Die Methode der magnetischen Ablenkung ist unvorteilhafter, weil dabei für verschiedene Messungen verschiedene Ablenkspulen erforderlich sind.

Die Speisung der Elektronenröhre. Die meisten modernen Röhren arbeiten mit Spannungen von 3000 bis 6000 V an der letzten Anode (die dem Schirm am nächsten liegt). Jedoch sind in letzter Zeit Röhren entwickelt worden, die mit Spannungen von 1500 V und weniger arbeiten. Auf die fokussierende Anode wird gewöhnlich eine Spannung von $^1/_3$ bis $^1/_6$ der Spannung der letzten Anode gegeben. Wenn die zweite Anode die fokussierende ist, so erhält die erste Anode eine Spannung von $^1/_{10}$ der Spannung der letzten Anode. Auf die Steuerelektrode (Zylinder) wird gewöhnlich eine negative Spannung von $^1/_{30}$ der Spannung der letzten Anode gegeben.

Der Anodenstrom in einer Elektronenstrahlröhre ist nicht größer als 0,5 mA.

Die Empfindlichkeit der Röhre. Mit *Spannungsempfindlichkeit* der Röhre wird die Ablenkung (in mm) des Punktes auf dem Schirm bezeichnet, der durch eine Potentialdifferenz von 1 V zwischen den Platten hervorgerufen wird.

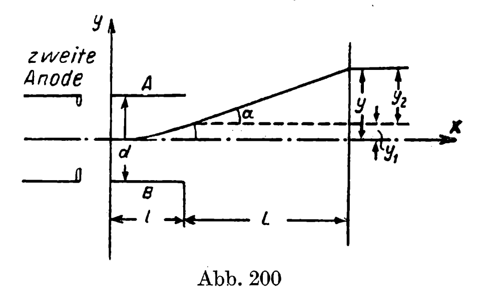


Abb. 200

Wir wollen die Abhängigkeit der Empfindlicheit von den Parametern der Röhre berechnen. Dazu nehmen wir an, daß die Ablenkplatten parallel zueinander stehen und das elektrische Feld homogen ist und senkrecht zu den Platten steht (Abb. 200). Bezeichnen wir mit l die Länge der Platten in cm, mit d den Abstand zwischen den Platten in cm, mit L den Abstand von dem Ende der Platten bis zu dem Schirm, mit V das Potential der zweiten Anode gegenüber der Kathode und mit V_d die Potentialdifferenz zwischen den Ablenkplatten A und B, dann bewegt sich offensichtlich im Gebiet zwischen den Platten in Richtung der Y-Achse das Elektron gleichmäßig beschleunigt, und seine Ablenkung in der Y-Richtung ist am Ende der Platten gleich

$$y_1 = \frac{a t_1^2}{2} \tag{1}$$

und seine Beschleunigung

$$a = \frac{eE}{m} = \frac{eV_d}{md}. \tag{2}$$

Hierin sind e und m die Ladung und die Masse des Elektrons, E die elektrische Feldstärke zwischen den Platten und t_1 die Zeit des Durchgangs der Elektronen durch das Feld der Platten, die durch das Verhältnis bestimmt ist:

$$t_1 = \frac{l}{v_x}, \tag{3}$$

wobei v_x die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit bedeutet. Diese Geschwindigkeitskomponente wird aus der Bedingung bestimmt:

$$\frac{m v_x^2}{2} = e V,$$

woraus man erhält:

$$v_x^2 = \frac{2eV}{m}. \tag{4}$$

Setzt man (2) und (3) in (1) ein, so erhält man:

$$y_1 = \frac{e V_d l^2}{2 d m v_x^2}.$$

Die Ablenkung y_2 außerhalb der Platten kann man in der Form schreiben:

$$y_2 = v_y t_2, \tag{5}$$

wobei v_y die Geschwindigkeit in Richtung der Y-Achse bedeutet, die das Elektron bei dem Herausfliegen aus dem Raum zwischen den Platten erhält. Offensichtlich ist diese Geschwindigkeit:

$$v_y = a t_1$$

und die Zeit, die das Elektron für das Durchfliegen der Entfernung L braucht,

$$t_2 = \frac{L}{v_x}.$$

Setzt man die Werte a, t_1 und t_2 in die Formel (5) ein, so erhält man für y_2 den Ausdruck:

$$y_2 = \frac{e V_d l L}{d m v_x^2}, \tag{6}$$

woraus man für die Gesamtablenkung $y = y_1 + y_2$ erhält, die sich auch in der Form schreiben läßt:

$$y = \frac{e V_d l}{d m v_x^2}\left(\frac{l}{2} + L\right) \approx \frac{e V_d l L}{d m v_x^2}.$$

Setzen wir v_x^2 aus (4) ein, so erhalten wir:

$$y = \frac{V_d l L}{2 V d} \tag{7}$$

und für die Empfindlichkeit

$$j = \frac{y}{V_d} = \frac{l L}{2 V d}. \tag{8}$$

Aus der Formel (8) ist ersichtlich, daß die Empfindlichkeit von dem Abstand zwischen Platten und Schirm und von der Spannung an der zweiten Anode abhängt.

Die oben angeführte Ableitung der Empfindlichkeit wurde unter vereinfachenden Voraussetzungen durchgeführt. In der Praxis sind die in den Elektronenstrahlröhren verwendeten Platten nicht eben, sondern gebogen, um die Randeffekte zu verkleinern.

Der Generator der sägezahnförmigen Spannung[1]). Wie schon festgelegt wurde, hängt die Ablenkung des leuchtenden Punktes auf dem Schirm linear von der Größe der Ablenkspannung ab, die an das entsprechende Plattenpaar (z. B. das vertikale) angelegt wird, d. h. $y = \text{const} \cdot V_d$, wobei const eine Größe ist, die von den geometrischen Daten der Röhre und der Beschleunigungsspannung abhängt.

Betrachten wir das Prinzip der Beobachtung von Vorgängen auf dem Schirm, die sich mit der Zeit ändern.

Nehmen wir an, daß zur Zeit t_0 eine Spannung an die vertikalen Platten gelegt wird, die sich linear mit der Zeit verändert, d. h. $\frac{dV_d}{dt} = \text{const}$. Dann bewegt sich der Punkt auf dem Schirm mit konstanter Geschwindigkeit $\frac{dy}{dt} = \text{const}$ in horizontaler Richtung. Wenn man im gleichen Moment t_0 an die horizontalen Platten die zu untersuchende veränderliche Spannung $V(t)$ legt, so erhält man auf dem Schirm die Kurve der Abhängigkeit V von der Zeit im Zeitintervall von t_0 bis t_1; dabei ist t_1 das Zeitmoment, in dem der Punkt den Rand des Schirmes erreicht. Wenn $V(t)$ eine periodische Funktion mit der Periode T, gleich $t_1 - t_0$, ist, so sehen wir, wenn wir den Strahl im Moment t_1 sofort in die Ausgangsstellung A bringen (Abb. 201) und die zeitliche Ablenkung mit konstanter Geschwindigkeit bis zum Punkt B wiederholen, auf dem Schirm die zweite Periode der Änderung der Größe $V(t)$.

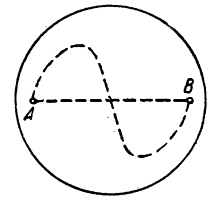


Abb. 201

Wenn wir deshalb den Strahl vom Punkt A bis zum Punkt B längs der horizontalen Achse mit konstanter Geschwindigkeit verschieben und dann sofort von B nach A zurückholen und diesen Vorgang mehrfach wiederholen, so erhalten wir auf dem Schirm ein stehendes Bild der Änderung von $V(t)$ im Laufe einer Periode, wenn die Zeit der Bewegung des Punktes über den Schirm von A bis B $(t_1 - t_0)$ gleich der Periode der Änderung von $V(t)$ ist. Wenn $t_1 - t_0 = nT$, wo n eine ganze Zahl ist, so erhalten wir n Perioden der Änderung der Größe $V(t)$.

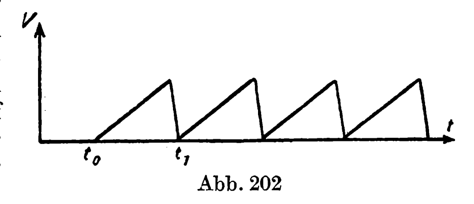


Abb. 202

Nach allem Gesagten ist es leicht einzusehen, daß die Kurve der Spannung für die Zeitablenkung ein sägezahnförmiges Aussehen besitzen muß (Abb. 202). Um eine solche Spannung zu erhalten, besitzt der Oszillograph einen Generator für Kippschwingungen (Zeitablenkgerät), dessen prinzipielle Schaltung in Abb. 210 gezeigt wird.

Das Prinzip der Arbeitsweise des Zeitablenkgerätes beruht auf der Aufladung und Entladung eines Kondensators. Verbindet man einen Konden-

[1]) Der Generator der sägezahnförmigen Spannung ist eine Abart des Generators der Kippschwingungen. Näheres darüber siehe Aufgabe 65.

sator über einen Widerstand mit einer Gleichstromquelle, so erhält man ein Anwachsen der Spannung an seinen Platten nach der Formel

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{\int\limits_0^t I \cdot dt}{C}, \tag{9}$$

wobei q die Elektrizitätsmenge und C die Kapazität des Kondensators bedeuten. Bekanntlich wächst in diesem Fall $V_C(t)$ nach einem Exponentialgesetz bis zu einer konstanten Größe an, die gleich der Spannung der Quelle ist. Die Entladung des Kondensators über einen Widerstand geschieht bekanntlich auch nach einem Exponentialgesetz, und wenn wir im Moment t den Kondensator von der Stromquelle abschalten und mit dem Widerstand verbinden, dann beginnt der Kondensator, sich zu entladen. Wie man aus Abb. 203 ersieht, lädt sich der Kondensator nicht nach einem linearen Gesetz auf und entlädt sich auch nicht augenblicklich.

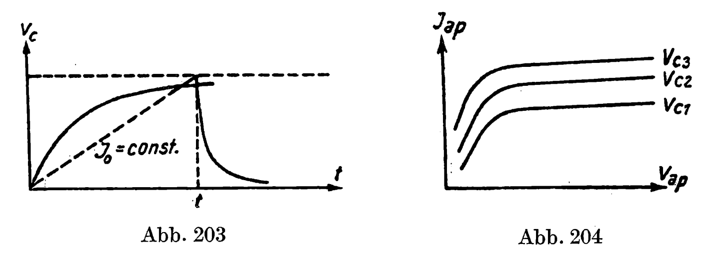


Abb. 203 Abb. 204

Um eine Spannung zu erhalten, die bei der Aufladung des Kondensators linear von der Zeit abhängt, genügt es, wie man aus der Formel (9) sieht, ihn mit einem konstanten Strom I_0 aufzuladen. Dann ist

$$V_C(t) = \frac{I_0}{C} t. \tag{10}$$

Dabei hängt die Neigung der „Sägezähne“ von dem Aufladestrom I_0 und der Größe der Kapazität C ab. In unserer Schaltung des Zeitablenkgerätes wird, um eine lineare Abhängigkeit der Aufladespannung von der Zeit zu erhalten, die Pentode [1]) verwendet, die in Reihe mit dem Kondensator in seinen Aufladekreis geschaltet wird. Die Strom-Spannungs-Kennlinien der Pentode sind in Abb. 204 dargestellt. Dabei erlaubt es die Pentode, in einem Bereich zu arbeiten, bei dem trotz großer Änderung von V_{ap}

$$I_{ap} = \text{const}.$$

Zur praktisch sofortigen Entladung des Kondensators und zur Steuerung des Auf- und Entladeprozesses ist parallel zum Kondensator (C_{29}, C_{30}, C_{31}, Abb. 210) ein Thyratron geschaltet. (Die Benutzung der Eigenschaften des Thyratrons für die Synchronisierung wird weiter unten beschrieben.)

[1]) Über den Aufbau einer Pentode siehe Aufgabe 44.

Das Thyratron besitzt die Eigenschaft, daß es in Abhängigkeit von der Spannung am Gitter nicht bei jeder Anodenspannung U_a einen Anodenstrom durchläßt, sondern nur für $U_a \geqq U_z$, wobei U_z die Zündspannung, d. h. die kleinste Spannung an der Anode, ist, bei der das Thyratron beginnt, den Anodenstrom für eine vorgegebene Gitterspannung durchzulassen. Dabei hängt für $U_a \geqq U_z$ der Strom durch das Thyratron nicht von U_a ab, und sein innerer Widerstand R_i ist sehr klein. Wenn man die Anodenspannung eines „gezündeten" Thyratrons herabsetzt, so hört das Thyratron nicht bei U_z auf, Strom durchzulassen, sondern bei $U'_a < U_z$. Durch Veränderung der Gitterspannung des Thyratrons können wir die Zündspannung U_z entsprechend verändern.

Nun verfolgen wir unmittelbar die Arbeit des Zeitablenkgerätes. Die Zeitablenkspannung für die Ablenkplatten der Röhre wird von einem der Kondensatoren (C_{29}, C_{30}, C_{31}, Abb. 210) genommen und an die Platten mit Hilfe des Umschalters U_{34} (Abb. 210) gelegt. Nach dem Einschalten beginnt der Kondensator, sich über die Pentode aufzuladen, wobei der Aufladestrom konstant ist und die Spannung am Kondensator V_C linear mit der Zeit anwächst.

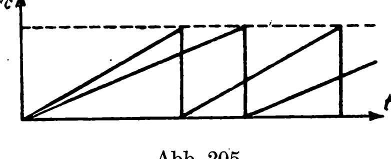


Abb. 205

Wenn der Wert $V'_C = U_z$ erreicht ist, zündet das Thyratron, und da sein innerer Widerstand klein ist, wird der Kondensator praktisch kurzgeschlossen. Er entlädt sich rasch bis zur Löschspannung des Thyratrons, wonach erneut der Aufladevorgang des Kondensators beginnt, usw. Auf diese Weise wird den Kondensatorplatten die Zeitablenkspannung entnommen.

Anmerkung. In der Schaltung des bei dieser Aufgabe untersuchten Oszillographen wird, zum Unterschied zu den fabrikmäßig hergestellten Oszillographen, die Zeitablenkspannung ohne vorherige Verstärkung auf die Platten der Röhre gegeben. Um trotzdem das Signal über einen größeren Teil des Schirmes zeitlich zu trennen, d. h. vom Zeitablenkgerät eine genügend hohe Spannung zu erhalten, ist dieses auf einen Arbeitsbereich eingestellt, bei dem es eine nicht ganz lineare Zeitablenkung bewirkt. Bei den fabrikmäßig hergestellten Oszillographen benutzt man nur den linearen Teil der Zeitablenkspannung, doch muß diese noch besonders verstärkt werden.

Die Frequenzregelung. Bei einer vorgegebenen Gitterspannung des Thyratrons, d. h. bei einem vorgegebenen U_z, hängt die Frequenz der Zeitablenkspannung, wie aus Abb. 205 ersichtlich ist, von der Neigung der „Sägezähne", d. h. von I_0 und C, ab. Ändert man diese Größen, so kann man damit auch die Frequenz im benötigten Intervall ändern. Der Umschalter U_{34} (Abb. 210) ändert die Frequenz grob, und das Potentiometer R_4 ändert sie fein.

Die Synchronisierung. Aus dem früher Besprochenen geht klar hervor, daß für ein stehendes Bild auf dem Schirm die Periode der Zeitablenkspannung ein ganzzahliges Vielfaches der Periode des untersuchten Vorganges sein muß. Andernfalls ändert sich ständig das Bild, wie man aus dem Vergleich der

Abb. 206 mit 207 ersehen kann. Deshalb gibt man das zu untersuchende Signal mit der vorgegebenen Periode T_0 auf den Oszillographen und ändert die Periode der Zeitablenkspannung T_1 so lange, bis man $T_1 = n\,T_0$ eingestellt hat. Durch eine mögliche Instabilität der Zeitablenkfrequenz kann die angeführte Gleichheit im Laufe der Zeit gestört werden. Aus diesem Grunde synchronisiert man die Schwingungen des Zeitablenkgerätes mit anderen stabileren Schwingungen.

Abb. 206

Abb. 207

In dem vorliegenden Oszillographen wird das Zeitablenkgerät dadurch synchronisiert, daß der Zündeinsatz des Thyratrons durch den zu untersuchenden Vorgang gesteuert wird (mit Hilfe von R_5 der Abb. 210).

Eine solche Synchronisierung wird auf folgende Weise erreicht: Ein Teil der Spannung des zu untersuchenden Signals wird auf das Gitter des Thyratrons gegeben, damit seine Zündspannung sich synchron mit der Frequenz des Signals ändert. Betrachten wir nun die in Abb. 208 dargestellte Kurve:

In der Abbildung stellt die parallel zur Abszissenachse verlaufende Gerade den konstanten Wert der Zündspannung U_{Z_0} dar, die durch eine konstante Gitterspannung am Thyratron bedingt ist. Die dick ausgezeichnete Sinuskurve gibt die Abhängigkeit der Zündspannung von der Zeit wieder: Sie ist durch die Signalspannung am Gitter des Thyratrons V_{Sig} bedingt.

Abb. 208

Wenn infolge von Instabilität des Zeitablenkgerätes seine Periode sich um $\pm \Delta\,T_0$ ändert, dann wird die lineare Aufladung des Kondensators durch die punktierten Geraden *I* und *II* dargestellt.

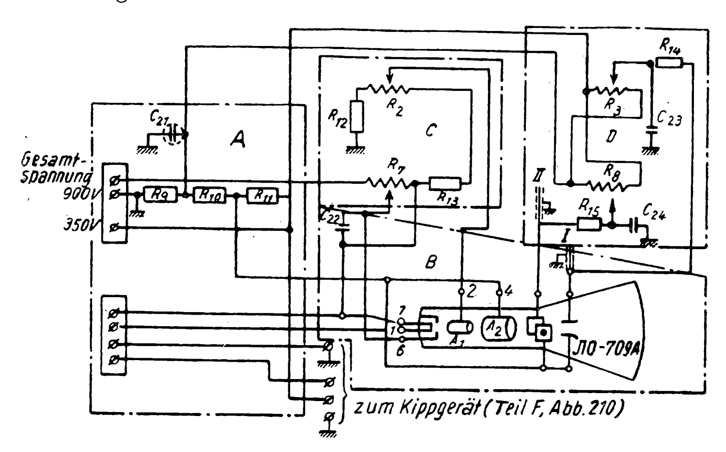
Der Aufladevorgang des Kondensators wird erst dann gestoppt, wenn er bis zur Zündspannung, die jetzt $U_{Z_0} + V_{\text{Sig}}$ beträgt, aufgeladen ist. Doch schneidet die Gerade *I*, die einer Verkleinerung der Schwingungsdauer entspricht, die Kurve U_{Sig} in einem Punkt, der höher liegt als U_{Z_0}. Folglich liegt der Schnittpunkt bei einem größeren t-Wert. Damit wird durch die Wirkung von V_{Sig} die Aufladezeit des Kondensators vergrößert. Für die Gerade *II*, die einer Vergrößerung der Schwingungsdauer entspricht, wird durch die Wirkung von V_{Sig} die Aufladezeit verkleinert.

Als Ergebnis erhält man Abweichungen $2\Delta T_0'$ von der Schwingungsdauer, die kleiner sind als die Abweichungen $2\Delta T_0$, d. h.

$$2\Delta T_0' < 2\Delta T_0.$$

Diese Bedingung wird für Synchronisierungsspannungen von beliebiger Kurvenform erfüllt.

Bei der Untersuchung von Vorgängen mit hoher Frequenz läßt sich ohne Synchronisierung ein stehendes Bild nur schwer einstellen.



Sockelung der Röhre ЛO-709A

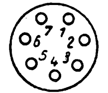


Abb. 209. Das Prinzipschaltbild eines Kathodenstrahloszillographen: A — Netzteil; B — Röhrenteil (Röhre ЛO-709A); C — Fokussierungsteil; D — Strahlablenkungsteil; I und II — zum Zeitablenkgerät (Teil F, Abb. 210); R_2 — Potentiometer von 150 kΩ; R_3 — Widerstand von 50 kΩ, R_7 — 18 kΩ, R_8 — 50 kΩ, R_9 — 15 kΩ, R_{10} — 30 kΩ, R_{11} — 30 kΩ, R_{12} — 220 kΩ, R_{13} — 100 kΩ, R_{14} — 1,5 MΩ, R_{15} — 10 MΩ; C_{21} — Elektrolyt-Kondensator von 10 μF; C_{22} — Kondensator von 1 μF, C_{23} — 0,5 μF, C_{24} — 0,5 μF. Sockelung der Röhre ЛO-709A: *1* — Heizung; *2* — erste Anode A_1; *3* — leer; *4* — zweite Anode A_2; *5* — leer; *6* — Modulator; *7* — Heizung und Kathode.

Die Beschreibung der Anordnung. Der Kathodenstrahloszillograph ist in der vorliegenden Aufgabe der Anschaulichkeit wegen ohne Verstärker[1]) auf offenem Chassis aufgebaut und mit farbigen Drähten verschaltet. Die Speisung

[1]) Man muß beachten, daß auch vollkommenere Oszillographen, die mit Verstärkern versehen sind (z. B. die weiter unten beschriebenen), in manchen Fällen ohne Verstärker benutzt werden. Dann wird der Verstärker ausgeschaltet und das zu untersuchende Signal unmittelbar auf die Ablenkplatten der Röhre gegeben. Das macht man in den Fällen, wenn die Frequenzabhängigkeit der Verstärker für das Durchlassen des zu untersuchenden Signals nicht günstig ist (sehr hohe oder sehr tiefe Frequenzen).

des Gerätes erfolgt durch ein besonderes Netzgerät. Die Spannung wird von diesem Netzgerät zur Klemmleiste des Oszillographen geführt, die an der Rückseite des Chassis montiert ist. Für die Heizung der Röhre ЛО-709A werden 2,5 V und für die Heizung des Zeitablenkgerätes 6,3 V benötigt. Die Anodenspannung der Röhre beträgt 900 V und die Anodenspannung des Zeitablenkgerätes 350 V. Alle Knöpfe, die zur Regulierung des Strahls und des Kippgerätes dienen, sitzen auf der Frontplatte des Oszillographen. Der Oszillograph ist in einzelnen zusammengehörigen Teilen zusammengeschaltet (siehe die Schaltungen der Abbildungen 209 und 210).

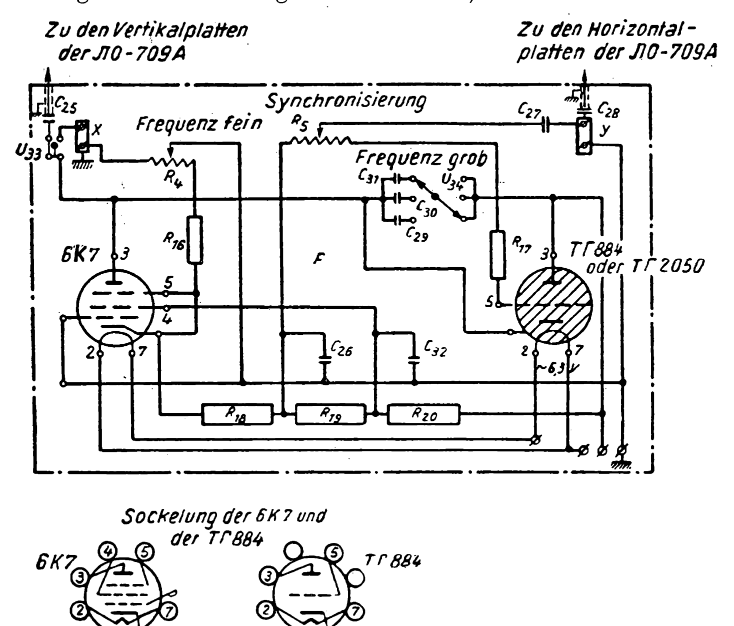
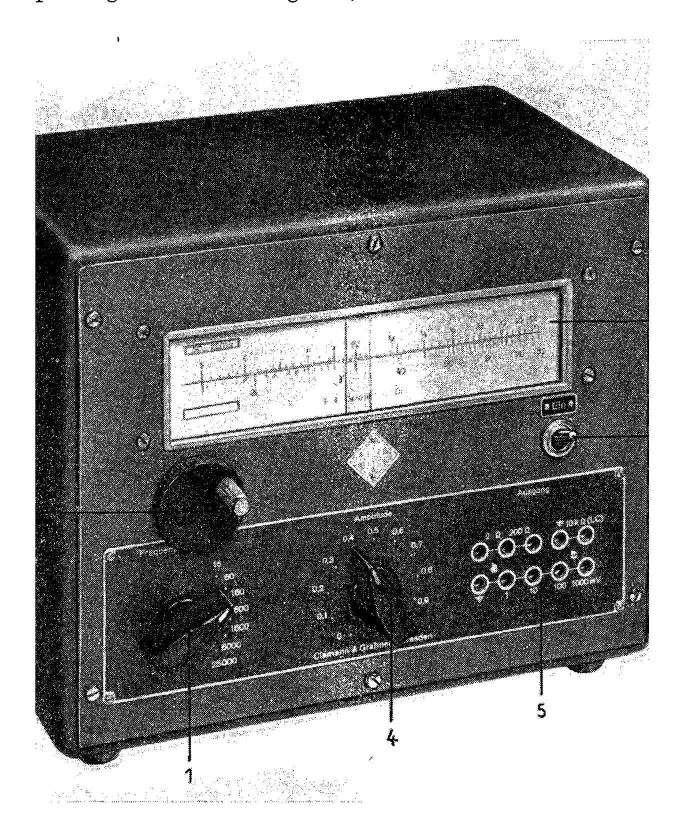


Abb. 210. Die Schaltung des Zeitablenkgerätes (Teil F): $T\Gamma$ 884 — Thyratron, 6K7 — Pentode, R_4 — Potentiometer von 1 kΩ, R_5 — von 360 kΩ, R_{16} — Widerstand von 1,5 kΩ, R_{17} — 300 kΩ, R_{18} — 6 kΩ, R_{19} — 5 kΩ, R_{20} — 40 kΩ, C_{25} — Kondensator von 1 μF, C_{26} — 1 μF, C_{27} — 0,1 μF, C_{28} — 1 μF, C_{29} — 0,07 μF, C_{30} — 0,025 μF, C_{31} — 0,005 μF, C_{32} — 1 μF, U_{33} — Kippschalter (Ausschalter des Zeitablenkgerätes), U_{34} — Umschalter des Frequenzbereiches.

Das Abschalten der Zeitablenkspannung von den vertikalen Platten und das Anlegen einer äußeren Spannung (Netz ~ 50 Hz) an sie geschieht durch den Kippschalter U_{33}.

Die horizontalen und die vertikalen Platten sind mit den entsprechenden Klemmen an der Frontplatte verbunden. Mit Hilfe der Drehknöpfe kann die Helligkeit und die Fokussierung reguliert, der Strahl in horizontaler und vertikaler Richtung verschoben und außerdem die Frequenz der Zeitablenkspannung und die Synchronisierung grob und fein eingestellt werden.

›r bemerken, daß der Modulator (*6* in Abb. 209) nicht nur zur m
Helligkeit des Bildes auf dem Oszillographenschirm dient. M‹
›matischen Regelung der Strahlhelligkeit (der sogenannten Hellst‹
ıes Signal, das auf den unabhängigen Ausgang des Modulators
Dieser Ausgang befindet sich an der hinteren Klemmleiste des
mit der Helligkeitseinstellung, d. h. im wesentlichen mit dem I
pannung am Modulator reguliert, direkt verbunden. Bei der Be



'onfrequenzgenerator. *1* Frequenzbereichschalter; *2* Frequenzsk
ıregler; *4* Netzschalter; *5* Ausgang; *6* Feineinstellung der Freq

›ewirken zwei Signale oder ein Signal und seine zeitliche Ablen]
trahls über die Schirmfläche der Röhre, während das Modulatic
s beobachteten Bildes bestimmt und sogar seine vollständige Aus]
(bei genügend großer Signalamplitude).
'ahren zur Umwandlung einer ausgezogenen Kurve auf dem S‹
‚e“ mit Hilfe einer periodischen Hellsteuerung werden speziell
Zeitintervalle (oder der Frequenz des zeitablenkenden Signals) r
›n verwendet. In diesen Fällen gibt man auf die Ablenkplatten des

graphen ein Signal von einer Normalfrequenz oder von einem Tongenerator und bestimmt aus der Zahl der Unterbrechungen, die durch den Modulator an der durchgehenden Kurve hervorgerufen worden sind, die Frequenz des Modulationssignals. Eine ähnliche Methode läßt sich auf die Modulation eines unperiodischen Signals anwenden, d. h., wenn man, ganz allgemein, die Normalfrequenz nicht mit der Frequenz der unbekannten Signalfrequenz durch Erzeugung von LISSAJOUS-Figuren vergleichen kann. In diesem Fall stellt man fest, welcher Teil der ausgezogenen Kurve, z. B. der vom Signal der Normalfrequenz auf dem Schirm erzeugten Kurve, durch das Modulationssignal ausgelöscht wird. Man muß beachten, daß der Modulatoreingang keinen Verstärker besitzt. Deshalb muß man auf die Modulationselektrode ein Signal von einigen 10^1 Volt geben.

Die Modulationselektrode wird ebenfalls für die Arbeit des Oszillographen bei einmaliger Zeitablenkung und zur Löschung des Rückwärtsganges des Strahls auf dem Schirm verwendet.

Um eine strenge „Strichelung" zu erhalten, muß man auf die Modulationselektrode Rechteckimpulse der Sperrspannung geben.

Als Wechselstromquelle wird ein Tongenerator (Beschreibung siehe unten) und das Netz benutzt. Um die Größe der Spannung verändern zu können, wird die Netzspannung über einen Regeltransformator an die Schaltung gelegt.

Der Tonfrequenzgenerator (Typ GF-2[1]) erzeugt sinusförmige Schwingungen im Tonfrequenzbereich von 16 bis 25000 Hz. Er arbeitet nach dem Prinzip der RC-Brücken-Sender. Die Photographie seiner Frontplatte wird in Abb. 211 wiedergegeben.

Die Frequenzskala ist unmittelbar in Hz geeicht. Die abgelesenen Skalenteile müssen mit der Zahl multipliziert werden, die an dem Umschalter für die einzelnen Bereiche angegeben ist. Die Ausgangsspannung des Generators wird an den Klemmen (unten rechts) abgenommen und ihre Größe durch ein Potentiometer geändert. Das Gerät wird an das Wechselstromnetz von 110/220 V angeschlossen.

Praktische Hinweise. 1. Der Oszillograph benötigt eine Spannung von 900 V, deshalb darf die Schaltung von den Studenten nicht verändert werden.

2. Um das Beschädigen des Schirmes zu vermeiden, darf man das Zeitablenkgerät nicht für längere Zeit ausgeschaltet lassen.

3. Die Messung der Empfindlichkeit soll nur für die horizontalen Platten durchgeführt werden.

Die Messung

Übung 1

Bevor der Oszillograph eingeschaltet wird, soll man sich nach den Schaltbildern der Abbildungen 199, 209 und 210 mit dem Aufbau der Schaltungen vertraut machen, die Bedeutung der einzelnen Drehknöpfe bestimmen, die Frontplatte abzeichnen und den Aufbau der Röhre ЛО-709А studieren. Dann wird der Oszillograph eingeschaltet und die Strahlablenkung geprüft.

---

[1]) Fa. Chamann & Granert, Dresden.

Übung 2

Es wird die Empfindlichkeit des aus den Horizontalplatten der Röhre bestehenden Systems bestimmt. Dazu gibt man auf die Horizontalplatten bei ausgeschaltetem Zeitablenkgerät eine Spannung vom Netz über den Regeltrafo. Die angelegte Spannung wird durch ein Voltmeter gemessen. Sie darf 45 bis 50 V nicht überschreiten.

Die Empfindlichkeit der Röhre wird nach der Formel

$$\gamma = \frac{L}{2\sqrt{2}\,V_d}$$

berechnet, wobei L die Höhe des leuchtenden Streifens auf dem Schirm der Röhre, die in mm angegeben wird, und V_d die an die Horizontalplatten gelegte Spannung, deren Größe durch ein Wechselspannungsvoltmeter gemessen wird, bedeuten.

Übung 3

Man gibt eine Spannung von dem Tonfrequenzgenerator auf die Horizontalplatten (vertikaler Eingang des Oszillographen) und bestimmt, da man die Empfindlichkeit der Röhre kennt, die Maximalamplitude der Spannung, die der Tongenerator für die Frequenzen 20, 200, 800, 2000, 6000, 10000 und 15000 Hz liefert. Da man weiß, daß der Eingang des Oszillographen niederohmig ist (es ist kein Verstärker vorhanden, der dem Oszillographen das Signal liefert), bestimmt man, bei welcher Frequenz die Spannungsamplitude abzunehmen beginnt.

Die Messung wird bei abgeschalteter Synchronisierung durchgeführt. (Der Knopf des Potentiometers R_5 ist ganz nach links gedreht.)

Übung 4

Bei ausgeschaltetem Zeitablenkgerät benutzt man die Spannung des Netzes (über den Regeltrafo) und des Tongenerators und erhält damit unbewegliche LISSAJOUS-Figuren für das Frequenzverhältnis 1 : 1, 1 : 2, 1 : 5. Man zeichnet diese Figuren ab. Die dem Oszillographen zugeführten Spannungen dürfen 50 V nicht überschreiten.

Übung 5

Man bestimmt mit Hilfe des Tongenerators die Zeitablenkfrequenz des Oszillographen für jede Stellung des Potentiometers R_4 für alle drei Stellungen des Umschalters der Frequenzbereiche U_{34}.

Das Übereinstimmen der Frequenzen wird aus dem Stehen des Bildes einer Periode der Sinuskurve auf dem Röhrenschirm geschlossen. Die Messung wird bei ausgeschalteter Synchronisierung durchgeführt. (Der Knopf des Potentiometers R_5 ist ganz nach links gedreht).

Für eine Frequenz des mittleren Bereiches soll der Einfluß der Größe der Spannung des äußeren Signals auf die Frequenzänderung des Zeitablenkgerätes (Synchronisierung) untersucht werden. Dazu wird die Synchronisierung eingeschaltet (mittlere und äußere Stellung des Knopfes), und man bringt durch

Änderung der Frequenz des Tongenerators das Bild der Sinuskurve erneut zum Stehen.

Man bestimmt die Größe der Änderung der Zeitablenkfrequenz durch den Einfluß der Synchronisierung (siehe Aufgabe 64).

Zusatz

Es werden hier die Photographie und die Beschreibung der Frontplatte der fabrikmäßig hergestellten Oszillographen 1 KO-703 und EO-1/70 wieder-



Abb. 212

gegeben. Sie sind vielseitig anwendbar und werden speziell in den Aufgaben 50, 56, 58, 63 und 65 verwendet.

Der Kathodenstrahloszillograph

Der Einstrahl-Oszillograph dient zur Untersuchung und Messung von Wechselspannungen zwischen 0,05 und 250 V bei Frequenzen bis 1 MHz. Das Gerät ist mit einem Meßplattenverstärker und einem Zeitplattenverstärker ausgerüstet. Die Zeitablenkung wird in einem Kippgerät erzeugt. Die Frequenz der Kippspannung ist durch einen Grobstufenregler und einen Feinregler beliebig einstellbar. Der zeitliche Verlauf der Kippspannungen ist nahezu linear.

Hauptbestandteil des Gerätes ist die Bildröhre mit einem Schirmdurchmesser von 60 mm. Die Röhre wird mit einer Gleichspannung von 500 V betrieben. Die übrigen notwendigen Spannungen werden über einen Spannungsteiler dem eingebauten Netzgerät entnommen. Auf der Frontplatte befinden sich u. a. die notwendigen Regelorgane für die Punkthelligkeit, Punktschärfe, Kippfrequenz und den Verstärkungsgrad beider Verstärker. Die Regler für beide Verstärker sind so ausgebildet, daß durch eine Kombination des Potentiometers mit einem Dreh- bzw. Zugschalter im Bedarfsfalle der Eingangswider-

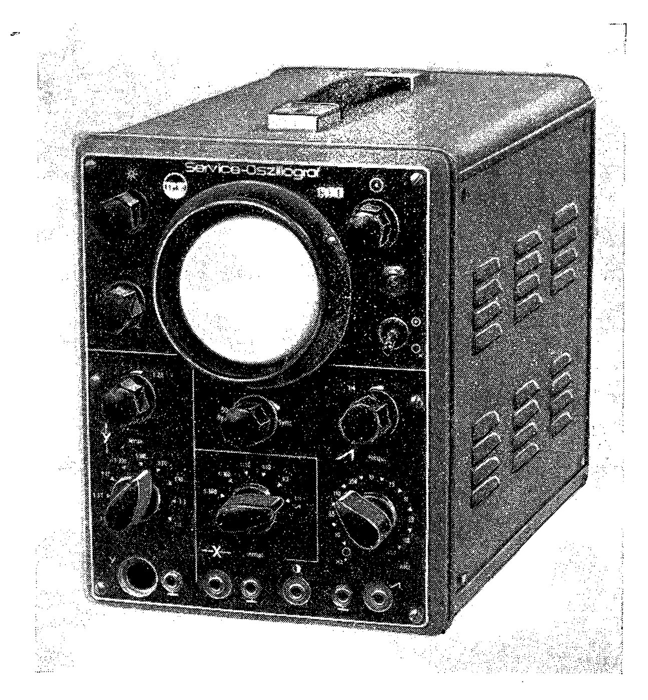


Abb. 213

stand des Potentiometers ausgeschaltet werden kann. Von einer auf der Rückseite des Gerätes befindlichen Buchse kann die Kippspannung, z. B. zur Synchronisierung eines frequenzmodulierten Senders, dem Oszillographen entnommen werden.

Die Bedeutung der Knöpfe ist an der Frontplatte bezeichnet.

Technische Daten

1. Meßplattenverstärker

   Verstärkungsfaktor: $n = 70$—80fach

   Frequenzbereich: 30 Hz ··· MHz

Frequenzgang: 1 : $\sqrt{2}$facher Abfall
Eingangswiderstand: 100 kΩ bzw. 500 kΩ

2. Zeitplattenverstärker
   Verstärkungsfaktor: $n = 70$—80fach
   Frequenzbereich: 30 Hz ··· 1 MHz
   Frequenzgang: 1 : $\sqrt{2}$facher Abfall
   Eingangswiderstand: 100 kΩ bzw. 500 kΩ
3. Meß- und Zeitplatteneingänge
   Höchste Meßspannung 250 V_{eff}
   Eingangswiderstand: 100 kΩ bzw. 4 MΩ
4. Kippgerät
   Kippfrequenz: 15 Hz ··· 250 kHz stetig veränderlich
   Unlinearität: $L_u \leqq 10\%$
   Eigen- und Fremdsynchronisierung über Synchronisierungsverstärker möglich, Synchronisiergrad veränderlich.

Der Service-Oszillograph EO-1/70

Die Bedeutung der Knöpfe ist an der Frontplatte verzeichnet.

Der Innenaufbau besteht aus folgenden 4 Hauptgruppen:

1. Netzteil mit allen Bauelementen der Stromversorgung,
2. Frontteil mit allen Bedienungselementen und der Sichtröhre,
3. Y-Verstärkerteil für die Vertikalauslenkung,
4. X-Verstärker- und Zeitablenkteil für die Horizontalauslenkung.

Technische Daten

Kathodenstrahlröhre	B7S1, Leuchtschirmfarbe grün, Schirmdurchmesser 70 mm, Meß- und Zeitplatten doppelt, elektrostatisch, symmetrisch, Lichtschutztubus, aufsteckbares Raster.
Ablenkempfindlichkeit	Y-Achse etwa 15 V_{eff}/cm, X-Achse etwa 19 V_{eff}/cm, (direkt nur bei Abnahme der Seitenbleche zugängig).
Hell-Dunkel-Steuerung	50 Hz ··· 1 MHz, Eingangswiderstand etwa 50 kΩ bei etwa 20 pF.

Horizontalsteuerung X-Achse

1. Durch Zeitablenkgerät, linear, halbsymmetrisch

Frequenz	10 Hz ··· 400 kHz, regelbar in 9 Stufen 1 : 3 bzw. 3 : 10 und abschaltbar sowie kontinuierlich etwa 1 : 4.
Zeitbasisdehnung	etwa 2,5- und 5fach im gesamten Frequenzbereich; beliebige Phasenabschnitte mit Zeitbasismikroskop-Zusatz.
Synchronisierung	eigen und Netz, stetig regelbar.
Kippausgangsspannung	etwa 30 V_{ss}.

2. Durch Breitbandverstärker, halbsymmetrisch

Frequenzbereich	2 Hz ··· 2 MHz.
Verstärkung	35fach $\pm$ 3 db.
Regelung	durch Spannungsteiler in 6 Stufen 1 : 300, 1 : 100, 1 : 30, 1 : 10, 1 : 3, 1 : 1.
Ablenkempfindlichkeit	150, 50, 15, 3, 1,5, 0,5 V_{eff}/cm.
Maximale Eingangsspannung	300 V_{eff}.
Eingangswiderstand	Stufen 1 : 300 ··· 1 : 3 $>$ 2 MΩ $<$ 16 pF, Stufe 1 : 1 $>$ 1 MΩ $<$ 30 pF.
Maximale Aussteuerung	50 mm (bei obiger Grenzfrequenz 35 mm).

Vertikalaussteuerung (Y-Achse)

Durch Breitbandverstärker, halbsymmetrisch

Frequenzbereich	4 Hz ··· 4 MHz.
Phasenänderung $\cong$ 2°	50 Hz ··· 200 kHz.
Verstärkung	1500fach $\pm$ 3 db.
Anstiegszeit	90 ns.
Regelung	kontinuierlich 1 : 2 und in 9 Stufen 1 : 10000, 1 : 3000, 1 : 1000, 1 : 300, 1 : 100, 1 : 20, 1 : 10, 1 : 3, 1 : 1.
Ablenkempfindlichkeit	100, 30, 10, 3, 1, 0,3, 0,1, 0,03, 0,01 V_{eff}/cm.
Maximale Eingangsspannung	300 V_{eff}.
Maximale Aussteuerung	30 mm (bei obiger Grenzfrequenz 20 mm).
Eingangswiderstand	Stufen 1 : 10000 ··· 1 : 3 $>$ 3 MΩ bei $<$ 16 pF, Stufe 1 : 1 $>$ 1,5 MΩ bei $<$ 20 pF.
Höhenverschiebung	Maximal etwa 15 mm.
Netzanschluß	110/220 V 40 ··· 60 Hz, Leistungsaufnahme etwa 50 W.

Spezialliteratur

J. Czech: „Der Elektronenstrahl-Oszillograph". Verlag für Radio — Photo — Kinotechnik GmbH, Berlin 1955.

Aufgabe 65

Kippschwingungen in der Schaltung mit einer Glimmlampe

Zubehör: 1. Glimmlampe, 2. auswechselbare Kondensatoren, 3. Widerstände, 4. Spannungsteiler, 5. Gleichrichter für 300 V, 6. Gleichstromvoltmeter, 7. Milliamperemeter, 8. Oszillograph, 9. Schaltschnüre.

Einführung. In dieser Aufgabe werden der Charakter und die Bedingungen untersucht, unter denen in der Schaltung mit einer Glimmlampe Kipp-

schwingungen auftreten, und ihre Abhängigkeit von den Parametern der Schaltung und der Lampe.

Die einfachste Schaltung zur Erregung von Kippschwingungen ist die Schaltung mit einer Glimmlampe. Sie ist in Abb. 214 dargestellt. Darin sind N die Glimmlampe, C_1, C_2 und C_3 die auswechselbaren Kapazitäten der Größe 10000 pF, 20000 pF und 0,1 μF, R ein Widerstand und P der Spannungsteiler, an dem die vom Gleichrichter gelieferte Spannung von 300 V liegt.

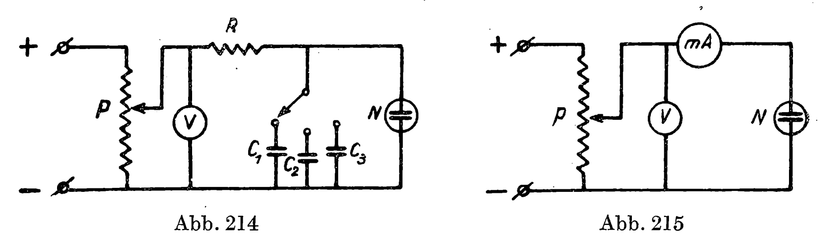


Abb. 214 Abb. 215

Das Verhalten der Schaltung hängt wesentlich von den Eigenschaften der Glimmlampe ab. Deshalb muß man vor allem ihre Charakteristik aufnehmen, d. h., man muß die Abhängigkeit der Spannung an der Lampe von der durch sie fließenden Stromstärke bestimmen. Hierzu dient die in Abb. 215 dargestellte Schaltung. Die statische Charakteristik der Lampe erhält man, wenn man die Spannung an der Lampe mit Hilfe des Spannungsteilers R verändert und nach der Anzeige des Milliamperemeters die Stromstärke notiert, die den verschiedenen Spannungen entspricht.

Die Charakteristik der Glimmlampe ist in Abb. 216 dargestellt. Aus dieser Abbildung ist ersichtlich, daß für kleine Spannungen an den Elektroden der

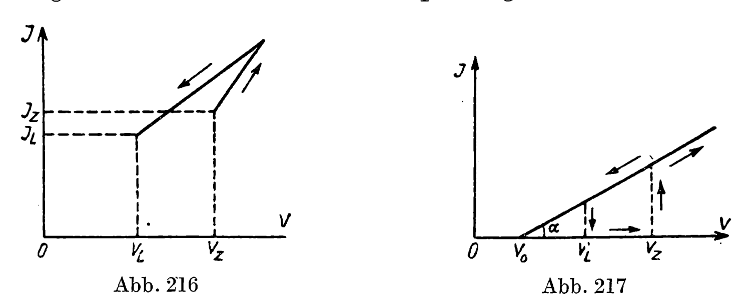


Abb. 216 Abb. 217

Strom gleich Null ist. Bei Erreichen der Zündspannung V_Z leuchtet die Lampe auf, und der Strom erreicht sprungartig den endlichen Wert I_Z. Bei weiterer Erhöhung der Spannung nimmt der Strom durch die Lampe stetig zu. Wenn man die Spannung in umgekehrter Richtung verändert, d. h. sie erniedrigt, nimmt die Stromstärke auf einer anderen Kurve, die fast eine Gerade ist, ab. Auch wenn die Spannung V_Z unterschritten ist, nimmt der Strom weiterhin stetig ab, und erst beim Erreichen der Löschspannung $V_L < V_Z$ geht der Strom sprungartig auf Null zurück, und die Lampe erlischt. Diese Eigenschaften

erklären vollständig den Mechanismus des Auftretens von Schwingungen in der Schaltung mit einer Glimmlampe.

Um die mathematische Aufgabe zu vereinfachen, führen wir die schematische Charakteristik der Glimmlampe ein, die durch ein Stück einer Geraden dargestellt wird (Abb. 217). Diese Charakteristik enthält die hauptsächlichsten Eigenschaften der Glimmlampe, welche, wie wir weiter unten sehen werden, eine wesentliche Rolle im Mechanismus der Anregung und der Aufrechterhaltung von Schwingungen spielten. Diese Eigenschaften sind: ein sprungartiges Auftreten des Stromes bei V_Z und sein ebenso sprungartiges Verschwinden bei V_L.

Die Theorie. Die in Abb. 217 dargestellte Charakteristik kann analytisch ausgedrückt werden durch

$$V = V_0 + R_i \cdot I_2$$

oder

$$I_2 = \frac{V - V_0}{R_i}, \tag{1}$$

wobei R_i den ctg α bezeichnet, der die Dimension eines Widerstandes besitzt und den inneren Widerstand der Glimmlampe charakterisiert. Dabei muß man jedoch beachten, daß R_i eine unstetige Funktion von V ist. Im Bereich von 0 bis V_Z ist beim Anwachsen von V $R_i = \infty$, und im Bereich $V > V_Z$ hat sie einen endlichen konstanten Wert $R_i = \text{const}$. Bei abnehmender Spannung bleibt R_i konstant bis zu dem Wert $V = V_L$ und wird gleich unendlich für $V < V_L$. Geht man vom KIRCHHOFFschen Gesetz und der Gleichung (1) aus, so kann man für die Schaltung mit einer Glimmlampe (Abb. 218) schreiben:

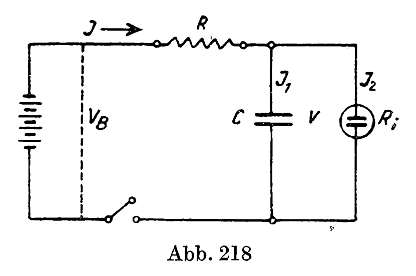


Abb. 218

$$IR + V = V_B,$$

$$I = I_1 + I_2,$$

$$I_2 \cdot R_i = V - V_0.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen I_2 und I, so erhält man:

$$I_1 + \frac{V}{\varrho} = \frac{V_B}{R} + \frac{V_0}{R_i}, \tag{2}$$

wobei

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_i}. \tag{3}$$

Weil aber

$$C\,V = Q, \quad \frac{dQ}{dt} = I_1,$$

ist

$$C \cdot \frac{dV}{dt} = I_1,$$

folglich kann man die Gleichung (2) auf die Form bringen:

$$C \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\varrho} = \frac{V_B}{R} + \frac{V_0}{R_i}. \tag{4}$$

Diese Gleichung gibt uns, zusammen mit den entsprechenden Anfangsbedingungen, die Möglichkeit, alle Erscheinungen in der Schaltung zu beschreiben. Dabei muß man jedoch die oben angeführten Eigenschaften der unstetigen Funktion R_i beachten.

Wir integrieren die Gleichung (4) und erhalten:

$$\frac{V}{\varrho} = \frac{V_B}{R} + \frac{V_0}{R_i} - A e^{-\frac{t}{\varrho C}}, \tag{5}$$

wobei A eine Konstante ist, die aus den Anfangsbedingungen bestimmt wird. Da in diese Gleichung die Größe R_i eingeht, die sich sprungartig, d. h. unstetig ändert, braucht man für die Beschreibung der Prozesse zwei verschiedene Gleichungen: die eine, die dem Fall $R_i = \infty$, und die andere, die dem Fall $R_i = \text{const}$ entspricht.

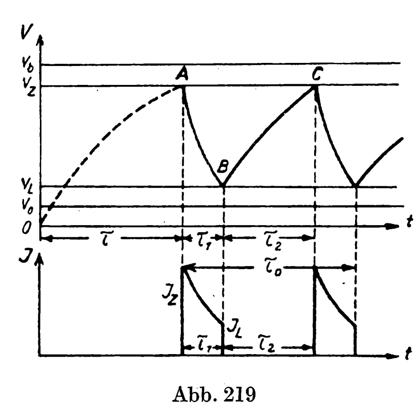


Abb. 219

Im Moment des Einschaltens der Batterie ist der Kondensator C nicht aufgeladen, und die Lampe brennt nicht, d. h $R_i = \infty$, und die Gleichung (5) wird bei Berücksichtigung von (3) umgewandelt in

$$V = V_B - \varrho A e^{-\frac{t}{\varrho C}}. \tag{6}$$

Aus der Bedingung, daß für $t = 0$, $V = 0$, erhalten wir $A = V_B$. Folglich ist

$$V = V_B\left(1 - e^{-\frac{t}{\varrho C}}\right).$$

Die Spannung an den Platten des Kondensators wächst und strebt asymptotisch dem Wert V_B zu. Wenn $V_Z < V_B$, zündet in einem bestimmten Moment τ die Lampe, weil die Spannung an den Platten des Kondensators den Wert V_Z erreicht. Die dazu benötigte Zeit τ wird aus der Beziehung (Abb. 219, Punkt A) bestimmt:

$$V_Z = V_B\left(1 - e^{-\frac{\tau}{RC}}\right),$$

woraus folgt:

$$\tau = RC \ln \frac{V_B}{V_B - V_Z}. \tag{7}$$

Wenn die Lampe zündet, ändert sich R_i sprungartig und nimmt einen endlichen Wert an.

Um das weitere Verhalten des Systems zu bestimmen, muß man die Gleichung (5) für einen endlichen Wert von R_i und für Anfangsbedingungen betrachten, die dem Moment τ entsprechen. Diese Anfangsbedingungen kann man festsetzen, wenn man von folgenden Überlegungen ausgeht:

Im Moment τ ändert sich der Widerstand R_i sprungartig von $R_i = \infty$ auf $R_i = \text{const}$. Deshalb entsteht ebenfalls sprungartig der Strom I_Z, der sofort einen endlichen Wert annimmt. Praktisch besitzt der Kreis eine gewisse Selbstinduktion, und den besprochenen Stromsprüngen entspricht in Wirklichkeit eine sehr große, aber noch endliche Geschwindigkeit der Stromänderung. Da diese Sprünge sehr rasch im Vergleich zu den anderen Prozessen des Systems vor sich gehen und da uns der Mechanismus des Sprunges nicht interessiert, können wir durchaus die kleinen Induktivitäten vernachlässigen. Jedoch muß man berücksichtigen, daß die Energie des Systems sich stetig ändert, denn sonst würden ihre plötzlichen Änderungen auf einen endlichen Wert unendlich hohen Leistungen entsprechen. In dem betrachteten System sammelt sich die gesamte Energie auf dem Kondensator C an. Diese Energie beträgt $\frac{1}{2} C V^2$. Folglich muß sich die Spannung an den Platten des Kondensators stetig ändern, d. h. unveränderlich bleiben im Moment des Auftretens und des Verschwindens des Stromes I_2. Da die Lampe bei der Spannung V_Z zündet, ist im Moment τ: $V = V_Z$. Setzen wir in die Gleichung (5) die Bedingung ein, daß für $t_1 = 0$: $V = V_Z$, so können wir einen neuen Wert der Integrationskonstante bestimmen:

$$A = \frac{V_B}{R} + \frac{V_0}{R_i} - \frac{V_Z}{\varrho}. \tag{8}$$

Damit erhält die Gleichung (5) die Form:

$$\frac{V}{\varrho} = \frac{V_B}{R} + \frac{V_0}{R_i} + \left[\frac{V_Z}{\varrho} - \frac{V_0}{R_i} - \frac{V_B}{R}\right] e^{-\frac{t_1}{\varrho C}}, \tag{9}$$

wobei $t_1 = t - \tau$.

Der Ausdruck (9) zeigt, daß die Spannung V am Kondensator sich einem bestimmten Grenzwert V_{Gr} asymptotisch nähert, den wir, wenn wir $t = \infty$ setzen, aus (8) errechnen können:

$$V_{\mathrm{Gr}} = \varrho \left(\frac{V_B}{R} + \frac{V_0}{R_i}\right). \tag{10}$$

Wenn $V_{Gr} < V_L$, so nimmt die Spannung am Kondensator ab und erreicht auf jeden Fall den Wert V_L, wie es in Abb. 219 dargestellt ist (Punkt B). In diesem Moment erlischt die Lampe, der Kondensator beginnt, sich wieder aufzuladen, und wenn die Spannung an ihm V_Z erreicht, zündet die Lampe erneut (Punkt C in Abb. 219). Der beschriebene Prozeß wiederholt sich periodisch.

Die Bedingungen, unter denen Schwingungen in der Schaltung entstehen, kann man so aufschreiben:

$$V_{Gr} < V_L < V_Z < V_B.$$

Setzen wir den Ausdruck für V_{Gr} aus (10) in die linke Hälfte dieser Kette von Ungleichungen ein, und formen wir sie um, so erhalten wir:

$$\frac{V_B - V_L}{R} < \frac{V_L - V_0}{R_i}. \tag{11}$$

Auf der rechten Seite der Ungleichung (11) steht ein Ausdruck, der nur von den Eigenschaften der Lampe selbst abhängt, und auf der linken Seite steht ein Ausdruck, der auch von R und V_B abhängt.

Wie aus der Bedingung (11) hervorgeht, muß man, um Schwingungen zu erhalten, bei vorgegebenem V_B den Widerstand R größer wählen als eine bestimmte Größe, und umgekehrt, für einen vorgegebenen Widerstand R muß die Spannung V_B kleiner sein als eine bestimmte Größe (natürlich nicht kleiner als V_Z, sonst würde die Lampe überhaupt nicht zünden).

Der physikalische Sinn der Ungleichung (11) ist klar. Rechts steht ein Ausdruck, der die Stromstärke in der Lampe angibt, wenn die Spannung V_L an ihr liegt (das ist die kleinste Stromstärke, bei der die Lampe noch brennt), und links steht ein Ausdruck, der die Stromstärke angibt, die der Schaltung aus der Batterie zufließt, wenn die an dem Kondensator liegende Spannung V_L ist. Es ist klar, daß der Kondensator einen Teil des durch die Lampe fließenden Stromes liefern muß, wenn der in der Ungleichung rechts stehende Strom kleiner ist als der links stehende. Dann fällt die Spannung am Kondensator, und die Lampe erlischt. Und gerade das ist die Bedingung dafür, daß in der Schaltung Schwingungen auftreten.

Die Dauer des Entladungsprozesses des Kondensators wird aus der Überlegung bestimmt, daß die Entladung so lange vor sich geht, bis die Spannung an den Platten des Kondensators bis zu V_L abgefallen ist. Deshalb erhält man für die Dauer der Entladung den Ausdruck:

$$\frac{V_L}{\varrho} = \frac{V_B}{R} + \frac{V_0}{R_i} + \left(\frac{V_Z}{\varrho} - \frac{V_0}{R_i} - \frac{V_B}{R}\right) e^{-\frac{\tau_1}{\varrho C}}, \tag{12}$$

woraus man durch einfaches Umformen und Logarithmieren erhält:

$$\tau_1 = \varrho C \cdot \ln \frac{(V_Z - V_0) R - (V_B - V_Z) R_i}{(V_L - V_0) R - (V_B - V_0) R_i}. \tag{13}$$

Nachdem die Lampe erloschen ist, beginnt erneut der Aufladeprozeß des Kondensators, der, wie auch der erste, bestimmt ist durch die Gleichung:

$$V = V_B - A e^{-\frac{t_2}{RC}},$$

wobei

$$t_2 = t - (\tau + \tau_1).$$

In diesem Fall unterscheiden sich jedoch die Anfangsbedingungen von denen, die für die erste Aufladung des Kondensators gültig waren.

Aus den Überlegungen, die wir für die Bestimmung der Anfangsbedingungen im Moment des Zündens der Lampe angestellt haben, folgt, daß sich auch beim Erlöschen der Lampe die Spannung am Kondensator nicht sprungartig ändert. Folglich lauten für den Prozeß der wiederholten Aufladung die Anfangsbedingungen: $t_2 = 0$, $V = V_L$. Unter diesen Anfangsbedingungen ist die Konstante A gleich $(V_B - V_L)$ und damit

$$V = V_B - (V_B - V_L) e^{-\frac{t_2}{RC}}. \tag{14}$$

Weil die Aufladung so lange vor sich geht, bis die Spannung den Wert V_Z erreicht, wird die Aufladedauer τ_2 durch die Beziehung bestimmt:

$$V_Z = V_B - (V_B - V_L) e^{-\frac{\tau_2}{RC}},$$

woraus man erhält:

$$\tau_2 = RC \cdot \ln \frac{V_B - V_L}{V_B - V_Z}. \tag{15}$$

Damit haben wir die Bedingungen festgelegt, unter denen Schwingungen entstehen und haben die Periode und die Amplitude der Schwingungen bestimmt. Gleichzeitig haben wir auch die wesentlichsten Eigenheiten der Form der Schwingungen erhalten. Aus Abb. 219 ist ersichtlich, daß die Form der Stromkurve I_2 einen unstetigen Charakter besitzt, während die Kurve V an den entsprechenden Stellen in der Ableitung einen Sprung aufweist, doch selbst stetig ist. Solche Schwingungen werden *Kipp-* oder *Relaxationsschwingungen* genannt.

Somit werden die Bedingungen für das Auftreten von Relaxationsschwingungen in der Schaltung mit einer Glimmlampe durch die Ungleichung (11), die Schwingungsdauer $\tau_0 = \tau_1 + \tau_2$ durch die Beziehungen (13) und (15) und die Amplitude durch die Werte V_Z und V_L bestimmt.

Die Messung. Die Aufgabe besteht in der Prüfung der oben abgeleiteten Bedingungen für das Auftreten von Schwingungen und in der Bestimmung ihrer Periode.

Die Untersuchungen der Schwingungsform (die Abhängigkeit der Spannung von der Zeit) und der Schwingungsdauer für eine hohe Frequenz werden mit Hilfe eines Kathodenstrahloszillographen durchgeführt. (Über die Beschreibung des Kathodenstrahloszillographen siehe die Aufgabe 64. Die Schaltung für das Anschließen an den Oszillographen ist in Abb. 220 dargestellt.

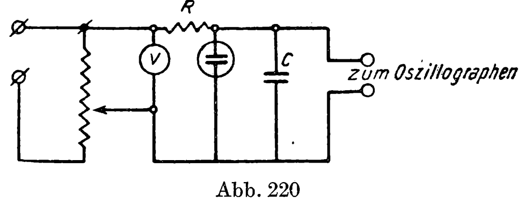


Abb. 220

Um genügend rasche Schwingungen in der Schaltung mit einer Glimmlampe zu erhalten, werden für die Kapazität C 10000 pF und 20000 pF und für den Widerstand R 1 bis 2 MΩ genommen.

Man versucht, ein stehendes Bild auf dem Oszillographenschirm einzustellen und bestimmt die Schwingungsfrequenz aus den dem Oszillographen beigegebenen Eichkurven, die für die verschiedenen Frequenzbereiche den Skalenteilen die Zeitablenkfrequenzen zuordnen[1]). Man bestimmt die Schwin-

[1]) Mit Hilfe eines Oszillographen die Schwingungsfrequenz bestimmen zu wollen, stellt nur eine angenäherte Methode dar, weil die Eichung des Zeitablenkgerätes schon mit einer Ungenauigkeit behaftet ist. Viel genauer kann man eine unbekannte Frequenz bestimmen, wenn man das Zeitablenkgerät einschaltet, aber auf das eine Plattenpaar des Oszillographen das Signal eines auf Frequenz zuverlässig geeichten Generators und auf das andere Plattenpaar die zu untersuchende Schwingung gibt. In unserem Fall kann man einen Tonfrequenzgenerator benutzen. Wenn man dann ein stehendes Bild aus der Addition zweier Schwingungen bei der kleinsten Tongeneratorfrequenz eingestellt hat, kann man von der Skala dieses Generators die unbekannte Frequenz ablesen. Wenn die zu untersuchenden Schwingungen keine Sinusform besitzen, wird man selbstverständlich auf dem Oszillographenschirm keine „richtigen LISSAJOUS-Figuren" erhalten, doch ist das für die Frequenzbestimmung ohne Bedeutung.

gungsfrequenz in Abhängigkeit von der direkt an der Lampe liegenden Spannung. Die Ergebnisse werden graphisch dargestellt und mit der nach den Formeln (13) und (15) berechneten Periode verglichen.

Es ist wünschenswert, daß die Oszillogramme abgezeichnet oder photographiert werden. Zum Abzeichnen legt man durchsichtiges Papier oder Pauspapier auf den Oszillographenschirm, und zum Photographieren zieht man über die Schirmblende einen Ärmel aus schwarzem Stoff und drückt ein Photopapier direkt an den Schirm. Zur Erfüllung der Aufgabe müssen folgende Messungen durchgeführt werden:

1. Man setzt die Schaltung nach Abb. 215 zusammen und nimmt die Charakteristik der Glimmlampe auf.

2. Um Schwingungen zu erhalten, setzt man die Schaltung nach Abb. 220 (siehe auch Abb. 214) zusammen und mißt die Schwingungsdauer mit Hilfe des Oszillographen. Man nimmt die Kurve τ_0 (siehe Abb. 219) als Funktion von V_B bei drei verschiedenen Kapazitätswerten und drei verschiedenen Widerständen auf (im ganzen 9 Kurven).

Die Auswertung der Ergebnisse. 1. Aus der erhaltenen Charakteristik muß man die schematisierte Charakteristik der Lampe konstruieren und für sie V_Z, V_L, I_Z, I_L und R_i bestimmen.

2. Man bestimmt aus den Kurven $\tau_0 = f(V_B)$ die größten Werte $V_{B(\max)}$, bei denen noch Schwingungen auftreten. Dann rechnet man

$$a = \frac{V_{B(\max)} - V_L}{R}$$

aus, das übereinstimmend mit der Theorie für alle Widerstände gleich sein muß [siehe Formel (11)]. Man errechnet V_0 aus dem Verhältnis $a = \frac{V_L - V_0}{R_i}$, da die Bestimmung von V_0 aus der Charakteristik ungenauer ist.

3. Man prüft für eine Kurve, in welchem Maße die Abhängigkeit $\tau_0 = f(V_B)$, die man aus dem Experiment erhält, mit den theoretischen Formeln (13) und (15) übereinstimmt.

Man führt qualitative Untersuchungen des Verhältnisses $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ in Abhängigkeit von V_B durch. (Bei dem Vergleich mit der Theorie kann die in Abb. 219 dargestellte Kurve herangezogen werden.) Wie man sieht, werden bei der Vergrößerung von V_B die Asymptoten V_B und V_{Gr} gehoben, dabei strebt V_B von der Geraden V_Z fort, und V_{Gr} nähert sich der Geraden V_L. Aus diesem Grunde gilt für kleine V_B: $\tau_1 \ll \tau_2$; die Lampe blitzt nur auf. Für große V_B wird τ_1 größer als τ_2, und die Lampe brennt während der größeren Zeit der Periode.

Abschließend ist es notwendig, zu bemerken, daß der quantitative Vergleich der Theorie mit dem Experiment nicht immer befriedigende Ergebnisse liefert, da die in Abb. 217 angeführte Charakteristik schematisiert und im statischen Arbeitsbereich aufgenommen ist. In Wirklichkeit hängen V_Z und V_L nicht nur von den Eigenschaften der Lampe, sondern auch von der Geschwindigkeit der Spannungsänderung an ihren Elektroden ab.

Spezialliteratur

Siehe Literatur zu Aufgabe 60.

Aufgabe 66

Die Untersuchung der Charakteristik eines Niederfrequenzverstärkers mit Widerstandskopplung

Zubehör: 1. Einröhrenverstärker, der auf einem selbständigen Chassis aufgebaut ist, 2. stabilisiertes Netzteil, 3. Tongenerator, 4. Zweistrahloszillograph.

Kurze Theorie. In der Radiotechnik und bei physikalischen Experimenten hat man es häufig mit schwachen elektromagnetischen Schwingungen zu tun, die man erst nach einer Vergrößerung (Verstärkung) ihrer Amplitude verwenden oder registrieren kann. In den meisten Fällen ist es wichtig, die Verstärkung so durchzuführen, daß die Form der Schwingungen[1]) gewahrt bleibt. Man nennt die Einrichtung, die solche Umwandlungen elektrischer Schwingungen ausführt, einen *Verstärker*.

In der heutigen Zeit werden Verstärker mit Elektronenröhren (Triode, Pentode) häufig verwendet. Die Elektronenröhre bildet das Grundelement der zur Verstärkung von elektrischen Schwingungen dienenden Anordnung. Die Verstärkung beruht darauf, daß die Spannungsänderung zwischen dem Steuergitter und der Kathode (Gitterspannung) eine wesentlich größere Änderung des Anodenstromes hervorruft als die gleiche Änderung der Anodenspannung. Die Änderungen des Anodenstromes bewirken einen entsprechenden Spannungsabfall an einem hohen Widerstand, der speziell dafür in den Anodenkreis der Röhre geschaltet ist. Dieser Spannungsabfall ist größer als die Amplitude der auf das Gitter der Röhre gegebenen zu verstärkenden Spannung.

Das Ziel der vorliegenden Aufgabe ist die Untersuchung der Haupteigenschaften eines einstufigen Spannungsverstärkers für niedrige Frequenzen (Tonfrequenzen). Die Ausführung dieser Aufgabe ist für Studenten erst nach einer detaillierten Untersuchung der Arbeitsweise von Elektronenröhren (in Aufgabe 43) zweckmäßig.

Der Niederfrequenzverstärker ist vorgesehen für die Verstärkung von Spannungen elektromagnetischer Schwingungen von einigen zehn oder hundert Hertz bis zu 10000 bis 30000 Hz.

Der Hauptparameter, der die Arbeit eines Verstärkers charakterisiert, ist sein Verstärkungsfaktor (Übertragungsfunktion). Er drückt das Verhältnis der Amplitude der Ausgangsspannung des Verstärkers zu der der Eingangsspannung aus:

$$K = \frac{U_{\text{Ausg}}}{U_{\text{Eing}}}. \tag{1}$$

Der Verstärkungsfaktor kann sich für Signale verschiedener Frequenzen ändern, deshalb weisen alle Verstärker einen Frequenzgang auf. Bei einem Widerstandsverstärker ist die Abhängigkeit des Verstärkungsfaktors von der Frequenz viel geringer als bei den einfachsten anderen Verstärkertypen. Das ist der Vorteil eines Widerstandsverstärkers.

---

[1]) Unter der Form der Kurve wird hierbei die zeitliche Abhängigkeit einer elektrischen Größe verstanden.

Außerdem ist das Verhältnis der Amplitude der Ausgangsspannung zu der der Eingangsspannung bei einer festen Frequenz des Signals keine konstante Größe. Bei hohen Amplituden der Eingangsspannung des Verstärkers ist die Ausgangsspannung zu ihr nicht mehr proportional, es entsteht eine nichtlineare Abhängigkeit dieser Größen, und der Verstärker beginnt, die Form der ihm zugeführten Schwingungen zu verzerren. Diese Umstände zwingen uns dazu, die Arbeitsweise eines Verstärkers durch Charakteristiken zu beschreiben, welche die Abhängigkeit des Verstärkungsfaktors von der Signalfrequenz und von der Signalamplitude darstellen. Die *Frequenzcharakteristik* ist die Abhängigkeit des Verstärkungsfaktors von der Schwingungsfrequenz, $K = f(\omega)$, und die *Amplitudencharakteristik* ist die Abhängigkeit der Amplitude der Ausgangsspannung von der der Eingangsspannung bei festgehaltener Frequenz, $U_{\text{Ausg}} = f(U_{\text{Eing}})$. In einigen Fällen ist die *Phasencharakteristik*, d. h. die Abhängigkeit des Winkels der Phasenverschiebung zwischen der Ausgangsspannung und der Eingangsspannung von der Frequenz, von großer Bedeutung.

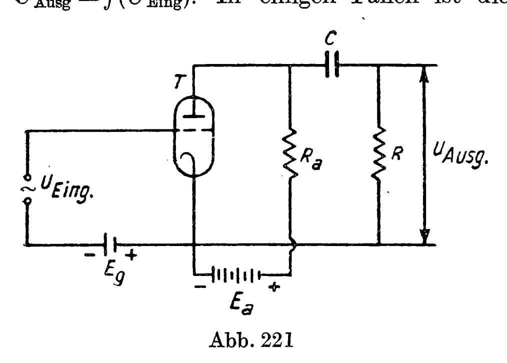


Abb. 221

Die Prinzipschaltung eines Widerstandsverstärkers mit einer Röhre ist in Abb. 221 dargestellt, wobei mit T die Elektronenröhre (Triode), mit E_g eine Batterie, die dem Gitter gegenüber der Kathode eine negative Vorspannung liefert, mit E_a die Anodenbatterie, mit R_a ein Ohmscher Widerstand (Belastungswiderstand im Anodenkreis), mit C der Trennkondensator (Kopplungskondensator), mit R ein Ohmscher Widerstand, an dem die Spannung der verstärkten Schwingungen abgenommen wird, mit U_{Eing} die zu verstärkende Wechselspannung und mit U_{Ausg} die Ausgangsspannung bezeichnet sind. Der Kondensator C wird deshalb eingefügt, damit die Gleichspannung von der Batterie E_a nicht an dem Widerstand R abfällt, d. h., damit an R nur eine Wechselspannung liegt.

Bei der Analyse der Arbeitsweise von Schaltungen wird in der Radiotechnik häufig die Methode der Ersatzschaltungen benutzt. Man erhält eine solche Schaltung aus einer vorgegebenen, indem man einige Elemente (z. B. die Röhren) durch einfachere ersetzt, wobei die Hauptfunktionen, die das ersetzte Element ausführt, erhalten bleiben müssen. Eine Röhre, die im Verstärker arbeitet, kann durch eine Wechselstromquelle ersetzt werden. Wenn dabei die Röhre den statischen Verstärkungsfaktor μ und den inneren Widerstand R_i besitzt und auf das Steuergitter die Wechselspannung U_{Eing} gegeben wird, so besitzt die sie ersetzende Quelle die Spannung μU_{Eing} und den inneren Widerstand R_i. Führt man solche Ersetzung durch, so kann man eine Ersatzschaltung für den in Abb. 221 dargestellten Verstärker erhalten, wenn man außerdem berücksichtigt, daß der innere Widerstand der Anodenstromquelle im Vergleich zu dem inneren Widerstand der Röhre R_i und dem

Belastungswiderstand R_a klein ist. In Abb. 222 ist das Ersatzschaltbild für einen Widerstandsverstärker wiedergegeben, der der Schaltung der Abb. 221 entspricht. Diese Schaltung erlaubt es, die Arbeitsweise des Verstärkers zu analysieren und die Abhängigkeit des Verstärkungsfaktors K von der Frequenz ω zu klären. Die Analyse führt zu einer Abhängigkeit, die in Form der Kurve $K = f(\omega)$ in Abb. 223 dargestellt ist.

Charakteristisch für diese Abhängigkeit ist, daß der Verstärkungsfaktor in den Bereichen tiefer und hoher Frequenzen abnimmt und sein Wert im

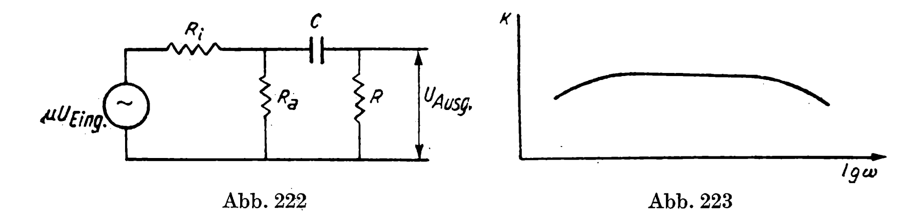


Abb. 222 Abb. 223

mittleren Frequenzbereich verhältnismäßig konstant bleibt. Dieser mittlere Frequenzbereich wird durch eine Beziehung zwischen der Größe der Kapazität C und dem Widerstand R bestimmt und beginnt mit der Frequenz, für die $\frac{1}{\omega C} \ll R$, d. h., für die der Kondensator C im Vergleich zu R einen kleinen Widerstand darstellt. In diesem Frequenzbereich wird der Verstärkungsfaktor eines solchen Verstärkers durch den Ausdruck

$$K = \frac{\mu}{1 + \frac{R_i}{R_a} + \frac{R_i}{R}}$$

dargestellt. Deshalb ist die maximale Verstärkung einer Verstärkerstufe kleiner als der statische Verstärkungsfaktor der Röhre. Der Abfall von K im Bereich tiefer Frequenzen wird durch den Einfluß des Widerstandes des Kondensators C hervorgerufen, der mit abnehmender Frequenz wächst. Damit nimmt der Spannungsabfall an ihm zu, d. h., die Spannung an R nimmt ab. Bei hohen Frequenzen wird der Abfall der Charakteristik durch die Eingangskapazität der nächsten Verstärkerröhre und durch die Kapazität der Verbindungsschnüre und, im Falle eines einstufigen Verstärkers, durch die Eingangskapazität des an den Ausgang des Verstärkers geschalteten Gerätes hervorgerufen.

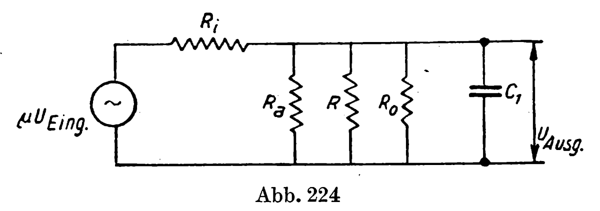


Abb. 224

In unserem Fall liegt speziell am Verstärkerausgang ein Kondensator C_1 (Abb. 224), der die Rolle einer parallelgeschalteten Kapazität spielt, um den

Abfall der Frequenzcharakteristik des Verstärkers für hohe Frequenzen zu zeigen, ohne aus dem Frequenzbereich des Generators herauszukommen.

Aus der Schaltung der Abb. 224 ist ersichtlich, daß mit zunehmender Frequenz der Widerstand des Kondensators C_1 immer mehr und mehr die Widerstände R_a und R shuntet. Weil R_i dabei unverändert bleibt, nimmt U_{Ausg} mit zunehmender Frequenz ab. Deshalb nimmt für hohe Frequenzen, wenn $\frac{1}{\omega C_1} \ll \frac{R_a R}{R_a + R}$, das Ersatzschaltbild die in Abb. 224 dargestellte Form an.

Bei den gewöhnlichen Verstärkern, die einige Stufen besitzen, ist der Widerstand R der Gitterableitwiderstand der nächsten Röhre, und parallel zu ihm liegt die Eingangskapazität dieser Röhre. Folglich bestimmt sie den Abfall der Frequenzcharakteristik bei hohen Frequenzen. In Abb. 225 ist die Verbindung zwischen der ersten Verstärkerstufe und der Röhre der zweiten Stufe dargestellt. Das entsprechende Ersatzschaltbild ist in Abb. 226 wiedergegeben.

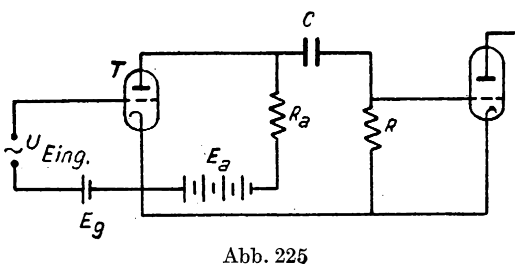


Abb. 225

Aus dem Gesagten geht hervor, daß der Abfall der Frequenzcharakteristik des Verstärkers für tiefe und hohe Frequenzen nicht eine spezielle Folge des in dieser Aufgabe benutzten Aufbaus ist, da die Eingangskapazitäten der Röhren und die Kapazitäten zwischen den Stufen stets die gleiche Rolle spielen. Außerdem wollen wir nochmals daran erinnern, daß unter den einfachen Verstärkern der Widerstandsverstärker eine Frequenzcharakteristik besitzt, die

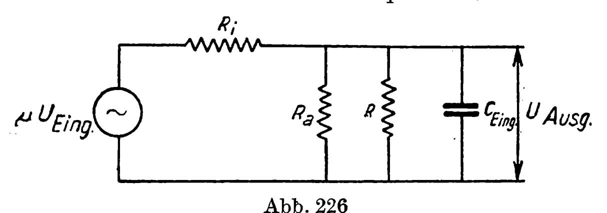


Abb. 226

eine konstante Größe des Verstärkungsfaktors für einen breiten Frequenzbereich aufweist. Jedoch kann der Verstärkungsfaktor, z. B. bei einem Transformatorverstärker, auf Kosten des Übertragungskoeffizienten des Ausgangsübertragers größer gemacht werden als der statische Verstärkungsfaktor der Röhre.

Beachtenswert ist, daß alle charakteristischen Eigenschaften der Arbeitsweise irgendeines Verstärkers am Beispiel der Arbeitsweise eines einstufigen Widerstandsverstärkers geklärt werden können.

Aus der Untersuchung der Arbeitsweise des vorliegenden Niederfrequenzverstärkers darf nicht der Eindruck entstehen, daß der einstufige Wider-

standsverstärker nur zur Verstärkung von Wechselströmen verwendet werden kann. Im Gegenteil, eine in vielen Gebieten der Physik wichtige Aufgabe der Verstärkung kleiner Gleichströme, z. B. Photoströme, wird hauptsächlich mit Hilfe dieser Verstärker gelöst. Mit einer solchen Anwendung des Verstärkers befaßt sich die Aufgabe 88, in der der Photoeffekt untersucht wird. Die Schaltungen zur Verstärkung eines Gleichstromes und die Typen der darin verwendeten Röhren, speziell der Elektrometerröhren, besitzen natürlich ihre charakteristischen Eigenschaften, auf die wir hier nicht näher eingehen können.

Zur Amplitudencharakteristik des Verstärkers ist noch folgendes zu sagen: Die Spannungsverstärker arbeiten gewöhnlich im geradlinigen Teil der Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinie der Röhre (siehe Aufgabe 43). Deshalb muß mit zunehmendem U_{Eing} auch U_{Ausg} proportional zunehmen. Sobald aber die Röhre in dem nichtlinearen Bereich der Kennlinie arbeitet, ist keine Proportionalität mehr vorhanden. Arbeitet die Röhre in dem nichtlinearen Bereich der Kennlinie, so führt das zu einer Verzerrung der Form der verstärkten Schwingungen, was in einigen Fällen unzulässig ist (Meß- und Oszillographenverstärker, Verstärker für Musikübertragungen). Deshalb ist es wichtig, den Grenzwert für ein Signal zu kennen, bis zu welchem der Verstärker noch in dem linearen Bereich der Kennlinie arbeitet. Die Amplitudencharakteristik des Verstärkers $U_{\text{Ausg}} = f(U_{\text{Eing}})$ gestattet uns, Aussagen über die Verzerrungen zu machen. Der Bereich von U_{Eing}, für den die Amplitudencharakteristik linear ist, ist der Arbeitsbereich des vorliegenden Verstärkers.

Die Beschreibung der Geräte. Der Verstärker befindet sich in einem geschlossenen Gehäuse, dessen untere Wand aus Plexiglas besteht, durch die man die Montage der Schaltung übersehen kann. Das Gehäuse steckt mit Zapfen in einer besonderen Unterlage und muß in dieser Stellung zum Arbeiten benutzt werden. Die Verstärkerröhre 6C5 steckt in der Röhrenfassung, die sich auf der oberen Gestellplatte befindet. Auf der Frontplatte des Gehäuses ist eine Steckdose angebracht, der die Spannung des Gerätes über ein Kabel mit Spezialstecker zugeführt wird. Auf der gleichen Platte sitzt ein Drehknopf, mit dem der Widerstand zur Einstellung des Arbeitspunktes der Verstärkerröhre reguliert werden kann. Ihr Arbeitsbereich liegt zwischen dem 5. und 6. Teilstrich. Außerdem befinden sich auf der Frontplatte die Buchsen für den Ein- und Ausgang des Verstärkers.

Das stabilisierte Netzgerät dient zur Speisung der Verstärkerschaltung. Es liefert eine konstante Anodenspannung von 250 V und eine Wechselspannung von 6,3 V zur Heizung der Verstärkerröhre. Das stabilisierte Netzgerät besteht aus einer gewöhnlichen Zweiweg-Gleichrichterschaltung mit einem Glättungsglied (siehe Aufgabe 59), an dessen Ausgang sich ein Stabilisierungsglied anschließt. Dieses Glied hält die Anodenspannung des Verstärkers bei Änderung der Gitterspannung konstant. Auf der Frontplatte des Netzgerätes sitzt ein Voltmeter, das die Ausgangsspannung des Gerätes anzeigt, der Netzschalter und ein Signallämpchen, das bei eingeschaltetem Netzgerät brennt. Ein Kabel mit Stecker führt die Spannung dem Verstärker zu.

Der Tonfrequenzgenerator GF-2 (Abb. 227) liefert eine sinus
spannung[1]). Die Schwingungsfrequenz läßt sich zwischen 16 Hz und
nit Hilfe zweier Knöpfe des Bereichumschalters *1* und des Drehknopf
ie Feineinstellung der Frequenz verändern. Der Bereichumschalter l
n verschiedene Stellungen bringen, an denen die Zahlen 16, 50, 1

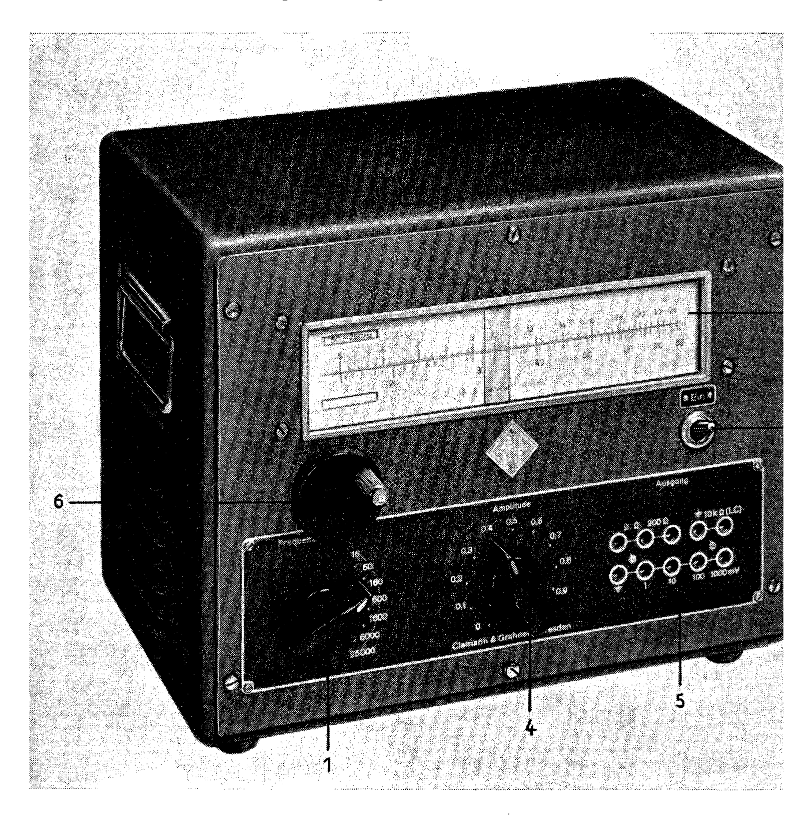


Abb. 227. Tonfrequenzgenerator. *1* Frequenzbereichschalter; *2* Frequenzs
3 Amplitudenregler; *4* Netzschalter; *5* Ausgang; *6* Feineinstellung der Fre

tehen. Um die Frequenz der erzeugten Schwingungen zu bestimmen, l
n der Kreisteilung die dem Zeiger gegenüberstehende Zahl ab un
pliziert sie mit der Zahl, die an dem eingestellten Bereich steht.

Die Spannungsamplitude wird durch den Knopf *3* verändert.

Die erzeugte Spannung kann an den Klemmen *5* abgenommen
Über dem Ausgang *5* sitzt der Netzschalter *4*, der den Generator
Wechselstromnetz verbindet.

---

[1]) Die im Praktikum arbeitenden Studenten können sich über den Aufbau dieses Ger
ie ihm vom Werk beigegebene Beschreibung informieren.

Der Zweistrahloszillograph OG 2-6 dient zur gleichzeitigen Beobachtung zweier verschiedener periodischer elektrischer Prozesse. Zum Unterschied von einem gewöhnlichen Oszillographen (siehe Aufgabe 64) wird in ihm eine Zweistrahlröhre verwendet.

Diese Röhre stellt ein fast zylindrisches Glasgefäß dar, innerhalb dessen zwei Elektronensysteme gewöhnlicher Oszillographenröhren untergebracht sind. Jedes dieser Elektronensysteme besitzt eine Elektronenkanone, ein fokussierendes System und ein Ablenksystem. Jeder Strahl kann die gesamte Fläche des Schirmes überstreichen. Der Oszillograph ist mit einem Zeitablenkgerät ausgerüstet, das beide Strahlen gleichzeitig ablenkt. Zur vertikalen Ablenkung der Strahlen hat jeder Strahl einen eigenen Eingang und Verstärker.

Die Abb. 228 zeigt die Frontplatte des Zweistrahloszillographen. Die Bedeutung der Knöpfe ist an der Frontplatte bezeichnet.

In der vorliegenden Aufgabe wird der Oszillograph nicht nur zur Beobachtung der periodischen Erscheinungen, sondern auch zur Messung der Spannung am Eingang und am Ausgang des zu untersuchenden Verstärkers benutzt. Für diese Messung ist der Oszillograph mit einem Koordinatennetz vor dem Schirm der Röhre E und den Skalen N_1 und N_2 versehen.

Bekanntlich ist in Elektronenstrahlröhren mit elektrostati-

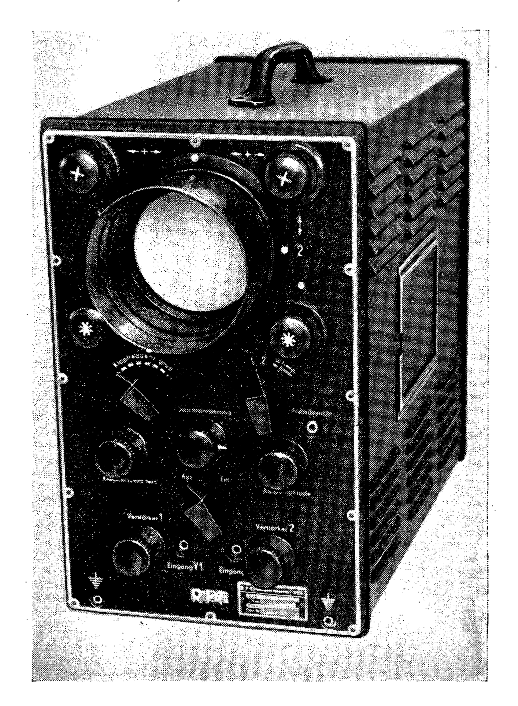


Abb. 228

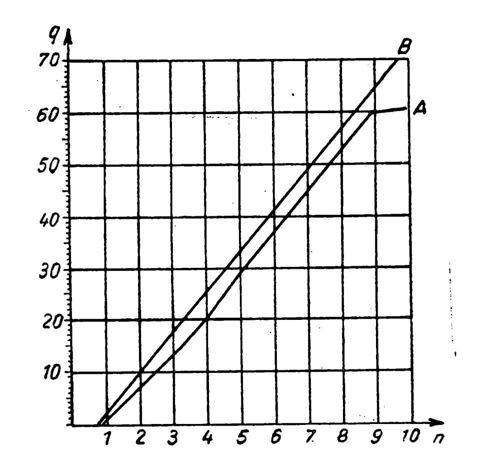


Abb. 229. Eichkurven der Verstärker des Zweistrahloszillographen: A Verstärker Nr. 1; B Verstärker Nr. 2.

scher Ablenkung die Verschiebung des leuchtenden Punktes auf dem Schirm der Spannung zwischen den Ablenkplatten proportional (siehe Aufgabe 64). Wenn bekannt ist, daß die Spannung V den leuchtenden Punkt um die Strecke l ablenkt, so kann man die Empfindlichkeit q des Oszillographen bestimmen: $q = \frac{l}{V}$. Da aber die auf den Eingang des Vertikalverstärkers gegebene Spannung, je nach der Stellung der Knöpfe M_1 und M_2, verschieden stark verstärkt wird, muß man auf eine Eichkurve zurückgreifen, in der die Abhängigkeit des Koeffizienten q von der Stellung des Drehknopfes dargestellt ist. Die Stellung des Knopfes kann an den Skalen N_1 und N_2 abgelesen werden. In Abb. 229 sind die Eichkurven für die Vertikalverstärker beider Strahlen wiedergegeben.

Auf der Abszisse sind die Skalenteile der Drehknöpfe für die Verstärkung und auf der Ordinate die Werte für den Koeffizienten q in mm/V aufgetragen.

Zu der Benutzung der Oszillographenverstärker für die vorliegende Aufgabe muß noch folgendes bemerkt werden: Ihr Arbeitsbereich muß offensichtlich breiter sein als der Arbeitsbereich des zu untersuchenden Verstärkers, damit die Oszillographenverstärker seine Charakteristik nicht verzerren. Diese Forderung ist in dem vorliegenden Fall erfüllt.

Übung 1

Die Untersuchung der Verstärkerschaltung und das Zusammenschalten der gesamten Anordnung

Der Verstärker wird von der Unterlage heruntergenommen und seine Schaltung analysiert. Man zeichnet die gesamte Schaltung des Verstärkers ab und versieht die Widerstände und die Kapazitäten mit den zugehörigen Werten.

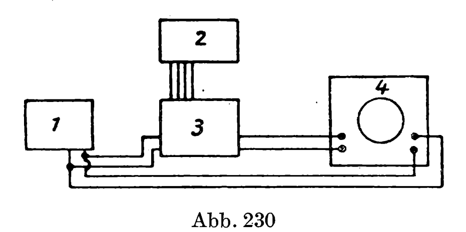


Abb. 230

Man setzt die Schaltung der gesamten Anordnung nach dem in Abb. 230 dargestellten Blockdiagramm zusammen. In der Abbildung sind mit den Zahlen die einzelnen Teile der Anordnung bezeichnet: mit *1* der Tonfrequenzgenerator, mit *2* das Netzteil, mit *3* der Verstärker und mit *4* der Zweistrahloszillograph. Beim Zusammenschalten muß man darauf achten, daß die Gehäuse aller Geräte miteinander verbunden sind.

Übung 2

Die Aufnahme der Amplitudencharakteristik des Verstärkers und die Bestimmung des Verstärkungsfaktors für mittlere Frequenzen

Man schaltet das stabilisierte Netzgerät, den Tonfrequenzgenerator und den Zweistrahloszillographen ein, reguliert die Helligkeit und die Fokussierung der

Oszillographenstrahlen und stellt den Umschalter für die Synchronisierung (Abb. 228) in die Stellung *U1* oder *U2*.

Den Zeiger des Drehknopfes auf der Frontplatte des Verstärkers stellt man auf die Zahl *6*[1]). Man entnimmt dem Generator die Frequenz von 5000 Hz und wählt eine solche Spannungsamplitude und eine solche Verstärkung des Oszillographen aus, daß die Sinuskurven nicht über den Rand des Schirmes hinausgehen und daß am Ausgang des untersuchten Verstärkers die Sinuskurven ihre ursprüngliche Form behalten.

Danach verändert man die Frequenz des Generators bei konstanter Spannungsamplitude am Eingang des Verstärkers und untersucht die Frequenzcharakteristik. Man sucht sich die Frequenz mit der maximalen Verstärkung heraus.

Dann nimmt man für diese Frequenz die Amplitudencharakteristik auf. Dazu ändert man die Spannung am Eingang des Verstärkers, mißt die Spannungsamplitude am Ausgang und am Eingang des untersuchten Verstärkers und rechnet aus den Eichkurven die Spannung am Eingang und am Ausgang des Verstärkers aus. Die erhaltenen Ergebnisse trägt man in folgende Tabelle ein:

Amplitudencharakteristik für die Frequenz $f =$

Nr. der Ablesung	Verstärkereingang			Verstärkerausgang		
	Stellung des Drehknopfes des Oszillographen	Größe der Amplitude in Koordinatennetzeinheiten	Spannung am Eingang in Volt	Stellung des Drehknopfes des Oszillographen	Größe der Amplitude in Koordinatennetzeinheiten	Spannung am Eingang in Volt

Man benutzt die Werte dieser Tabelle, zeichnet damit die Amplitudencharakteristik und bestimmt den Verstärkungsfaktor für mittlere Frequenzen.

Übung 3

Die Aufnahme der Frequenzcharakteristik des Verstärkers

Aus der Amplitudencharakteristik bestimmt man die Spannung am Eingang des Verstärkers U'_{Eing}, bei der die Amplitudencharakteristik beginnt, eine Nichtlinearität zu zeigen. Dann stellt man am Verstärkereingang die Spannung 0,1 U'_{Eing}[2]) ein, hält sie die ganze Zeit über konstant, ändert die Frequenz und mißt die Spannung am Ausgang des Verstärkers wie in der vorherigen Übung. Die erhaltenen Werte trägt man in folgende Tabelle ein:

---

[1]) Durch diese Einstellung des Drehknopfes verlegt man den Arbeitspunkt in die Mitte des linearen Bereiches der Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinie der Röhre.

[2]) Das heißt, man stellt einen viel kleineren Wert ein als den Spannungswert am Eingang U'_{Eing}, bei dem der Verstärker beginnt, die Form des Signals zu verändern.

Frequenzcharakteristik U'_{Eing}

Frequenz in Hz	Stellung des Drehknopfes des Oszillographenverstärkers	Größe der Amplitude der Ausgangsspannung in Koordinatennetzeinheiten	Spannung am Ausgang des Verstärkers in Volt

Man nimmt die Frequenzcharakteristik von tiefen Frequenzen (50 Hz) bis zu hohen Frequenzen auf, bei denen ganz deutlich ein Abfall der Frequenzcharakteristik bemerkbar wird. Man wiederholt die Aufnahme der Frequenzcharakteristik bei umgekehrtem Frequenzgang.

Es empfiehlt sich, die Messung für 20 bis 25 Punkte durchzuführen und danach die Frequenzcharakteristik zu zeichnen, indem man auf der Ordinatenachse die Größe des Verstärkungsfaktors und auf der Abszissenachse den Logarithmus der Frequenz aufträgt.

Spezialliteratur

Siehe Literatur zu Aufgabe 60 und zu Aufgabe 64.

Aufgabe 67

Die Bestimmung des Verhältnisses der Ladung eines Elektrons zu seiner Masse mit der Magnetronmethode

Zubehör: 1. Magnetron (oder eine ihm äquivalente Elektronenröhre CO-118[1]), 2. Solenoid, 3. Zeigergalvanometer, 4. Voltmeter, 5. Amperemeter, 6. festmontierter Widerstand, 7. Stromquelle.

Die Beschreibung der Methode. Die wichtigsten Charakteristiken eines Elektrons sind seine Ladung und seine Masse. Bei der Bewegung eines Elektrons in elektrischen und magnetischen Feldern wird die Flugbahn des Elektrons bestimmt durch die Konfiguration dieser Felder und durch das Verhältnis der Ladung des Elektrons zu seiner Masse e/m.

Wenn die Struktur des elektrischen oder des magnetischen Feldes vorgegeben ist und aus dem Versuch die Bahn des Elektrons in diesem Feld bekannt ist, kann der Wert der Größe e/m bestimmt werden. Diese Überlegung liegt vielen Methoden der e/m-Bestimmung zugrunde. Zuerst wurde dieses Verfahren bei der sogenannten *Parabelmethode* angewendet. Hierbei untersucht man die Ablenkung eines Elektronenstrahls aus der Anfangsrichtung, die er erleidet, wenn er das homogene elektrische Feld eines ebenen Plattenkondensators senkrecht zum Feld durchfliegt. Analoge Verfahren zur Bestimmung der Größe e/m werden für Ionen oder andere Teilchen angewendet.

---

[1]) Anm. d. Übers.: Ähnlich der REN 904.

Eine der wichtigsten Varianten dieser Methoden ist die *Magnetronmethode,* bei der das Elektron durch ein Magnetfeld abgelenkt wird. Bekanntlich wirkt ein Magnetfeld auf eine bewegte Ladung mit der Kraft

$$\mathfrak{F} = \frac{e}{c}\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}]$$

stets senkrecht zu der Geschwindigkeit der Bewegung des Elektrons.

Das Wesen der Magnetronmethode besteht darin, daß eine besondere Elektronenröhre, die zusammen mit der Schaltung in Abb. 231a dargestellt ist, in ein axiales Magnetfeld gebracht wird. Das Feld wird durch ein von Gleichstrom durchflossenes Solenoid erzeugt. (Die Schaltung des Solenoids zeigt Abb. 231b.) Dieses Solenoid wird so über den Kolben der Elektronenröhre geschoben, daß die Richtung der Feldstärke mit der Symmetrieachse der Röhre zusammenfällt, längs der der Heizfaden gespannt oder die indirekt geheizte Kathode angebracht ist.

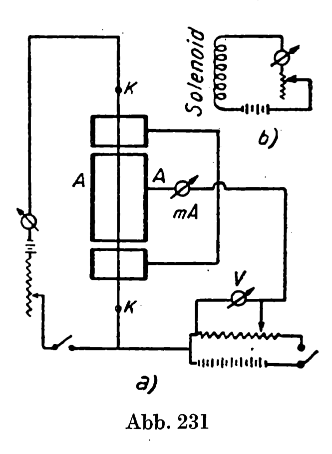


Abb. 231

Bei einer solchen Lage der Kathode und der zylindrischen Anode bewegen sich die aus dem Heizfaden KK (Abb. 231a) emittierten Elektronen, wenn kein Magnetfeld vorhanden ist, radial zur Anode AA. Sobald der Gleichstrom im Solenoid eingeschaltet ist, wirkt sein Magnetfeld auf die Elektronen ein und lenkt sie zu jedem Zeitpunkt senkrecht zu der Richtung ihres Geschwindigkeitsvektors ab. Unter der Wirkung ablenkender Kräfte nimmt die Bewegung der Elektronen eine kompliziertere Form an, und ihre Bahnen werden krummlinig. Die Kurven beginnen an dem Heizfaden (oder der indirekt geheizten Kathode) und enden an der Anode der Röhre.

Auch ohne Rechnung ist es klar, daß die Ablenkung der Elektronen durch das Magnetfeld bei einem bestimmten Verhältnis zwischen ihren Geschwindigkeiten v und dem Wert des Vektors $\mathfrak{H}$ dazu führen kann, daß die Elektronen überhaupt nicht mehr die Anode erreichen; damit hört auch der Anodenstrom auf zu fließen. Die Elektronen erzeugen in der Röhre eine negative Raumladung, die die Emission der Kathode sperrt und sich in dem Raum zwischen dem Heizfaden und der Anode bewegt.

So kann sich ein durch die Wirkung des Magnetfeldes auf die radial fliegenden Elektronen auftretender Rolleffekt zeigen.

Das Experiment zur Bestimmung von e/m mit dieser Methode besteht darin, daß in der Magnetronröhre eine konstante Heizspannung und eine konstante Potentialdifferenz zwischen der Kathode und der Anode, d. h. die Bedingung für eine Konstanz des Anodenstromes, eingestellt wird. Dann ändert man, von Null ausgehend, die Stromstärke im Solenoid und vergrößert damit die Feldstärke des axialen Magnetfeldes, bis kein Anodenstrom mehr durch die Röhre fließt. Kennt man die geometrischen Daten des Magnetrons, d. h. die Radien der zylindrischen Kathode und Anode, die Größe der angelegten

Anodenspannung und die Feldstärke des kritischen Magnetfeldes, bei dem der Anodenstrom verschwindet, so kann man die Größe des Verhältnisses e/m bestimmen.

Diese Berechnung ist nicht einfach, weil sich das Elektron in einem inhomogenen radialen elektrischen Feld bewegt. Wenn man sie jedoch durchführt, so erweist es sich, daß man die Größe e/m darstellen kann als

$$\frac{e}{m} = \frac{8V}{b^2 H^2_{\text{krit}}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^2},$$

wobei V die Größe der Anodenspannung, H_{krit} die kritische magnetische Feldstärke und a und b die Radien der Kathode beziehungsweise der Anode bedeuten. Nach dieser Formel und aus den experimentell gefundenen Werten V und H_{krit} wird die Größe e/m in der vorliegenden Aufgabe errechnet.

Charakteristisch für diese Methode ist, daß sie nicht die Kenntnis der Flugbahnen der Elektronen im Magnetfeld voraussetzt. Im Gegenteil, durch die Änderung der Größe H (bei vorgegebenem V_A) läßt sich eine vorgegebene Bahn der Elektronen einstellen, auf der sie trotz der Wirkung des elektrischen Feldes nicht auf die Anode der Röhre gelangen können. Damit wird der Versuch auf die Aufnahme einer sogenannten *fallenden Charakteristik* der Röhre zurückgeführt, d. h. auf die Aufnahme der Abhängigkeit I_A (bei $V_A = \text{const}$) von H. Der steile Abfall dieser Kurve (starke Abnahme des Anodenstromes der Röhre) entspricht der gesuchten kritischen Arbeitsbedingung des Magnetrons.

Die Messungen und ihre Auswertung. Die Messungen werden zurückgeführt auf die Einstellung einer festen Anodenspannung (und natürlich auch Heizung) und auf die Änderung der Stromstärke im Solenoid bis zum Abfall des Anodenstromes. Die magnetische Feldstärke läßt sich leicht aus der Größe des Gleichstromes durch das Solenoid berechnen, wenn die Zahl der Windungen n je Längeneinheit der Spule bekannt ist:

$$H = 0{,}4\pi n I.$$

Der kritische Wert für die magnetische Feldstärke wird für einige Werte der Anodenspannungen — 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 V — bestimmt. Man erhält als Ergebnis eine Schar fallender Charakteristiken.

Man muß im Auge behalten, daß die fallenden Charakteristiken keinen vertikalen Abfall des Anodenstromes bei einem bestimmten Wert H_{krit} ergeben. Statt dessen tritt faktisch nur ein ziemlich steiler Abfall dieser Kurven auf. Das erklärt man damit, daß die Elektronen den Heizfaden mit verschiedenen Geschwindigkeiten verlassen. Richtiger wäre es, die Werte für H_{krit} aus dem oberen Teil des steilen Abfalls der fallenden Charakteristiken zu entnehmen.

Wenn der Versuch mit der Röhre CO-118 durchgeführt wird, so stellt man in ihr einen Heizstrom von 0,6 A (von der 16-V-Gleichstromleitung) ein. Bei ihr ist der Radius $a = 0{,}06$ cm, und der Radius $b = 0{,}61$ cm. Bei nicht zu großen Werten der Anodenspannung fließt ein Strom (wenn kein Magnetfeld vorhanden ist) von etwa 1 mA. Dieser Strom wird entweder mit einem Milli-

amperemeter oder mit einem auf den 3-V-Bereich geschalteten Voltmeter gemessen.

Das Solenoid wird entweder von einem Akkumulator hoher Spannung oder von der Gleichstromleitung gespeist, wenn letztere genügend konstant ist. Die notwendige Stromstärke bei kleinen Anodenspannungen der Röhre ist nicht größer als 1 A. Das Solenoid besitzt 190 Windungen je cm seiner Länge.

Wird an Stelle eines Magnetrons die Röhre CO-118 benutzt, dann liegt dem Versuch die in Abb. 232 dargestellte Schaltung zugrunde. Das Gitter dieser

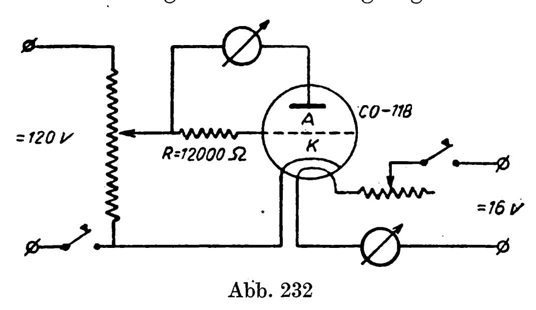


Abb. 232

Röhre ist für die vorliegende Aufgabe unnötig. Damit das Gitter das Feld im Inneren der Röhre nicht verzerrt, ist es über einen hohen Widerstand mit der Anode verbunden. Der Widerstand ist so gewählt, daß das Gitter ein Potential annimmt, das an dieser Stelle fast auch in einer Zweielektrodenröhre herrschen würde. Dabei gleicht das Feld im Inneren der Röhre beinahe dem Feld in einer Zweielektrodenröhre, für das alle Berechnungen durchgeführt wurden.

Literatur

1. L. Bergmann und Cl. Schaefer: „Lehrbuch der Experimentalphysik", Bd. II. Verlag W. de Gruyter, Berlin 1950.
2. L. Bergmann, Cl. Schaefer und W. Kliefoth: „Grundaufgaben des physikalischen Praktikums". B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1948.
3. S. E. Frisch und A. W. Timorewa: „Lehrgang der allgemeinen Physik", Bd. II. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955.
4. Chr. Gerthsen: „Physik. Ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen". Volk und Wissen Verlags-GmbH, Berlin/Leipzig 1948.
5. E. Grimsehl: „Lehrbuch der Physik", Bd. II: Elektromagnetisches Feld. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1955.
6. F. Kohlrausch: „Praktische Physik", Bd. II. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1953.
7. R. W. Pohl: „Einführung in die Elektrizitätslehre". Verlag J. Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955.
8. A. Recknagel: „Physik", Elektrik und Optik. Verlag P. E. Blanck, Weimar 1953.
9. W. Schallreuter: „Einführung in die Physik", Bd. II. Verlag W. Knapp, Halle (Saale) 1953.
10. W. H. Westphal: „Physik", ein Lehrbuch. Verlag J. Springer, Berlin 1950.
11. W. H. Westphal: „Physikalisches Praktikum". Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig 1952.

VIERTER TEIL

OPTIK

Aufgabe 68

Die Bestimmung der Lichtstärke einer Glühlampe und die Untersuchung ihrer Lichtverteilung mit Hilfe eines Photometers

Zubehör: **1. Optische Bank mit vier Reitern, 2. Photometer, 3. Hefnerlampe, 4. Glühlampe in einer vertikal stehenden Fassung, die sich um die vertikale Achse drehen läßt und einen in Grade geteilten Limbus besitzt.**

Beim Vergleich verschiedener Lichtquellen kann das Auge die Gleichheit der Beleuchtungsstärke[1]) zweier angrenzender Oberflächen leicht feststellen, doch kann es nicht beurteilen, um wievielmal die Beleuchtungsstärke der einen Oberfläche größer ist als die der anderen. Aus diesem Grunde sind alle Photometer (das sind Geräte, die zum Vergleich zweier Lichtquellen dienen) so gebaut, daß das Auge nur die Gleichheit der Beleuchtungsstärke zweier angrenzender Felder festzustellen hat, auf die der Lichtstrom von den zu vergleichenden Lichtquellen fällt.

Für eine punktförmige Lichtquelle ist die Beleuchtungsstärke E einer Oberfläche bei senkrechtem Einfall des Lichtes gleich $\frac{I}{r^2}$, wobei I die Lichtstärke und r den Abstand zwischen der Lichtquelle und der Oberfläche darstellen. Wenn I_1 und I_2 die Lichtstärken der ersten und der zweiten Lichtquelle und r_1 und r_2 ihre Abstände vom Photometer sind, dann gilt für die Gleichheit der Beleuchtungsstärken beider Hälften des Gesichtsfeldes ($E_1 = E_2$):

$$\frac{I_1}{r_1^2} = \frac{I_2}{r_2^2} \tag{1}$$

oder

$$I_2 = I_1 \frac{r_2^2}{r_1^2}. \tag{1'}$$

Kennt man also die Lichtstärke I_1 der einen Lichtquelle und mißt man die Abstände r_1 und r_2, so kann man die Lichtstärke I_2 der zweiten Lichtquelle bestimmen.

Die Beschreibung der Geräte. Die optische Bank (Photometerbank) (Abb. 233) besteht aus einer dreikantigen metallischen Schiene PQ von der Länge 0,5 bis 2 m, auf der die Reiter A und B verschoben werden können. In die Säule des Reiters können verschiedene Einsätze gesteckt und mit der

---

[1]) Anm. d. Übers.: Das Auge vergleicht nicht die Beleuchtungsstärken, sondern die Leuchtdichten zweier angrenzender Flächen (bzw. beider Hälften des Gesichtsfeldes). Die beiden Lichtquellen erzeugen auf der lichtstreuenden Platte m (siehe unten) bestimmte Beleuchtungsstärken. Die beiden Seiten der Platte m streuen das Licht nach allen Richtungen. Man kann sie also als Lichtquellen auffassen, und das Auge erhält die Aufgabe, ihre Leuchtdichten zu vergleichen.

Schraube a festgeklemmt werden. Die Klemmschraube b erlaubt es, den Reiter an einer bestimmten Stelle der Bank festzuklemmen. Die Reiter sind mit Zeigern versehen, an denen die Stellung des Reiters auf dem Maßstab abgelesen werden kann.

Das Photometer besteht aus dem Kopf AB (Abb. 234), der sich um die horizontale Achse, die durch V und T läuft, um 180° drehen läßt. Das Licht der zu vergleichenden Lichtquellen L_1 und L_2 fällt auf die lichtstreuende Platte m (aus Kreide oder Gips). Ein Teil des gestreuten Lichtes fällt unter verschiedenen Winkeln auf die Spiegel S_1 und S_2, die es ihrerseits auf die Flächen bc und dp zweier Glasprismen aus Material von gleichem Brechungsindex reflektieren. Das Prisma bca ist ein normales total reflektierendes Prisma mit ebenen Flächen, während das Prisma pqd die sphärische Fläche pq besitzt, deren mittlerer Teil so eben geschliffen ist, daß er einen optischen Kontakt mit der Fläche ab des Prismas abc bildet, d. h., an dieser Stelle verhalten sich beide Prismen so, als ob sie aus einem durchsichtigen Körper gefertigt sind[1]). Das Licht, das auf die Berührungsfläche der Prismen fällt, geht ohne Reflexion hindurch.

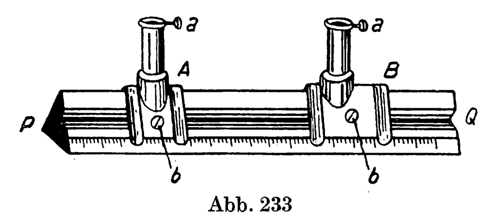


Abb. 233

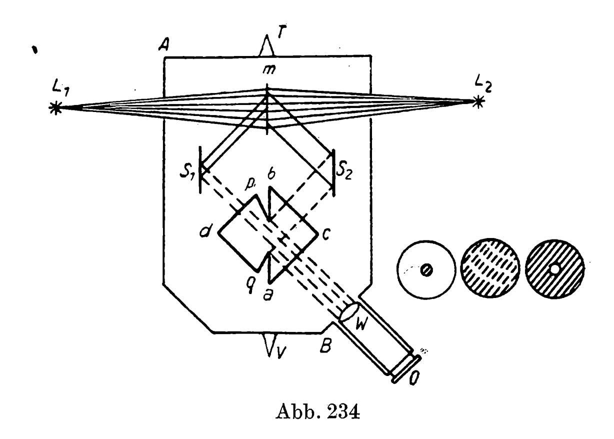


Abb. 234

Der Beobachter sieht gleichzeitig im Fernrohr, welches seitlich vom Photometerkopf angebracht ist, das vom Spiegel S_1 kommende und durch die Berührungsfläche der Prismen gehende Licht und das vom Spiegel S_2 kommende und von dem Teil der Fläche ab, der nicht mit dem Prisma pqd in Berührung steht, reflektierte Licht. Wenn die Okularlupe W auf die Fläche ab scharf eingestellt ist, sieht das Auge des Beobachters im allgemeinen entweder einen

[1]) Anm. d. Übers.: Lummer-Brodhun-Würfel.

zentralen dunklen Fleck auf hellem Grund oder umgekehrt einen hellen Fleck auf dunklem Grund. Werden die beiden Seiten der Platte m gleich stark beleuchtet, so erscheint das Gesichtsfeld im Fernrohr gleichmäßig ausgeleuchtet.

Der Photometerkopf und die beiden zu vergleichenden Lichtquellen sitzen auf Reitern, die auf der Photometerbank verschoben werden können. Auf den äußeren Reitern sind die Lichtquellen so befestigt, daß die Achsen ihrer Lichtbündel senkrecht zur Platte m stehen.

Bei Photometern neuerer Konstruktion werden in den Strahlengang mS_1 und mS_2, der von der Platte m diffus reflektierten Strahlen, Farbfilter oder Milchglasscheiben gestellt. Die Farbfilter werden im Falle einer unterschiedlichen spektralen Zusammensetzung der Lichtquellen L_1 und L_2 verwendet, wenn die Energie zweier gleicher Wellenlängenbereiche verglichen werden soll. Die Verschiedenfarbigkeit des Gesichtsfeldes ohne Lichtfilter erschwert die Einstellung auf gleiche Beleuchtungsstärke. Die Milchglasscheiben werden zum Vergleich der integralen Ausstrahlung gleicher Lichtquellen verwendet. Das Auswechseln der Filter und Scheiben geschieht durch Drehen eines speziellen Ringes am Außenmantel des Gerätes.

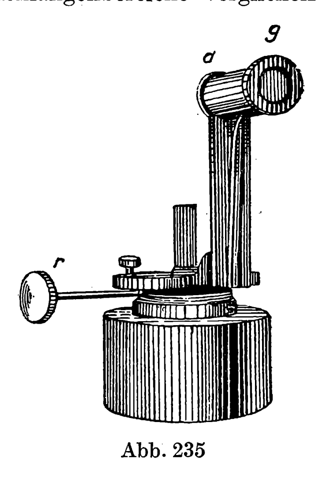


Abb. 235

Die Normallampe[1]) (Abb. 235) besitzt einen Docht von 8 mm Durchmesser und wird mit Amylazetat gespeist. Die Flammenhöhe ist durch eine besondere Schraube r regulierbar und wird auf 40 mm eingestellt. Zur Messung dieser Höhe ist an der Seite der Lampe ein kleines Rohr angebracht, das an dem einen Ende eine kleine Linse d trägt, die das Bild der Flamme auf der am anderen Ende befindlichen und mit einer Teilung versehenen Mattscheibe g entwirft. Die Höhe von 40 mm ist durch einen langen Strich markiert. Die Hefnerkerze (d. h. die Lichtstärke der so ausgestatteten Lampe) ist gleich 0,9 der internationalen Kerze (Candela), die in der UdSSR als Einheit der Lichtstärke angenommen ist.

Übung 1

Die Bestimmung der Lichtstärke einer Glühlampe

Die Messung. Man befestigt an den äußeren Reitern der Photometerbank die zu untersuchende Glühlampe[2]) und die HEFNER-Lampe, stellt zwischen beide das Photometer und richtet die Lichtquellen auf gleiche Höhe mit den Fenstern des Photometers aus, damit die Lichtstrahlen senkrecht auf die Platte m auffallen (Abb. 234). Dann verschiebt man das Photometer nach der einen oder anderen Richtung, versucht auf die Gleichheit beider Teile des

[1]) Anm. d. Übers.: HEFNER-Lampe.

[2]) Die Glühlampe wird in eine feststehende Fassung geschraubt, da sie in der Übung 2 als Eichlampe verwendet werden soll.

Gesichtsfeldes einzustellen und liest am Maßstab der Photometerbank die Stellung aller drei Reiter ab. Hieraus bestimmt man den Abstand beider Lichtquellen vom Photometer.

Anschließend dreht man bei gleicher Stellung der Lichtquellen den Photometerkopf um 180° um seine horizontale Achse, stellt wieder auf gleiche Beleuchtungsstärke ein, führt eine zweite Ablesung der Stellung des Photometers durch und bestimmt erneut den Abstand beider Lichtquellen vom Photometer. Aus diesen beiden Ergebnissen wird der Mittelwert gebildet.

Solche Messungen müssen wiederholt ausgeführt werden, wobei man jedesmal den Abstand zwischen den beiden Lichtquellen verändert.

Wenn man die Lichtstärke I_1 der HEFNER-Lampe in der Formel (1′) gleich 0,9 setzt, so erhält man für die Lichtstärke I_2 der Glühlampe, ausgedrückt in Candela, offensichtlich

$$I_2 = \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot 0{,}9.$$

Übung 2

Die Untersuchung der Lichtstärkeverteilung einer Glühlampe

Hat man mit der oben angegebenen Methode die Lichtstärke einer Glühlampe bestimmt, so benutzt man diese Lampe (L_2) als Lichtquelle bekannter Lichtstärke und untersucht damit die Lichtstärkeverteilung einer zweiten Glühlampe (L_2').

Die Glühlampe (L_2'), an deren Stativ ein Zeiger befestigt ist, wird an Stelle der HEFNER-Lampe so aufgestellt, daß der Zeiger auf 0° eines Teilkreises weist. Man mißt, wie auch in der vorhergehenden Übung, den Abstand zwischen der zu untersuchenden Lampe und dem Photometer bei Gleichheit seines Gesichtsfeldes und berechnet nach der Formel (1) die von der Lampe in einer vorgegebenen Stellung, relativ zum Photometer, ausgestrahlte Lichtstärke. Dann dreht man die Lampe jedesmal um 10 bis 15° um ihre vertikale Achse und bestimmt ihre Lichtstärke in den, relativ zum Photometer, neuen Stellungen.

Hat man auf diese Weise die Verteilung der Lichtstärke der Lampe für eine Gesamtdrehung um 180° relativ zum Photometer bestimmt, so zeichnet man die Verteilungskurve der Lichtstärke in Polarkoordinaten auf, wobei man die Lichtstärke radial abträgt. Analog dazu zeichnet man auch den zweiten Zweig der Kurve, der einer weiteren Drehung der Lampe, relativ zum Photometer, entspricht, d. h. von 180° bis 360°.

Übung 3

Die Bestimmung des Reflexionsfaktors einer Oberfläche

In dieser Übung wird zu der allgemeinen Anordnung noch seitlich eine optische Bank hinzugefügt, die rechtwinklig zu der ursprünglichen verläuft (Abb. 236).

Die zu untersuchende Oberfläche A wird auf einem Reiter befestigt und unter einem Winkel von 45° zur Bank aufgestellt. Die HEFNER-Lampe L_1 wird

auf das eine Ende der Photometerbank und die andere Lichtquelle L_2, die in einem besonderen Gehäuse steckt, auf das Ende der seitlichen Bank (Stellung I) gestellt. Durch Verschieben des Photometers F versucht man, auf gleiche Beleuchtungsstärke[1]) einzustellen und mißt dann den Abstand r_1 zwischen der HEFNER-Lampe L_1 und dem Photometer.

Die Beleuchtungsstärke E_1 der Platte m (Abb. 234) ist auf der Seite der zu untersuchenden Oberfläche gleich $\frac{\Phi_1}{\sigma}$, wobei Φ_1 den Lichtstrom, der von dieser Oberfläche reflektiert wird und auf m fällt, und σ die Fläche der Platte m bezeichnet. Die Beleuchtungsstärke E_2, die von der HEFNER-Lampe erzeugt wird, ist gleich $\frac{I}{r_1^2}$, wobei I die Lichtstärke der Lichtquelle L_1 bedeutet. Hieraus erhalten wir für $E_1 = E_2$:

$$\frac{\Phi_1}{\sigma} = \frac{I}{r_1^2}. \tag{2}$$

Man bringt die Lichtquelle L_2 in die Stellung II und nimmt die zu untersuchende Oberfläche A von der Photometerbank. Der Lichtstrom Φ_2, der auf den Schirm des Photometers fällt, ist wegen der Gleichheit der Abstände r_0 und r_0' gleich dem Lichtstrom, der auf den Schirm des Photometers aus der Stellung I gefallen wäre, wenn er von der Oberfläche A vollständig reflektiert worden wäre. Der Reflexionsgrad k ist gleich dem Verhältnis $\frac{\Phi_1}{\Phi_2}$.

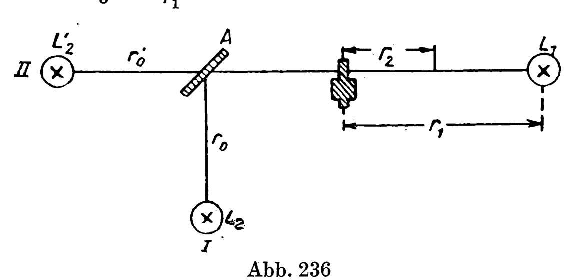


Abb. 236

Man läßt die Lichtquelle L_2' unverändert stehen und verschiebt L_1 zum Photometer hin bis zu einem Abstand von r_2, der der gleichen Beleuchtungsstärke beider Flächen der Platte m entspricht. Dann erhält man:

$$\frac{\Phi_2}{\sigma} = \frac{I}{r_2^2}. \tag{3}$$

Dividiert man (2) durch (3), so erhält man:

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = k.$$

Diese Messung muß mehrmals wiederholt werden, wobei jedesmal die geeichte Lichtquelle L_1 in Richtung A etwas verschoben wird.

Spezialliteratur

R. SEWIG: „Handbuch der Lichttechnik“.

[1]) Siehe Anmerkung auf S. 397.

Aufgabe 69

Die Bestimmung der spezifischen Leistung von Glühlampen

Zubehör: 1. Optische Bank mit drei Reitern, 2. Photometer, 3. Amperemeter, 4. zwei Voltmeter, 5. zwei Schiebewiderstände, 6. Schalter, 7. drei Lampenfassungen, 8. HEFNER-lampe, 9. zu untersuchende Lampen.

Die wesentliche physikalische Größe, die die Wirtschaftlichkeit einer Glühlampe charakterisiert, ist die Menge der elektrischen Energie, die zur Erzeugung der Lichtstärkeeinheit aufgewendet werden muß. Diese Größe wird *spezifische Leistung* der Lampe genannt.

Wenn wir die Leistung eines elektrischen Stromes, der den Lampenfaden zum Glühen bringt, mit W bezeichnen und die ihr entsprechende Lichtstärke (ausgedrückt in Candela) mit I, dann läßt sich die spezifische Leistung folgendermaßen ausdrücken:

$$\eta = \frac{W}{I} \text{ [W/cd]}. \tag{1}$$

Der Wert der spezifischen Leistung hängt wesentlich von der Temperatur des Fadens ab. Deshalb ist er für verschiedene Lampentypen ganz verschieden. Die spezifische Leistung jeder Lampe ändert sich mit der Veränderung des Stromes und nimmt bei Erhöhung des Stromes stark ab.

Die Beschreibung der Anordnung. Zur Messung der Lichtstärke wird ein vervollkommnetes Photometer benutzt, das sich von dem analogen, in Aufgabe 68 beschriebenen Gerät durch die Anordnung der Prismen unterscheidet. Die sich berührenden Flächen sind so ausgeschnitten, daß bei der Beobachtung durch die Okularlupe drei konzentrische Ringe zu sehen sind. Damit kann man auf gleiche Helligkeit der Ringe leichter und genauer einstellen. Über die anderen Einzelheiten der Photometereinrichtung siehe Aufgabe 68.

Zur Messung der zweiten notwendigen Größe, der Stromleistung, dienen ein genaues Amperemeter[1]) und ein genaues Voltmeter. Sie werden in den Stromkreis der Lampe so eingeschaltet, wie es Abb. 237 zeigt. Hierin sind A das Amperemeter, V_1 das Voltmeter und R_1 der Schiebewiderstand, der zur Änderung des Stromes der Lampe L_1 dient. Als geeichte Lichtstärke, mit der die zu untersuchende Lampe verglichen wird, wird eine gewöhnliche Glühlampe L_2 verwendet, deren Lichtstärke I_H bei einer bestimmten Spannung bekannt ist. Um die Spannung an den Klemmen der Lampe konstant halten zu können, liegt in ihrem Kreis der Schiebewiderstand R_2 und parallel zu ihr das Voltmeter V_2.

Man muß beachten, daß bei dem Vergleich von Lampen verschiedenen Typs und ebenso von gleichen, aber mit verschiedenen Stromstärken betriebenen Lampen in ihrem ausgestrahlten Licht Farbunterschiede auftreten, die durch unterschiedliche spektrale Zusammensetzung der Strahlung hervorgerufen werden. In diesen Fällen kann der Abgleich nur angenähert ausgeführt werden. Das setzt die Genauigkeit der Messung natürlich wesentlich herab.

Für genauere Messungen muß der Vergleich in einzelnen Spektralbereichen

---

[1]) Das Amperemeter muß es ermöglichen, Änderungen der Stromstärke von einigen tausendstel Ampere bei einer Gesamtstromstärke von 0,5 bis 1,0 A abzulesen.

durchgeführt werden. Dazu verwendet man Lichtfilter (siehe Aufgabe 83) oder ein besonderes Gerät, das sogenannte *Spektralphotometer* (siehe Aufgabe 84)[1]).

Die Messung. Man setzt die Fassung mit der geeichten Lampe auf einen der Reiter der Photometerbank, schaltet sie nach Abb. 237 in den Stromkreis (der Spannungsbereich der geeichten Lampe wird angegeben) und schreibt die Stellung des Reiters auf.

Man setzt die Fassung mit der zu untersuchenden Lampe auf den anderen Reiter und verbindet sie mit den Meßgeräten, wie es Abb. 237 zeigt. Die Lampen werden entweder in vertikal oder in horizontal stehenden Fassungen so aufgestellt, daß die Fläche durch den Glühfaden der Lampe zu der streuenden Platte des Photometers parallel steht. Die Fläche, in der der Faden liegt, muß auch durch den Zeiger des Reiters gehen. Die Stellung dieses Reiters wird ebenfalls aufgeschrieben.

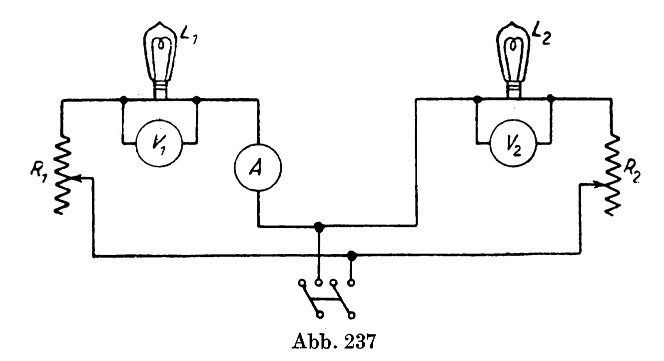


Abb. 237

Man schaltet den elektrischen Strom ein, stellt mit Hilfe des Schiebewiderstandes R_2 am Voltmeter V_2 den vorgegebenen Spannungswert ein und achtet während der Messung darauf, daß sich dieser Spannungswert nicht verändert.

Man verändert die an der zu untersuchenden Lampe liegende Spannung zwischen ihrem maximal zulässigen Wert und ungefähr der Hälfte dieses Wertes, mißt jedesmal mit dem Photometer die Lichtstärke und schreibt die Anzeigen des Volt- und des Amperemeters auf. (Die Stromstärke der Lampe wird in Stufen von 0,01 bis 0,02 A verändert.)

Die Messung der Lichtstärke der Lampe wird jedesmal bei zwei Stellungen des Photometerkopfes (0 und 180°) durchgeführt. Es müssen mindestens drei solcher Doppelmessungen für jede zu messende Lichtstärke vorliegen. Im ganzen müssen diese Messungen für mindestens zehn verschiedene Leistungswerte ausgeführt werden.

Die Ausrechnung. Nach der Formel

$$W = i v, \tag{2}$$

[1]) Anm. d. Übers.: Sehr häufig wird in der heterochromen Photometrie die Flimmermethode verwendet. (Vergleiche z. B. KOHLRAUSCH: Praktische Physik, Bd. I, Teubner, Leipzig 1951.)

wobei i die Stromstärke und v die Spannung an den Klemmen der Lampe bezeichnen, wird die Leistung für jede Messung bestimmt. Für jede Leistung bildet man den Mittelwert für die Abstände r_H und r zwischen dem Photometer und den Reitern. Nach der Formel

$$I = \frac{r^2}{r_H^2} \cdot I_H \tag{3}$$

errechnet man die entsprechende Lichtstärke, und nach der Formel (1) bestimmt man die spezifische Leistung für jeden eingestellten Leistungswert. Außerdem stellt man die Abhängigkeit der Lichtstärke von der Stromleistung und die Abhängigkeit der spezifischen Leistung von der Stromstärke graphisch dar.

Aufgabe 70

Die Bestimmung der Brennweite von Sammel- und Zerstreuungslinsen

Die elementare Theorie optischer Systeme führt zu einfachen Beziehungen zwischen der Brennweite von Linsen einerseits und dem Abstand der Linsen vom Gegenstand (Gegenstandsweite) und von seinem Bild (Bildweite) oder der Größe des Bildes und der Bildweite andererseits. Bestimmt man die zuletzt genannten Größen, so kann man nach Formeln unschwer die Brennweite mit einer für die meisten Fälle ausreichenden Genauigkeit berechnen.

Übung 1

Die Bestimmung der Brennweite von Sammellinsen

Zubehör: 1. Optische Bank mit vier Reitern, 2. Sammellinse, 3. Glühlampe in einem Spezialgehäuse, 4. Schirm mit aufgezeichnetem Maßstab, 5. Fernrohr.

Die Beschreibung der Anordnung. Auf der horizontal stehenden optischen Bank können auf Reitern folgende Gegenstände verschoben werden: die Linse, der Schirm mit Maßstab, das Fernrohr und die Glühlampe in einem Spezialgehäuse. Letzteres besitzt einen ausgeschnittenen Spalt, der von der im Inneren des Gehäuses steckenden Lampe beleuchtet wird und als Gegenstand dient. Zur genaueren Fokussierung ist der Spalt mit einem Netz überzogen, vor den zur Abschwächung der chromatischen Aberration ein Lichtfilter (gefärbtes Gelatineplättchen) gestellt ist.

Alle diese Geräte werden so eingerichtet, daß ihre Zentren die gleiche Höhe einnehmen, die Ebenen der Schirme senkrecht zur Längsachse der optischen Bank stehen und die Linsenachse parallel zur Bank verläuft. Der Abstand zwischen ihnen wird an einem Maßstab, der längs der optischen Bank angebracht ist, mit Hilfe von an den Reitern befestigten Zeigern abgelesen.

Die Bestimmung der Brennweite von Sammellinsen geschieht nach folgenden Methoden:

1. Methode

Die Bestimmung der Brennweite aus der Gegenstandsweite und der Bildweite. Wenn wir mit a und b die Abstände des Gegenstandes und seines Bildes von der Linse bezeichnen, dann läßt sich die Brennweite durch die Formel ausdrücken:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \tag{1}$$

oder

$$f = \frac{ab}{a+b}. \tag{2}$$

(Die Formel ist nur für den Fall richtig, wenn die Dicke der Linse im Vergleich zu a, b und f klein ist.)

Die Messung. Wir stellen den Schirm mit dem Maßstab in genügender Entfernung von dem Gegenstand auf, bringen die Linse zwischen beide und verschieben sie so lange, bis wir auf dem Schirm mit dem Maßstab eine völlig scharfe Abbildung des Spaltes und des Netzes erhalten. Wir schreiben die Stellungen der Linse, des Schirmes und des Gegenstandes auf, verschieben die Reiter mit der Lampe und dem Schirm in andere Stellungen und suchen erneut die entsprechende Stellung der Linse auf.

Da die visuelle Abschätzung der Schärfe der Abbildung ungenau ist, empfiehlt es sich, die Einstellung mindestens zehnmal zu wiederholen. Außerdem ist es bei dieser Methode nützlich, einen Teil der Messungen bei vergrößertem und einen Teil bei verkleinertem Bild durchzuführen.

Aus jeder einzelnen Messung wird nach der Formel (2) die Brennweite berechnet und aus allen Ergebnissen der arithmetische Mittelwert gebildet.

Um sich davon zu überzeugen, daß die Form der Abbildung nicht von der Größe und der Form der Linsenöffnung abhängt, empfiehlt es sich, vor oder hinter die Linse nacheinander verschiedene Blenden aus der beigegebenen Sammlung (Spalt, Ring, Halbkreis usw.) zu stellen und ihren Einfluß auf die Abbildung zu untersuchen. Man untersuche ebenfalls die Wirkung der Blenden auf die Schärfe der Abbildung.

2. Methode

Die Bestimmung der Brennweite aus der Größe des Gegenstandes und seines Bildes und der Bildweite. Wir bezeichnen die Größe des Gegenstandes mit l, die Größe seines Bildes mit L und ihren Abstand von der Linse mit a bzw. b. Diese Größen stehen in folgender bekannter Beziehung zueinander:

$$\frac{l}{L} = \frac{a}{b}.$$

Löst man diese Gleichung nach a (dem Abstand des Gegenstandes von der Linse) auf und setzt es in die Formel (1) ein, so erhält man sofort einen Ausdruck für f, der von drei Größen abhängt:

$$f = b\,\frac{l}{L+l}. \tag{3}$$

Die Messung. Man stellt die Linse zwischen Schirm und Gegenstand so auf, daß auf dem Schirm mit dem Maßstab ein stark vergrößertes scharfes Bild des Spaltes erscheint und schreibt die Stellung der Linse und des Schirmes auf. Mit Hilfe eines Lineals mißt man die Höhe des Gegenstandes und liest die Höhe des Bildes am Maßstab des Schirmes ab. Man errechnet den Abstand vom Bild bis zur Linse und bestimmt die Brennweite der Linse aus der Formel (3).

Man verändert den Abstand zwischen Lichtquelle und Schirm und wiederholt den Versuch mehrmals.

3. Methode

Die Bestimmung der Brennweite aus der Größe der Verschiebung der Linse[1]). Wenn der Abstand zwischen Gegenstand und Bild, den wir mit A bezeichnen, größer als $4f$ ist, so sind immer zwei Stellungen der Linse vorhanden, bei denen auf dem Schirm ein scharfes Bild des Gegenstandes (einmal verkleinert und einmal vergrößert) entsteht (Abb. 238).

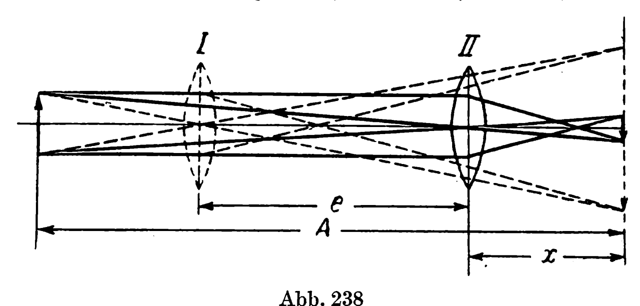


Abb. 238

Es ist unschwer einzusehen, daß dabei beide Stellungen der Linse symmetrisch zur Mitte des Abstandes zwischen Gegenstand und Bild liegen. Benutzen wir nämlich die Gleichung (2), so können wir für die erste Stellung der Linse (Abb. 238) schreiben:

$$f = \frac{(A - e - x)(x + e)}{A}$$

und für die zweite:

$$f = \frac{(A - x)x}{A}.$$

Setzen wir die rechten Seiten dieser Gleichungen einander gleich, so finden wir:

$$x = \frac{A - e}{2}.$$

Setzen wir diesen Wert für x in den Ausdruck $A - e - x$ ein, so finden wir sofort:

$$A - e - x = \frac{A - e}{2},$$

---

[1]) Anm. d. Übers.: Besselsche Methode.

d. h., daß tatsächlich beide Stellungen der Linse sich im gleichen Abstand sowohl vom Gegenstand als auch vom Bild befinden und folglich symmetrisch zu der Mitte des Abstandes zwischen Gegenstand und Bild liegen.

Um den Ausdruck für die Brennweite zu erhalten, betrachten wir eine der Linsenstellungen, z. B. die erste. Für sie ist der Abstand zwischen Gegenstand und Linse

$$a = \frac{A - e}{2}$$

und der Abstand zwischen Linse und Bild

$$b = \frac{A + e}{2}.$$

Setzen wir diese Größe in die Formel (2) ein, so finden wir:

$$f = \frac{A^2 - e^2}{4A}. \tag{4}$$

Diese Methode ist theoretisch am genauesten; denn in allen vorhergehenden Fällen haben wir die Abstände stets bis zu der Mitte der Linse gemessen. In Wirklichkeit muß man diese Abstände aber von den entsprechenden Hauptebenen der Linse aus messen, deren Bestimmung nicht ganz einfach ist[1]). In der hier beschriebenen Methode wird dieser Fehler deshalb ausgeschaltet, weil dabei nicht der Abstand von der Linse, sondern ihre Verschiebung gemessen wird.

Die Messung. Man stellt die Lichtquelle und den Schirm so weit auseinander, daß $A > 4f$ (f entnimmt man den früheren Versuchen), bringt die Linse dazwischen und verschiebt diese solange, bis auf dem Schirm ein vollkommen scharfes Bild des Gegenstandes, z.B. ein vergrößertes, entsteht. Man liest die entsprechende Stellung der Linse ab, verändert die Schärfe und stellt erneut ein. Diese Messungen wiederholt man mehrmals.

Danach verschiebt man die Linse so weit, bis man das verkleinerte Bild scharf eingestellt hat und wiederholt die Einstellung genauso oft.

Man liest den Abstand A zwischen Gegenstand und Bild ab, bildet den Mittelwert der Verschiebung e und bestimmt nach der Formel (4) die Brennweite der Linse.

4. Methode

Die Bestimmung der Brennweite mit Hilfe des Fernrohrs. Bekanntlich verlaufen Strahlen, die durch den Brennpunkt einer Linse gehen, hinter der Linse parallel zu der optischen Achse. Auf dieser Eigenschaft beruht die vierte Methode.

Die Messung. Zur Einstellung des Fernrohrs auf Unendlich visiert man einen genügend weit entfernten Gegenstand an. Man bringt das Fernrohr auf die optische Bank, stellt vor sein Objektiv die zu untersuchende Linse und hinter die Linse die Lampe.

---

[1]) Über Hauptebenen komplizierter optischer Systeme schlage man in den Lehrbüchern für Physik die Kapitel über geometrische Optik nach.

Man verschiebt die Linse, bis im Fernrohr ein vollkommen scharfes Bild des Netzes erscheint und mißt den Abstand zwischen Gegenstand und Linse und erhält damit die gesuchte Brennweite.

Übung 2

Die Bestimmung der Brennweite einer Zerstreuungslinse

Zubehör: 1. Optische Bank mit fünf Reitern, 2. Zerstreuungslinse, 3. Sammellinse, 4. halbdurchlässiger Schirm, 5. Lichtquelle, 6. Fernrohr.

Die Beschreibung der Anordnung. Die auf den Reitern befestigten Geräte werden auf die optische Bank gestellt und so eingerichtet, wie es in der Übung 1 angegeben wurde.

Die Bestimmung der Brennweite einer Zerstreuungslinse geschieht durch folgende Methoden:

1. Methode

Die Bestimmung der Brennweite aus dem Abstand des Gegenstandes und seines Bildes von der Linse. Wenn in den Strahlengang der vom Punkt A ausgehenden und im Punkt D wieder zusammenlaufenden Strahlen hinter der Sammellinse B (Abb. 239) eine Zerstreuungslinse C so gestellt wird, daß der Abstand CD kleiner ist als die Brennweite der Linse B, dann rückt der Brennpunkt der Strahlen von der Linse B fort und erscheint z. B. an der Stelle E. Infolge der Umkehrbarkeit der Strahlenrichtung bei Linsensystemen können wir uns die Strahlen als von dem Punkt E ausgehend vorstellen. Dann ist der Punkt D das virtuelle Bild des Punktes E nach der Brechung der Strahlen durch die Linse C.

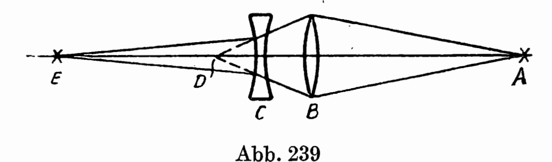


Abb. 239

Bezeichnen wir den Abstand EC mit a, DC mit b und beachten wir, daß f und b ein negatives Vorzeichen besitzen, so erhalten wir übereinstimmend mit der Formel (1)

$$-\frac{1}{f}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b} \tag{5}$$

und folglich

$$f=\frac{ab}{a-b}. \tag{6}$$

Die Messung. Auf die optische Bank werden die Lichtquelle, die Sammellinse und der halbdurchlässige Schirm gestellt. Man verschiebt den Schirm, bis man auf ihm ein scharfes Bild des Netzes erhält. Man schreibt die Stellung des Schirmes auf, verändert die Schärfe des Bildes durch Verschieben des Schirmes und stellt erneut scharf ein. Das führt man etwa zehnmal aus und nimmt daraus den arithmetischen Mittelwert. Damit erhält man die Lage des Punktes D (Abb. 239).

Man verschiebt den Schirm nach links, stellt auf die Bank zwischen die oben gefundene Stellung des Schirmes und die Sammellinse die zu untersuchende Linse und sucht erneut das Netz scharf abzubilden. Man schreibt die Stellung der Linse (oder des Schirmes) auf, verschiebt sie (oder den Schirm) und wiederholt die Einstellung etwa zehnmal. Aus den erhaltenen Ergebnissen nimmt man das Mittel.

Man schreibt die zweite Stellung des Schirmes (Punkt E) auf, errechnet die Abstände EC und DC und bestimmt die Brennweite aus der Formel (6).

Bevor man an die genaue Einstellung der ersten Stellung (Punkt D) geht, empfiehlt es sich, sich zuerst davon zu überzeugen, daß man bei der vorliegenden Aufstellung der Geräte ein scharfes reelles Bild mit der Zerstreuungslinse erhält.

2. Methode

Die Bestimmung der Brennweite mit Hilfe eines Fernrohrs. Wenn der Punkt D (Abb. 239) mit der Brennweite der Zerstreuungslinse zusammenfällt, dann muß nach Formel (5) der Punkt E ins Unendliche rücken, d. h., die Strahlen treten aus der Zerstreuungslinse parallel aus. Auf dieser Eigenschaft der Linsen beruht die zweite Methode zur Bestimmung der Brennweite von Zerstreuungslinsen.

Die Messung. Man bestimmt, wie früher, die Lage des Bildes der Sammellinse (Punkt D), entfernt den Schirm, stellt die zu untersuchende Linse zwischen die gefundene Stellung des Schirmes und die Sammellinse und hinter die Zerstreuungslinse das vorher auf Unendlich eingestellte Fernrohr. Durch Verschieben der Zerstreuungslinse versucht man zu erreichen, daß im Fernrohr ein scharfes Bild des Netzes erscheint.

Man schreibt die gefundene Stellung der Linse auf, verändert die Schärfe des Bildes und bildet erneut scharf ab. Man führt mindestens zehn Messungen aus und nimmt aus ihnen das Mittel.

Der Abstand zwischen der aufgeschriebenen Stellung des Schirmes und dieser Stellung der Linse ergibt die Brennweite der Zerstreuungslinse.

Aufgabe 71

Die Untersuchung der Linsenfehler

In dieser Aufgabe werden zwei Mängel der Linsen untersucht, die die Abbildung der Lichtquelle verzerren: der Astigmatismus und die chromatische Aberration.

Übung 1

Die Untersuchung des Astigmatismus schiefer Bündel

Zubehör: 1. Kollimator mit Fadenkreuz, 2. Linse mit Limbus, 3. Schraubenokularmikrometer, 4. Lichtquelle in einem Spezialgehäuse.

Fällt ein Lichtbündel, das von einer punktförmigen Lichtquelle S (Abb. 240) ausgeht, auf eine Linse unter einem großen Winkel zu ihrer optischen Achse

(zur einfacheren Betrachtung wird eine sphärische Oberfläche vorausgesetzt), so wird es nicht in einem Punkt gesammelt. Legt man durch das Bündel Ebenen, die senkrecht zu seiner Achse verlaufen, so erhält man eine Reihe von ellipsenförmigen Schnitten.

Zwei dieser Schnitte, S_1S_2 und $S_1'S_2'$, entarten zu Abschnitten von Geraden, die senkrecht aufeinander und parallel zu den Symmetrieebenen des Systems stehen. Der Abschnitt S_1S_2 wird *sagittale Abbildung* des Punktes S und der Abschnitt $S_1'S_2'$ *meridionale Abbildung* dieses Punktes genannt. Der Abstand a zwischen diesen Abschnitten, gemessen entlang eines Strahls, wird *astigmatische Differenz* oder *der Astigmatismus der Fokussierung* genannt.

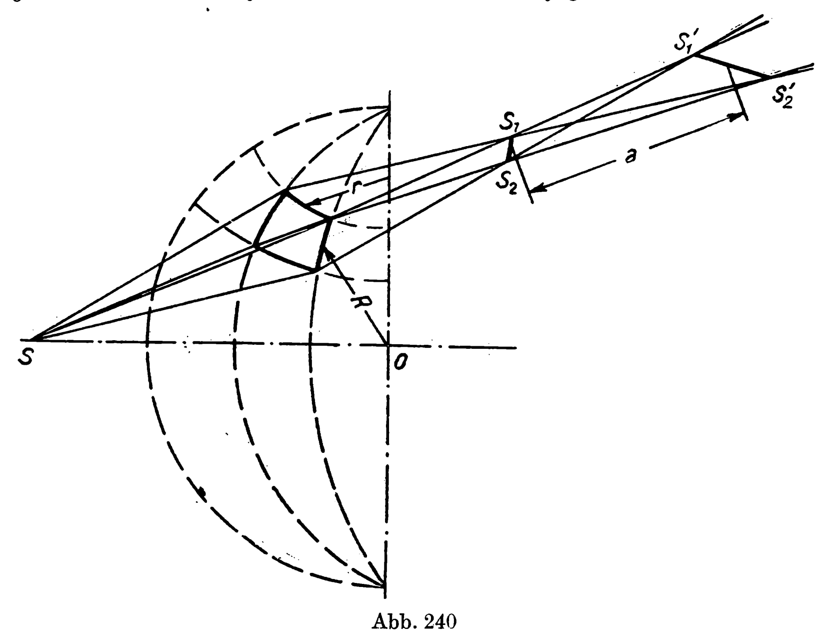


Abb. 240

Tatsächlich werden die in der meridionalen Ebene verlaufenden Strahlen an einer Kugeloberfläche kleinerer Krümmung $\left(\frac{1}{R}\right)$ gebrochen als die in der senkrecht zu der meridionalen Ebene (der sagittalen Ebene) verlaufenden Strahlen. Die Krümmung der brechenden Oberfläche für ein sagittales Bündel ist gleich $\frac{1}{r}$. Nur wenn die Bündel längs der optischen Achse der Linse verlaufen, ist die Krümmung der brechenden Oberflächen sowohl für das sagittale als auch für das meridionale Bündel gleich. In diesem Fall schneiden beide Ebenen die Kugeloberfläche auf Großkreisen. Die ungleichen Bedingungen bei der Brechung an der Kugeloberfläche für schiefe Strahlen, die in den erwähnten Ebenen verlaufen, führt dazu, daß das Bündel im Bildraum als nicht mehr homozentrisch erscheint und die Strahlen in verschiedenen Ebenen in

Form zweier senkrecht aufeinanderstehender Abschnitte von Geraden abgebildet werden.

Alle oben angeführten Betrachtungen bleiben auch für zwei aufeinanderfolgende Brechungen an zwei sphärischen Oberflächen und damit auch für Linsen gültig.

Wenn man mit Hilfe der Linse ein Kreuz abbildet, so ist offensichtlich, daß jeder der Punkte des Kreuzes im Bildraum ein Bild der Form zweier räumlich getrennter und senkrecht zueinander stehender Abschnitte ergibt. Wenn der vertikale und der horizontale Faden des Kreuzes entsprechend in der meridionalen und der sagittalen Ebene liegen, dann fließen die Strecken, die jeden Punkt des Kreuzes abbilden, in einer deutlichen geraden Linie zusammen. Jedoch wird bei dieser Abbildung der vertikale von dem horizontalen Faden des Kreuzes räumlich getrennt.

Der oben beschriebene Effekt wird in der vorliegenden Aufgabe zur Untersuchung der Größe des Astigmatismus sagittaler und meridionaler Bündel und der gesamten astigmatischen Differenz bei der Fokussierung in Abhängigkeit von dem Einfallswinkel der Strahlen auf die Linse benutzt.

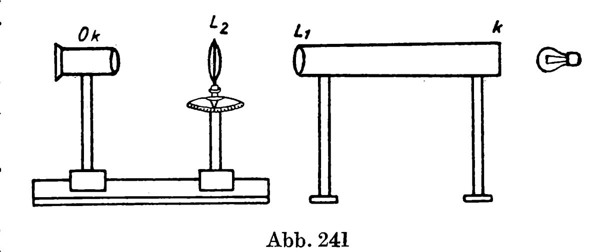


Abb. 241

Die Beschreibung der Anordnung. Die Lichtquelle beleuchtet das in der Brennebene der Kollimatorlinse L_1 liegende Kreuz k (Abb. 241). Die aus der Linse L_1 parallel austretenden Strahlen werden von der zu untersuchenden Linse L_2, die auf einem Tischchen montiert ist, gebrochen. Das reelle Bild des Kreuzes wird mit dem Okularmikrometer *Ok* (siehe Aufgabe 72) betrachtet. Das Okularmikrometer *Ok* läßt sich längs der optischen Achse verschieben und seine Stellung an dem Maßstab ablesen, der längs der optischen Bank angebracht ist.

Die Messung. Man stellt die Linse L_2 senkrecht zu der Kollimatorachse und versucht, durch Verschieben des Okularmikrometers längs der optischen Bank ein scharfes Bild des Kollimatorkreuzes in der Brennebene des Okulars zu erhalten. Man stellt den Kreuzpunkt des Okulars auf die Mitte des Fadenkreuzes ein und schreibt die Stellung des Okularmikrometers auf der optischen Bank (Anfangsstellung) auf.

Man dreht die Linse um eine Reihe nacheinander vergrößerter Winkel und fixiert die entsprechenden Fokussierungsdifferenzen für die meridionalen und die sagittalen Bündel, relativ zur Anfangsstellung.

Die Ergebnisse werden in Form dreier Kurven dargestellt, für die als Abszissenachse die Drehwinkel der Linse, relativ zu den einfallenden Strahlen, und als Ordinatenachse nacheinander die astigmatische Differenz für die meridionalen Bündel, die astigmatische Differenz für die sagittalen Bündel und die gesamte astigmatische Differenz gewählt sind.

Übung 2

Die Untersuchung der chromatischen Aberration von Linsen

Zubehör: 1. Spektrometer, 2. zu untersuchende Linse, 3. Prisma mit fester Ablenkung, 4. Neonlampe.

Die Brennweite einer dünnen Linse f hängt mit dem Brechungsindex n des Linsenmaterials durch die Formel zusammen:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \tag{1}$$

wobei r_1 und r_2 die Radien der die Linse begrenzenden Kugelflächen bedeuten. Andererseits ist n eine Funktion der Wellenlänge λ des von der Linse gebrochenen Lichtes. Für durchsichtige Medien wird die Abhängigkeit der Größe n von λ durch die empirische Formel bestimmt:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \cdots, \tag{2}$$

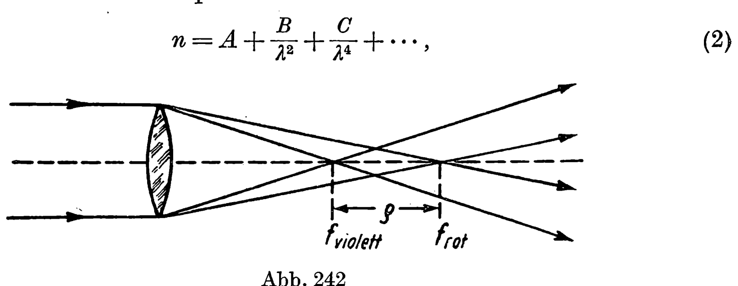


Abb. 242

worin A, B und C für das vorliegende Material charakteristische Konstanten sind. Die graphische Darstellung der Abhängigkeit (2) trägt die Bezeichnung *Dispersionskurve* des vorliegenden Materials.

Hieraus folgt, daß f ebenfalls eine Funktion von λ ist. Deshalb liefert eine dünne Linse für das Bild einer unendlich weit entfernten, nicht monochromatischen, punktförmigen Lichtquelle nicht einen Punkt, sondern eine Reihe von räumlich getrennten Punkten, wobei jeder Punkt das Bild der Lichtquelle für das entsprechende monochromatische Licht darstellt (Abb. 242). Das Bild eines ebenen oder räumlich ausgedehnten Gegenstandes auf einem ebenen Schirm stellt aus dem gleichen Grund bei nicht monochromatischer Lichtquelle die Gesamtheit einer Reihe von Abbildungen dar und ist deshalb mit einem farbigen Rand versehen. Das oben Gesagte gilt auch für dicke Linsen und Linsensysteme.

Der betrachtete Linsenfehler trägt die Bezeichnung *chromatische Aberration*. Als Maß für die chromatische Aberration kann die Differenz zweier Brennweiten einer Linse ($\varrho = f_{\lambda_2} - f_{\lambda_1}$) dienen, die bestimmten Wellenlängen λ_1 und λ_2 des auf die Linse auftreffenden Lichtes entspricht (siehe Abb. 242).

Für dicke Linsen und ebenso für Linsensysteme kann die chromatische Aberration praktisch beseitigt werden durch entsprechende Auswahl der Glassorten, der Dispersionskurven für die Linsen und der Maße der Linsen, die das System bilden.

Die Beschreibung und der Aufbau der Anordnung. Zur Messung der chromatischen Aberration eines Systems dient ein Gerät, das in Abb. 243 schematisch dargestellt ist. (Über die Beschreibung des Spektrometers siehe auch Aufgabe 73.) Das Kollimatorrohr K trägt an dem einen Ende den Spalt S und an dem anderen das achromatische Kollimatorobjektiv L_1. Der Spalt und das Objektiv sind an zwei verschiedenen ineinandergesteckten Rohren befestigt, die sich gegeneinander verschieben lassen. Das Fernrohr M besteht gleichfalls aus zwei Rohren. Eines davon trägt die zu untersuchende Linse L_2 und das andere das Okular O. Auf den drehbaren Prismentisch T wird ein besonderes dispergierendes Prisma P, das sogenannte Prisma mit konstanter Ablenkung[1]) gestellt.

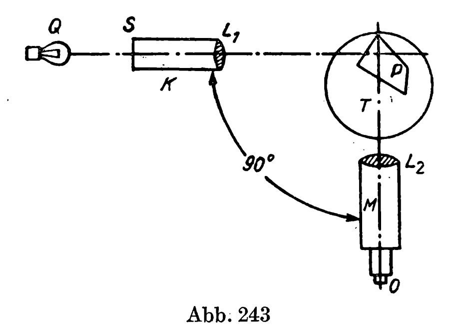


Abb. 243

Dieses Prisma kann man ansehen als die Zusammensetzung zweier 30°-Prismen und eines 45°-Prismas mit totaler innerer Reflexion (Abb. 244). Wenn man den Einfallswinkel i zwischen dem parallelen, nicht monochromatischen Lichtbündel und der brechenden Kante des Prismas a durch Drehen um die senkrecht zu der Zeichenebene gehende Achse ändert, so kann man für jede Wellenlänge einen Einfallswinkel finden, für den das aus der Kante b austretende Lichtbündel senkrecht zum einfallenden Lichtbündel steht. Dabei muß offensichtlich für solche Bündel der Einfallswinkel i gleich dem Ausfallswinkel i' sein. Wir wollen zeigen, für welchen Einfallswinkel diese Bedingung erfüllt ist.

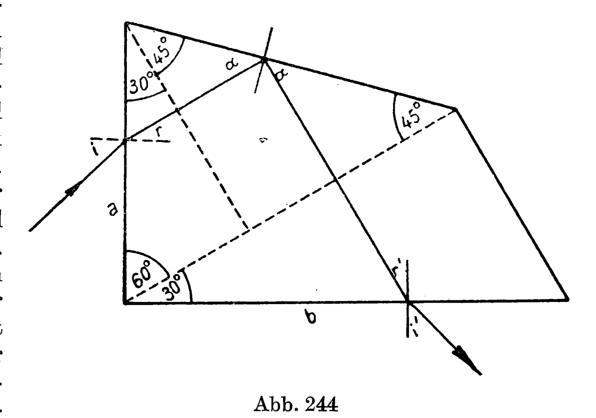


Abb. 244

Bezeichnen wir den Brechungswinkel an der Fläche a mit r, dann ist der Winkel α, den der Strahl mit der reflektierenden Fläche des Prismas bildet, gleich

$$\alpha = 180° - 75° - (90° - r) = 15° + r,$$

und der Winkel r' zwischen dem Strahl und der Normalen der Austrittsfläche ist gleich

$$r' = 180° - 15° - \alpha - 90° = 75° - \alpha,$$

[1]) Anm. d. Übers.: ABBEsches Prisma.

woraus man erhält:

$$r' = 60° - r.$$

Wenn nun r' gleich r sein soll, so müssen wir einen solchen Einfallswinkel i wählen, daß r gleich 30° ist; das ergibt:

$$\sin i = n \sin 30° = \frac{1}{2} n,$$

wobei n den Brechungsindex des Prismas bezeichnet.

Man kann offensichtlich für jede Wellenlänge einen Einfallswinkel finden, der diese Bedingung erfüllt. Dabei verläuft der gebrochene austretende Strahl von bestimmter Wellenlänge genau senkrecht zum einfallenden Strahl. Außerdem breitet sich bei der Erfüllung dieser Bedingung der Strahl innerhalb der 30°-Prismen parallel zu ihrer Basis aus, d. h., er verläuft im Minimum der Ablenkung.

Benutzt man ein solches Prisma, so kann man im festmontierten Fernrohr das gebrochene Bündel jeder beliebigen Wellenlänge einstellen. Das erreicht man durch Drehen des Prismas zusammen mit dem Prismentischchen um eine Achse, die senkrecht zu der Ebene steht, in der der einfallende und der austretende Strahl liegen. Die Anwendung eines üblichen dreikantigen Prismas würde auch die Änderung der Fernrohrstellung erfordern.

Das Licht der Neonlampe Q (Abb. 243) fällt auf den in der Brennebene der Linse L_1 liegenden Spalt S, der die Lichtquelle darstellt. Die mit Hilfe des Kollimators K und des Prismas P, das auf dem Tischchen T steht, erhaltenen parallelen monochromatischen Lichtbündel der Neonlampe fallen auf die zu untersuchende Linse L_2.

Nach der Brechung der Bündel in der Linse L_2 entstehen in Abhängigkeit von dem Drehwinkel des Prismas, relativ zum Kollimator, in dem Brennpunkt der Linse Spaltbilder. Wie schon oben gesagt, ändert sich die Lage des Brennpunktes mit der Wellenlänge des auffallenden Lichtes. Kennt man die Lage des Brennpunktes für eine Reihe von Wellenlängen, so kann man die Kurve der chromatischen Aberration der Linse aufnehmen.

Bevor man an die Messungen herantritt, muß man den Kollimator auf Unendlich einstellen und das Prisma auf dem Tischchen justieren. Das erste führt man mit Hilfe des auf Unendlich eingestellten Fernrohrs durch (siehe Aufgabe 80). Das Prisma ist justiert, wenn die Projektion[1]) seiner Einfallsfläche auf das Kollimatorobjektiv symmetrisch ist zu der Projektion der Austrittsfläche auf das zu untersuchende Linsensystem. Bei solcher Justierung des Prismas erhält man ein Spektralbild größter Helligkeit.

Schließlich muß noch bemerkt werden, daß das oben beschriebene Gerät dem Spektroskop analog ist und sich nur durch die Form des Prismas von ihm unterscheidet. Das im Gerät verwendete Prisma erlaubt es, bei festmontierter Kollimator- und Fernrohrlage durch Drehen des Tischchens das gesamte Spektrum der Neonlampe zu betrachten.

Die Messung. Man dreht das Tischchen mit dem Prisma, stellt nacheinander alle starken Linien des Spektrums der Neonlampe (siehe Tabelle 37) auf das

[1]) Bei der Projektion durch ein paralleles Bündel längs der Kollimator- und der Fernrohrachse.

Fadenkreuz scharf ein und schreibt die diesen Stellungen entsprechenden Brennweiten auf. Die Ablesung der Brennweite erfolgt an einem am Fernrohr angebrachten Nonius.

Die Meßergebnisse werden graphisch dargestellt, wobei auf der Abszissenachse die Wellenlängen und auf der Ordinatenachse die entsprechenden Werte der chromatischen Aberration abgetragen werden.

Aufgabe 72

Die Bestimmung der Vergrößerung eines Fernrohrs und eines Mikroskops

Einführung. Sowohl das Fernrohr als auch das Mikroskop stellen ein optisches System dar, das im wesentlichen aus zwei Sammellinsen besteht, von denen die erste, zum beobachteten Objekt gewandte (Objektiv), ein reelles

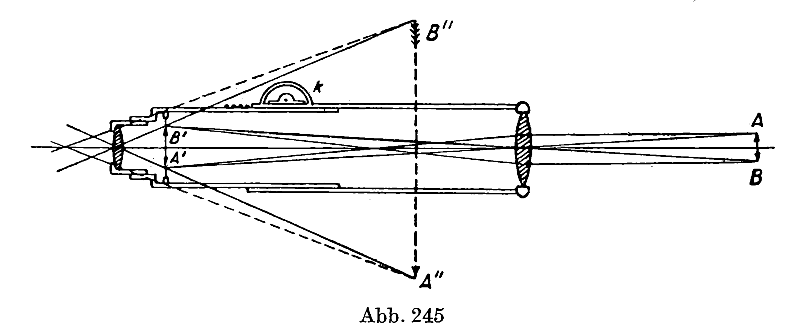


Abb. 245

verkehrtes Bild $A'B'$ des Gegenstandes AB entwirft (Abb. 245). Die Größe dieses Bildes hängt von der Brennweite des Objektivs und von dem Abstand zwischen Objektiv und Gegenstand ab. Die Verschiedenheit dieser letzten Größen bildet im wesentlichen den Unterschied zwischen Fernrohr und Mikroskop.

Das Objektiv des Mikroskops, das zur Betrachtung kleiner nahe gelegener Objekte bestimmt ist, besitzt eine kurze Brennweite, und das Objekt, welches sich in einem etwas größeren Abstand als die Brennweite vom Objektiv befindet, erzeugt deshalb ein stark vergrößertes Bild $A'B'$. Als vordere Linse des Fernrohrs (Objektiv), mit der genügend große und relativ weit entfernte Gegenstände beobachtet werden (Abstand größer als die doppelte Brennweite), nimmt man eine langbrennweitige Linse, mit der man ein verkleinertes Bild $A'B'$ erhält.

Dieses Bild erscheint seinerseits als Gegenstand für die zweite Linse (Okular), die als Lupe dient und ein virtuelles, relativ zu $A'B'$ vergrößertes Bild $A''B''$ im Abstand der deutlichen Sehweite vom Auge des Beobachters entwirft (bei richtiger Fokussierung). Gewöhnlich werden kompliziertere Okulare verwendet, die aus zwei Linsen bestehen; davon wird die dem Auge zugewandte als *Augenlinse* bezeichnet.

Die Fokussierung des Gerätes, d. h. seine Einstellung auf ein scharfes Bild, geschieht entweder durch Veränderung des Abstandes zwischen Objektiv und Okular (Fernrohr) oder durch Verschiebung des gesamten Gerätes, relativ zum Objekt (Mikroskop). Sowohl die eine als auch die andere Verschiebung geschieht häufig mit Hilfe eines Zahntriebes k (Abb. 245). Der Zahntrieb besteht aus einem Zahnrad, das an dem unbeweglichen Teil des Gerätes befestigt ist und das bei seiner Drehung den beweglichen Teil mit Hilfe einer Zahnstange verschiebt.

Mit dem Mikroskop betrachten wir ein im Verhältnis zum Gegenstand stark vergrößertes Bild. Bei dem Fernrohr ist die Vergrößerung unwesentlich, doch dafür erscheint das beobachtete Bild dem Auge bedeutend näher als der Gegenstand. Sowohl im ersten als auch im zweiten Fall ist der Winkel, unter dem das Bild betrachtet wird, größer als der Winkel, unter dem der Gegenstand mit bloßem Auge erscheint. Dieses Verhältnis wird mit *scheinbarer Vergrößerung* oder *Winkelvergrößerung* bezeichnet. Sie ist für eine detaillierte Betrachtung des Objektes notwendig.

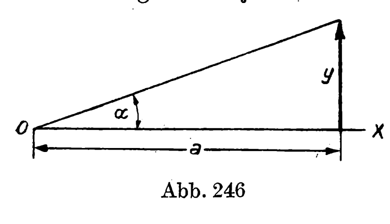


Abb. 246

Mit *Sehwinkel* wird der Winkel α bezeichnet, unter welchem dem im Punkte O befindlichen Auge der Gegenstand y erscheint, der senkrecht zur Achse OX steht (Abb. 246). Die Größe α wird aus der Gleichung $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{a}$ bestimmt, wobei a den Abstand zwischen Gegenstand und Auge bezeichnet. Das Verhältnis des Tangens des Sehwinkels des Gegenstandes selbst zu dem Tangens des Sehwinkels seines Bildes (und für kleine Winkel das Verhältnis dieser Sehwinkel) wird *subjektive Vergrößerung* genannt. Durch sie werden die zur Vergrößerung dienenden Geräte charakterisiert.

Die Anwendung optischer Instrumente für Messungen kann durch verschiedene Methoden verwirklicht werden. Eine davon, die einfachste, besteht darin, daß das zu messende Objekt gleichzeitig mit einer unmittelbar neben dem Gegenstand gelegenen Skala durch das Fernrohr oder durch das Mikroskop betrachtet wird. Dabei läßt sich die Lage des Objektes wegen der gemeinsamen und gleichen Vergrößerung der Skala und des Objektes sehr genau bestimmen. Als Beispiel kann die Ablesung an einem Thermometer mit Hilfe des Mikroskops dienen.

In etwas anderer Form werden sowohl das Fernrohr als auch das Mikroskop selbst als Teile einer Meßanordnung verwendet. In diesem Fall erhalten sie ein Fadenkreuz zur Ablesung. Letzteres besteht aus zwei dünnen senkrecht aufeinander stehenden Fäden, die auf einen Rahmen geklebt und in die Nähe der Brennebene der Augenlinse des Okulars gestellt sind. Durch Verschieben des beweglichen Teils des Gerätes kann das Bild jedes Punktes des Gegenstandes mit dem Kreuzpunkt der Fäden zur Deckung gebracht werden. Diese Verschiebung kann auf einer entsprechenden Skala abgelesen werden, womit man die Möglichkeit erhält, den Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten des Objektes zu bestimmen, wie z. B. beim Kathetometer (siehe Aufgabe 27)

oder den Winkel zwischen den auf sie weisenden Richtungen, wie in verschiedenen winkelmessenden Geräten (siehe Aufgabe 1).

Nicht selten werden das Fernrohr und das Mikroskop zur Messung kleiner Abstände in Verbindung mit einem sogenannten *Okularmikrometer* verwendet. Dieses besteht aus einer Glasplatte, in die eine winzige Teilung eingeritzt ist und die in die gleiche Ebene $A'B'$ gestellt wird. Sie gibt die Möglichkeit, die Größe des reellen Bildes zu messen. Zur Bestimmung der Größe des Objektes selbst muß man den Wert der Teilung λ des Mikrometers kennen, d. h. den Abstand zwischen zwei solchen Punkten des Gegenstandes, die ein Bild von der Breite eines Teilstrichabstands des Mikrometers erzeugen. Diese Größe wird folgendermaßen bestimmt: Das Gerät wird auf eine Skala bekannter Teilung l eingestellt, wobei die Skala genau senkrecht zur Achse des Gerätes stehen muß, und es werden zwei solche Teilstriche des Mikrometers gesucht, die genau mit dem Bild irgendwelcher Skalenteilstriche zusammenfallen. Sind zwischen diesen Teilstrichen n Teilstriche des Mikrometers eingeschlossen und m Skalenteilstriche, dann können wir behaupten, daß

$$n\lambda = ml,$$

und folglich:

$$\lambda = \frac{m}{n} l.$$

Es ist notwendig, zu bemerken, daß der Wert der Mikrometerteilung von dem Abstand zwischen Okular und Objektiv, d. h. von der *optischen Länge des Gerätes,* abhängt, und darum muß der Wert der Teilung jedesmal wieder bestimmt werden.

Benutzt man Geräte, die ein Okularmikrometer besitzen, so muß man, bevor man das Objekt scharf einstellt, durch entsprechende Verschiebung der Augenlinse des Okulars das Mikrometer selbst, das gewöhnlich fest eingebaut ist, scharf einstellen.

Bei einem Schraubenokularmikrometer befindet sich in der Nähe der Brennebene der Augenlinse des Okulars ein kleines Rähmchen mit einem schiefen Fadenkreuz, das im Gesichtsfeld über eine Trommel mit Hilfe einer Mikrometerschraube verschoben werden kann. Eine Trommelumdrehung entspricht gewöhnlich der Verschiebung der Mitte des Fadenkreuzes um 1 mm. Die Trommel ist in 100 Teile eingeteilt; folglich kann man die Verschiebung des Fadenkreuzes bis zu einer Genauigkeit von 0,01 mm ablesen.

Übung 1

Die Bestimmung der Vergrößerung eines Fernrohrs

Zubehör: 1. Fernrohr, 2. Blende, 3. Lupe mit Mikrometer auf einem Stativ, 4. Maßstab an der Wand, 5. Bandmaß.

In dieser Aufgabe wird die Bestimmung der Vergrößerung eines Fernrohrs nach zwei Methoden durchgeführt.

Die Beschreibung der ersten Methode. Wir bezeichnen mit l_0 den Gegenstand, der sich vom Auge O des Beobachters in einer Entfernung d_0 befindet, mit l das Bild des Gegenstandes, das man im Fernrohr sieht und das sich im

Abstand d von O befindet, und mit α_0 und α die entsprechenden Sehwinkel (Abb. 247).

Übereinstimmend mit der Definition der Vergrößerung gilt:

$$D = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha_0} = \frac{l}{d} : \frac{l_0}{d_0} = \frac{l d_0}{l_0 d}.$$

Wir projizieren das Bild l auf die Gegenstandsebene mit Hilfe einer Zentralprojektion mit dem Zentrum im Punkte O, d. h. so, daß alle Punkte des Bildes sich längs der Strahlen verschieben, die die Punkte mit dem Auge des Beobachters verbinden. Das so projizierte Bild besitzt die Größe L. Es ist offensichtlich, daß der Sehwinkel dieser Projektion α bleibt und daß die Projektion selbst den Abstand d_0 vom Auge erhält. In diesem Fall ist die Vergrößerung:

$$D' = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha_0} = D = \frac{L}{l_0}.$$

Wenn der Gegenstand eine Skala ist, deren Teilstrichabstand l_0 beträgt, so erhalten wir durch Projektion ihres Bildes auf die gleiche Skala ein Bild, bei dem der Teilstrichabstand L beträgt, wobei $L > l_0$. Wenn man nun ein solches Stück der Skala auswählt, das n Teilstriche des Gegenstandes und N Teilstriche des Bildes enthält, wobei n und N ganze Zahlen sind, und $n > N$, dann kann man schreiben:

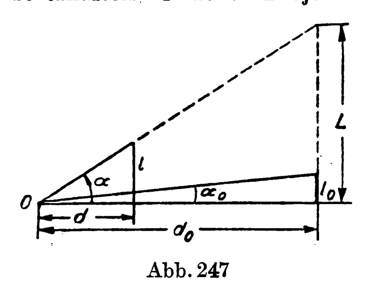


Abb. 247

$$n l_0 = N L;$$

folglich gilt:

$$D = \frac{L}{l_0} = \frac{n}{N}. \tag{1}$$

Wenn der Gegenstand nicht so liegt, wie es Abb. 247 zeigt, sondern die Achse des Gerätes schneidet, dann ändert sich nichts an dem Ausdruck (1). Davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man die entsprechende Konstruktion ausführt.

Die Messung. Man stellt das Fernrohr auf einen Maßstab scharf ein, der einige Meter vom Fernrohr entfernt angebracht ist, schaut mit einem Auge durch das Fernrohr und mit dem anderen unmittelbar auf den Maßstab. Man richtet das Auge dabei so ein, daß das Bild im Fernrohr mit dem von dem unbewaffneten Auge betrachteten Maßstab zusammenfällt und bestimmt die Anzahl n der Teilstriche des Maßstabes, die mit N Teilstrichen seines Bildes zusammenfallen. Die Vergrößerung D wird nach der Formel (1) berechnet.

Die Beschreibung der zweiten Methode. Es ist bekannt, daß zwischen der subjektiven Vergrößerung eines Fernrohrs und der Brennweite seiner Linsen folgende Beziehung besteht:

$$D = \frac{f_1}{f_2},$$

wobei f_1 die Brennweite des Objektivs und f_2 die Brennweite des Okulars bezeichnet. Außerdem kann man, wenn das Fernrohr auf Unendlich eingestellt

ist, die Fernrohrlänge d, d. h. den Abstand zwischen Objektiv und Okular, gleich $f_1 + f_2$ annehmen.

Wenn man, nach Herausdrehen des Objektivs eines auf Unendlich eingestellten Fernrohres, an seine Stelle einen Gegenstand von bestimmter Größe L (Blende mit Ausschnitt) stellt, so erscheint auf der anderen Seite des Okulars in einem bestimmten Abstand b von ihm ein reelles Bild des Gegenstands von der Größe l.

Auf Grund der Formel für die Linsenvergrößerung erhalten wir:

$$L : l = (f_1 + f_2) : b \tag{2}$$

und außerdem

$$\frac{1}{f_1 + f_2} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_2}. \tag{3}$$

Eliminieren wir aus (2) und (3) b, so erhalten wir:

$$\frac{L}{l} = \frac{f_1}{f_2} = D. \tag{4}$$

Die Messung. Man stellt das Fernrohr auf Unendlich ein, d. h. so, daß irgendein weit entfernter Gegenstand scharf erscheint.

Dann dreht man das Objektiv des Fernrohres heraus und setzt an seine Stelle die Blende mit dem Ausschnitt. (Der Ausschnitt hat die Form eines Rhombus.)

Die am Stativ befestigte Lupe wird so eingestellt, daß die Mikrometerskala scharf abgebildet erscheint. Dann wird die Lupe dem Okular des Fernrohres genähert, bis in ihr der Rhombus scharf abgebildet erscheint. Man bestimmt die Anzahl der Teilstriche, die die Diagonalen des Rhombus auf der Mikrometerskala einnehmen. Außerdem mißt man die Länge der Diagonalen des Rhombus unmittelbar auf der Blende.

Wenn die Länge der Diagonalen des Rhombus L_1 und L_2 betragen und die Längen ihrer Bilder auf der Mikrometerskala l_1 und l_2, dann erhält man für die Vergrößerung des Fernrohres:

$$D = \frac{\frac{L_1}{l_1} + \frac{L_2}{l_2}}{2}.$$

Übung 2

Die Bestimmung des Gesichtsfeldes eines Fernrohres

Zur Bestimmung des Gesichtsfeldes des Fernrohres stellt man es auf den Maßstab an der Wand scharf ein und liest ab, wieviel Teilstriche dieses Maßstabes im Fernrohr zu sehen sind. Dann mißt man mit dem Bandmaß den Abstand zwischen Fernrohrobjektiv und Maßstab.

Wenn die erste Größe, die Zahl der Teilstriche des Maßstabes, die im Fernrohr zu sehen sind, gleich n ist, und die zweite Größe, der Abstand zwischen Fernrohr und Maßstab gleich L, dann ergibt sich für das Gesichtsfeld des Fernrohres, ausgedrückt in Graden:

$$a = 57{,}3\,\frac{n}{L}.$$

Übung 3

Die Bestimmung der Vergrößerung des Mikroskops und die Messung der Wachstumsgeschwindigkeit von Kristallen

Zubehör: 1. Mikroskop mit zwei Objektiven und zwei Okularen, 2. Objektmikrometer, 3. geneigter Spiegel auf einer zylindrischen Unterlage, 4. Skala mit Millimeterteilung an einem vertikalen Stativ, 5. Schraubenokularmikrometer, 6. Reagenzgläser mit wäßrigen Lösungen von Kupfersulfat, Dithionit und Kaliumdichromat.

Die Beschreibung der Anordnung. Den Aufbau des Mikroskops einfacheren Typs kann man in zwei Hauptteile einteilen: in den mechanischen und den optischen Teil. Der mechanische Teil (Abb. 248) besteht aus einem Stativ (er wird seinerseits unterteilt in den Fuß A, die Säule B und den Objekttisch C), dem Tubus D und dem Beleuchtungsapparat E, der unter dem Objekttisch angebracht ist.

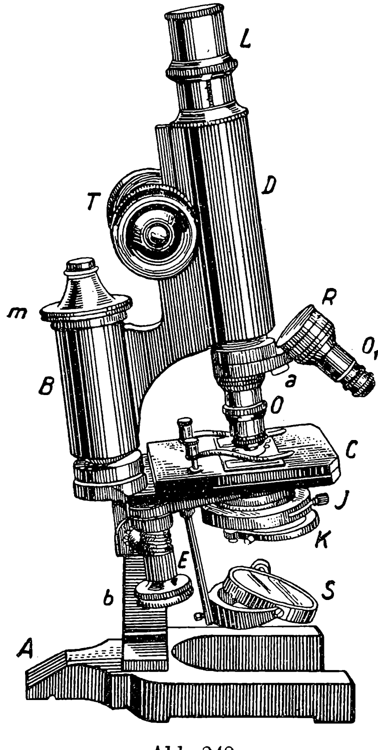


Abb. 248

Das Stativ des Mikroskops besitzt einen massiven Fuß, der ihm die notwendige Standfestigkeit verleiht. Die Säule, die bei den einfacheren Modellen eine unveränderliche senkrechte Lage einnimmt, kann bei komplizierteren und teueren Modellen zur bequemeren Beobachtung geneigt werden.

Der Objekttisch von quadratischer oder runder Form dient als Auflage für das Präparat und besitzt in seiner oberen Fläche zwei Bohrungen, in die Stifte mit Federn gesteckt werden, mit denen das Präparat festgehalten wird, damit es sich während der Beobachtung nicht verschiebt.

Unmittelbar unter dem Tischchen oder auf dem Kondensor ist eine veränderliche Blende angebracht, die zur Regulierung der Helligkeit des beobachteten Bildes dient. Es gibt zwei Typen von Blenden: die Revolverblenden und die Irisblenden. Die einfacheren sind die Revolverblenden. Sie bestehen aus einer Scheibe, in die eine Reihe von Öffnungen verschiedener Durchmesser gebohrt sind. Diese Öffnungen können vor die Öffnung im Mikroskoptisch durch Drehen der Scheibe gebracht werden. Die Irisblenden (siehe Aufgabe 78) bestehen aus Stahlplättchen von besonderer Form, die eine runde Öffnung bilden. Der Durchmesser dieser Öffnung läßt sich durch Drehen der Plättchen mit Hilfe des Hebels I (Abb. 248) kontinuierlich verändern.

Der Tubus mit Objektiv O und Okular L ist in einer Hülse D verschiebbar, und seine Stellung kann an einer Skala abgelesen werden, die an der Seite des oberen Teiles angebracht ist.

Der Tubus im ganzen ist mit der Säule durch einen Schlitten verbunden und kann durch Drehen an der Schraube T eines Zahntriebes verschoben werden. Eine feinere Verschiebung des Tubus, die für eine genaue Fokussierung des Objektes erforderlich ist, erfolgt durch eine zweite Mikrometerschraube m. Die untere Öffnung des Tubus besitzt ein Gewinde zum Einschrauben des Objektivs oder des „Revolvers" R, der eine Halterung für zwei bis vier Objektive darstellt und durch eine Drehung um die Achse a einen schnellen Wechsel der Objektive erlaubt. Damit die Achse des Objektivs stets mit der Mikroskopachse zusammenfällt, ist der Revolver mit einem federnden Stift versehen, der durch Einklinken in einen Schlitz das Objektiv in der benötigten Stellung hält.

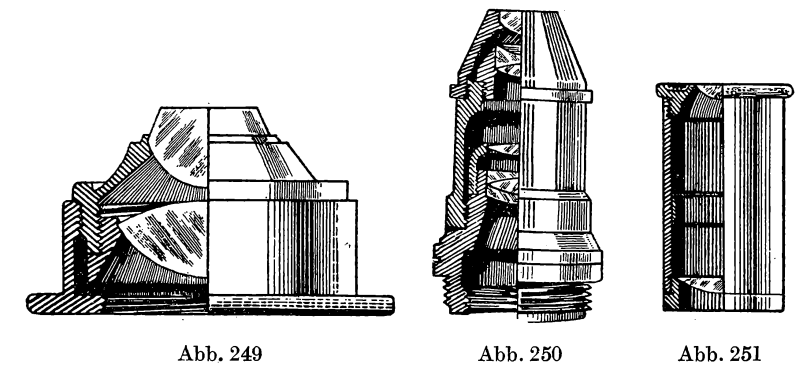


Abb. 249 Abb. 250 Abb. 251

Der optische Teil besteht aus dem Beleuchtungsapparat, der seinerseits aus dem Spiegel S und dem Kondensor K besteht, aus den auswechselbaren Objektiven O und O_1 und aus dem Okular L.

Die Vorrichtung zum Einrichten des Beleuchtungsapparates besteht aus einer gabelförmigen Halterung für den Spiegel, in der dieser um zwei senkrecht zueinander stehende Achsen gedreht werden kann, und einem Zahntrieb oder einer Schraube, durch die der Kondensor längs der Mikroskopachse verschoben werden kann.

Der Spiegel dient zur Umlenkung der Strahlen von der Lichtquelle in die Geräteachse. Er ist gewöhnlich aus Glas gefertigt und besitzt eine ebene und eine gekrümmte Oberfläche. Letztere dient zur verstärkten Konzentration des Lichtes auf das zu beobachtende Objekt, wenn der Kondensor nicht benutzt werden kann, weil er Verzerrungen des Objektbildes hervorruft.

Der Kondensor besteht gewöhnlich aus zwei oder drei Linsen (Abb. 249), mit deren Hilfe das vom Spiegel reflektierte Licht auf dem Objekt als stark konvergentes Bündel konzentriert wird. Für eine besonders deutliche Abbildung ist es notwendig, daß sich das Objekt im Brennpunkt dieses Bündels befindet. Dazu kann der Kondensor nach oben oder nach unten mit Hilfe der schon beschriebenen Vorrichtung verschoben werden.

Das Objektiv (Abb. 250) ist der wichtigste Teil des Mikroskops und stellt ein Linsensystem dar, das sich in einer Fassung befindet. Die vordere, die sogenannte *frontale Linse*, ist die wichtigste und die einzige, die die Vergrößerung hervorruft. Die anderen dienen zur Korrektion der Bildfehler, die durch die frontale Linse hervorgerufen werden und heißen *korrigierende Linsen*. Die Objektive werden in der Reihenfolge numeriert, wie ihre Vergrößerung zunimmt.

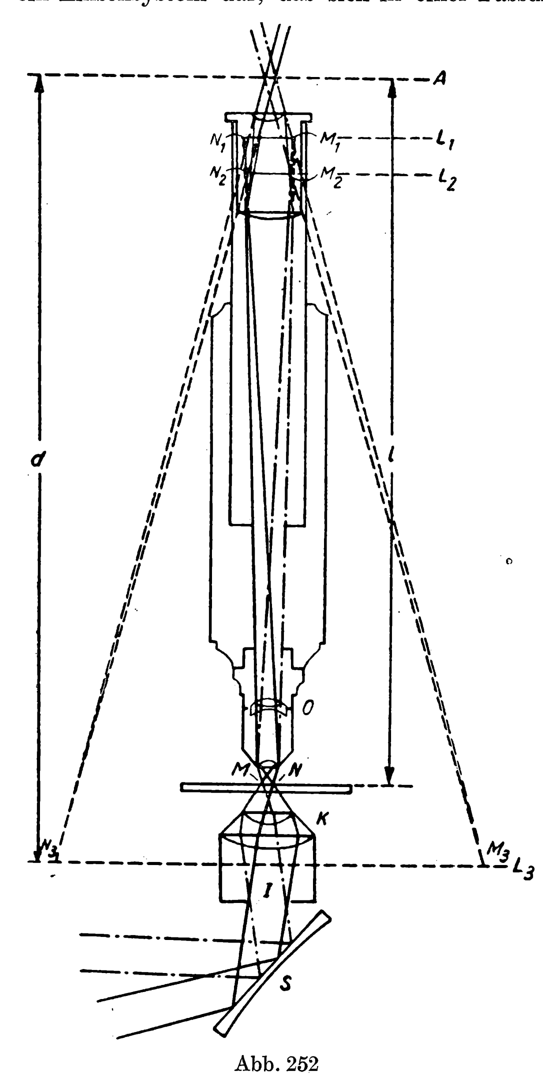


Abb. 252

Das Okular (Abb. 251) ist eine komplizierte Lupe, die gewöhnlich aus zwei Linsen besteht: der oberen *Augenlinse* und der unteren *Sammellinse*. Sie besitzen einen Abstand voneinander, der gleich der halben Summe ihrer Brennweiten ist. Beide Linsen sitzen in einem kurzen zylindrischen Rohr, das in die obere Öffnung des Tubus gesteckt wird. Wie die Objektive, sind auch die Okulare in der Reihenfolge mit wachsender Vergrößerung numeriert.

Die Theorie des Gerätes.

Der Strahlengang (Abb. 252). Die zerstreuten Lichtstrahlen, die von irgendeiner streuenden Lichtquelle (mattierte Lampe) ausgehen, fallen auf den Spiegel *S*, werden von ihm reflektiert und fallen durch die Öffnung der Blende *I* auf den Kondensor *K*. Beim Austritt aus dem Kondensor konvergieren sie stark und fallen auf das Objekt, das sich auf einer planparallelen Platte in etwas weiterer Entfernung als die Brennweite vom Objektiv und gleichzeitig im Brennpunkt des Kondensors befindet. Die durch das Objektiv tretenden Strahlen gehen in einem schwach konvergenten Bündel

bis zum Okular und müßten in der zur Objektivebene konjugierten Ebene L_1 ein vergrößertes verkehrtes, reelles Bild N_1M_1 ergeben. Doch befindet sich auf ihrem Wege die Sammellinse des Okulars, in der die Strahlen gebrochen werden. Die Strahlen erzeugen nun etwas näher zum Objektiv hin in der Ebene L_2 das Bild N_2M_2.

In diese Ebene, deren Lage für das vorliegende Mikroskop durch die Länge des Tubus gegeben ist, wird eine Blende gestellt, die die Randstrahlen abschneidet und damit das Gesichtsfeld begrenzt, d. h. eine *Gesichtsfeldblende* darstellt. Ihre Lage entspricht in den meisten Mikroskopen der Tubuslänge (gleich 160 mm).

Da die Ebene L_2 der Mitte der Augenlinse des Okulars näher liegt als ihre Brennweite, wird die Wirkung dieser Linse auf die Wirkung einer einfachen Lupe zurückgeführt, die die von dem Bild N_2M_2 kommenden Strahlen zwingt, noch mehr auseinanderzulaufen und ein virtuelles (relativ zum Objekt), verkehrtes und noch stärker vergrößertes Bild N_3M_3 in der Ebene L_3 zu erzeugen. Die Lage der Ebene L_3 hängt von der Mikroskopanordnung ab. Gewöhnlich wird diese Ebene durch den Beobachter in den Abstand der deutlichen Sehweite vom Auge gestellt.

Die Mikroskopvergrößerung setzt sich aus den Vergrößerungen des Objektivs und des Okulars zusammen. Wenn man das Objektiv als ein Projektionsgerät ansieht, wird die Größe des Bildes N_1M_1 durch die Formel gegeben:

$$N_1M_1 = \frac{NM\delta}{f_1}, \tag{5}$$

wobei f_1 die Brennweite des Objektivs und δ der Abstand zwischen Bild und Mitte des Objektivs sind.

Die Wirkung der beiden Linsen des Okulars kann man durch die Wirkung einer ihnen äquivalenten Linse mit der Brennweite f_2 ersetzen. Für diese Linse können wir die Formel für die Vergrößerung einer Lupe benutzen:

$$N_3M_3 = N_1M_1\frac{d}{f_2}, \tag{6}$$

wobei d den Abstand der deutlichen Sehweite des Auges darstellt, und man erhält durch Einsetzen der Formel (5)

$$N_3M_3 = NM\frac{\delta d}{f_1 f_2}.$$

Für die lineare Vergrößerung des Mikroskops erhält man:

$$\omega = \frac{N_3M_3}{NM} = \frac{\delta d}{f_1 f_2}. \tag{7}$$

Da das Bild N_1M_1 sehr nahe am Brennpunkt des Okulars liegen muß und die Brennweite des Objektivs sehr klein ist, kann man mit genügender Genauigkeit δ gleich dem Abstand zwischen dem oberen Brennpunkt des Objektivs und dem unteren Brennpunkt des Okulars annehmen. Dieser Abstand wird *optische Länge des Mikroskops* genannt.

Die subjektive Vergrößerung des Mikroskops wird durch die Formel bestimmt:

$$D = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha_0}, \tag{8}$$

wobei α und α_0 die Sehwinkel des Bildes N_3M_3 und des Gegenstandes NM sind. Aus der Abbildung 252 ist klar ersichtlich, daß

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{N_3 M_3}{2d}; \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{NM}{2l},$$

wobei l der Abstand zwischen dem Objektiv und der Ebene A ist, in der sich das Auge des Beobachters befindet. Folglich ist

$$D = \frac{N_3 M_3}{NM} \cdot \frac{l}{d} = \omega \frac{l}{d}. \tag{9}$$

Die Messung. Zur Bestimmung der subjektiven Vergrößerung des Mikroskops ist es nicht nötig, die Größen des Objektes selbst und seines Bildes unmittelbar zu vergleichen, die sich, wie wir gesehen haben, in verschiedenen Abständen vom Auge befinden. Statt dessen genügt es, das Bild mit irgendeinem anderen Gegenstand zu vergleichen, dessen Größenverhältnis zum Objekt uns gut bekannt ist. Dabei muß der Gegenstand in den gleichen Abstand vom Auge gebracht werden, wie das zu vergleichende Bild des Gegenstandes. Die Messung geht folgendermaßen vor sich:

Man stellt die Länge des Tubus so ein, daß sie gleich 160 mm ist, legt auf den Objekttisch das Objektmikrometer (eine Glasplatte mit einer Teilung, bei der der Strichabstand 0,01 mm beträgt) und stellt es im Mikroskop scharf ein.

Seitlich von dem Mikroskop stellt man in dem Abstand der deutlichen Sehweite von seiner Achse (25 cm für ein normales Auge) eine vertikale Skala mit Millimeterteilung auf. Auf das Okular des Mikroskops setzt man einen unter 45° zur Geräteachse geneigten halbdurchlässigen (oder mit einem länglichen Ausschnitt versehenen) Spiegel und stellt das Auge so ein, daß es gleichzeitig das Bild des Mikrometers im Mikroskop und die vertikale Skala beobachten kann. Dabei empfiehlt es sich, zum Ausgleich der Helligkeiten die Blende zu benutzen.

Man zählt die Anzahl der Teilstriche N_1 der Skala, die mit der Anzahl der Teilstriche N_2 des Bildes zusammenfallen. Da das Verhältnis der Teilstrichabstände der Skala und des Mikrometers 100 beträgt, ist

$$D = \frac{N_1}{N_2} \cdot 100. \tag{10}$$

Kennt man D, so kann man aus der Formel (9) leicht die lineare Vergrößerung bestimmen.

Die Messung der Wachstumsgeschwindigkeit von Kristallen. In die obere Öffnung des Tubus wird ein Tropfen einer wäßrigen Lösung von $CuSO_4$, $K_2Cr_2O_7$ oder anderer Salze in eine dünne Schicht verschmiert. Bei der Verdampfung der Lösung scheiden sich aus ihr Kristalle aus. Das Präparat wird auf den Objekttisch gebracht und im Mikroskop scharf eingestellt.

Man stellt das Fadenkreuz des Mikrometers auf eine Kante des Kristalls ein und drückt gleichzeitig auf eine Stoppuhr. Man stoppt die Uhr und notiert die neue Lage der gleichen Kristallkante.

Hat man die Verschiebung der Kante beobachtet und kennt man die Zeit, während der sie vor sich ging, so kann man die Wachstumsgeschwindigkeit des Kristalls in dieser Richtung bestimmen.

Die gleichen Messungen führt man auch für andere Kristallkanten aus.

Die Wachstumsgeschwindigkeit des Kristalls kann man ebenfalls mit Hilfe eines Zeichenapparates bestimmen (siehe Aufgabe 33).

Spezialliteratur

M. Appelt: „Einführung in die mikroskopischen Untersuchungsmethoden". Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, Leipzig 1953.

Aufgabe 73

Die Bestimmung des Brechungsindex, der Dispersion und des Auflösungsvermögens eines Glasprismas mit einem Spektrometer

Zubehör: 1. Spektrometer, 2. Glasprisma, 3. planparallele Glasplatte auf metallischem Stab, 4. Quecksilberlampe, 5. Bunsenbrenner mit Natriumflamme, 6. Lupe, 7. Wasserstoffröhre, 8. Induktionsspule.

Die Beschreibung des Gerätes. Die Spektrometer dienen zur genauen Bestimmung der Ablenkwinkel von Strahlen und werden zur Bestimmung des Brechungsindex oder des Brechungswinkels von Prismen, Kristallen u. dgl. m. benutzt.

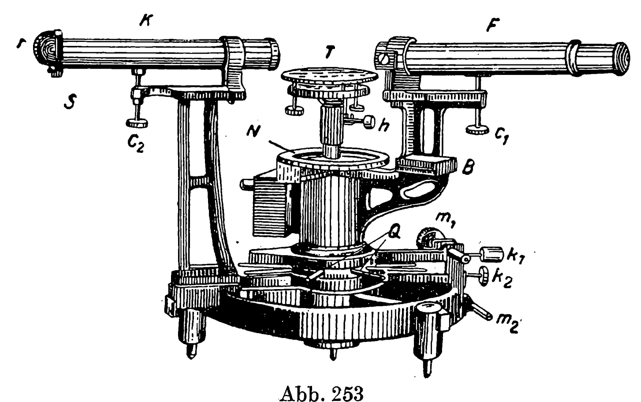


Abb. 253

Das Spektrometer besteht aus einem dreifüßigen Stativ (Abb. 253), auf dem sich um die gemeinsame vertikale Achse ein in Grade eingeteilter Kreis N und das Fernrohr F drehen lassen. Das Fernrohr trägt in seinem Okular

ein Fadenkreuz. An dem gleichen Stativ ist ein anderes Rohr, der Kollimator K, unbeweglich befestigt. Der Kollimator unterscheidet sich von dem Fernrohr dadurch, daß an Stelle des Okulars in ihm ein kurzes, an dem einen Ende einen vertikalen Spalt tragendes Rohr steckt. Der Spalt wird in die Brennebene der Kollimatorlinse eingestellt. Seine Breite läßt sich durch die Schraube r verändern.

Über dem Teilkreis N befindet sich das Tischchen T, das sich um die gemeinsame Geräteachse drehen läßt. Außerdem kann es in dieser Achse nach oben oder unten verschoben und durch die Schraube h in jeder Stellung festgeklemmt werden. Das Tischchen besteht aus zwei Scheiben, die miteinander durch drei Stellschrauben verbunden sind. Damit erhält man die Möglichkeit, die Stellung der oberen Scheibe, relativ zur Achse, zu verändern. Das Licht geht durch den Kollimator, fällt auf die eine Ebene des Prismas, das vorher auf das Tischchen T gestellt wurde, wird in ihm gebrochen und gelangt in das

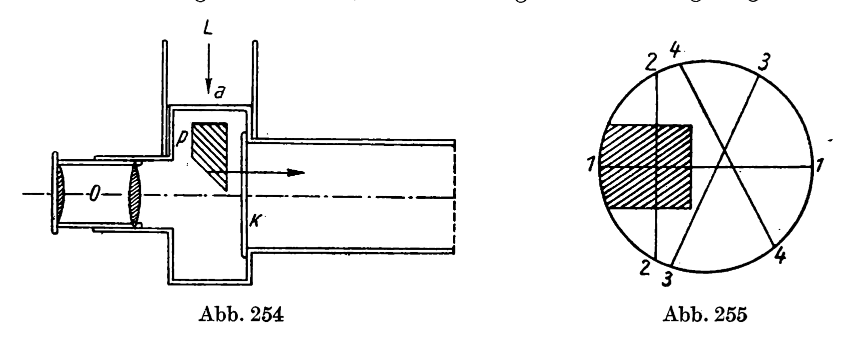


Abb. 254 Abb. 255

Fernrohr. Liest man den Winkel zwischen dem Kollimator und dem Fernrohr am Limbus des Gerätes ab, so kann man den Ablenkwinkel zwischen dem im Prisma gebrochenen Strahl und dem einfallenden Strahl bestimmen.

Das Fernrohr ist mit einem Autokollimationsokular ausgestattet. Letzteres sieht folgendermaßen aus (Abb. 254): In der Nähe der Brennebene des eigentlichen Okulars O, das in den meisten Fällen aus zwei Linsen besteht, wird das Rähmchen K mit vier darübergespannten Fäden gestellt, deren Lage zueinander in Abb. 255 gezeigt wird. Zwischen dem Okular O und dem Rähmchen K ist in dem verbreiterten Teil des Rohres ein Fenster a angebracht, vor das ein kleines total reflektierendes Prisma (Umlenkprisma) p gesetzt ist. Dieses Prisma verdeckt während der Justierung des Gerätes einen Teil des Gesichtsfeldes und damit auch fast den ganzen vertikalen Faden *2* und einen Teil des horizontalen Fadens *1* (Abb. 255). Bei einigen Messungen wird dieses Prisma nicht gebraucht. In diesen Fällen wird es mit Hilfe eines in der Zeichnung nicht angegebenen Hebels aus dem Gesichtsfeld geschwenkt.

Zur Beobachtung der Fäden ist das Okular mit einem seitlichen Rohr L ausgestattet (Abb. 254), in dem eine Glühlampe steckt (3,5 bis 6 V), die von einer Batterie oder über einen Transformator gespeist wird. Das auf das Prisma P fallende Lichtbündel wird in ihm in Achsenrichtung reflektiert und beleuchtet die Fäden *1* und *2*.

Um die Fäden scharf einstellen zu können, kann das eigentliche Okular O von Hand relativ zu den Fäden verschoben werden, und das Okular im ganzen kann relativ zum Objektiv mit Hilfe eines Zahntriebes verschoben werden.

An dem Halterungsarm B (Abb. 253) wird das Fernrohr um die Geräteachse geschwenkt und kann in jeder Stellung durch die Schraube k_1 festgeklemmt werden. Selbst dann kann sie aber noch um kleine Beträge mit Hilfe der Mikrometerschraube m_1 verstellt werden. Genauso kann man den Kreis N durch die Schraube k_2 festklemmen und dann durch die Mikrometerschraube m_2 verstellen. Wenn die Schraube k_2 aber nicht angezogen ist, wird der Kreis an den Hebeln Q gedreht.

Das Fernrohr ist mit zwei diametral angeordneten Nonien fest verbunden, die über die Teilung des Kreises N gleiten. Die Ablesungen werden stets an beiden Nonien durchgeführt, um den Fehler auszuschalten, der durch Exzentrizität entstehen kann.

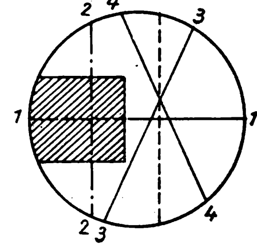


Abb. 256

Die Justierung des Spektrometers. Das Spektrometer erfordert eine sehr sorgfältige Justierung, die im einzelnen aus der Einstellung des Fernrohrs auf Unendlich, aus der Einstellung der Fernrohrachse senkrecht zur Geräteachse und aus der Justierung des Kollimators besteht.

Die Einstellung des Fernrohrs auf Unendlich. Man bringt nach Augenmaß das Tischchen T und das Fernrohr F (Abb. 253) in die horizontale Lage, beleuchtet mit einem Lämpchen durch die seitliche Öffnung das Fadenkreuz und stellt es mit der Okularlinse O (Abb. 254) scharf ein. Auf das Tischchen T setzt man die Halterung mit der planparallelen Glasplatte. Dann dreht man das Tischchen und versucht, durch Veränderung der Neigung des Fernrohrs oder des Tischchens, die Reflexion des den Faden beleuchtenden Lichtbündels von der vorderen Fläche der planparallelen Platte in das Okular zu bekommen. Dieses reflektierte Bündel, das als ein heller verschwommener Punkt erscheint, wird durch Verschieben des Okulars so fokussiert, daß man das Bild des Fadenkreuzes, das von dem horizontalen und dem vertikalen Faden gebildet wird, scharf sieht.

Danach kann man das Fernrohr als auf Unendlich eingestellt annehmen. Denn hierbei fällt die Ebene des Fadenkreuzes mit der seines Bildes zusammen, und das kann nur dann möglich sein, wenn diese beiden Ebenen in der Brennebene des Objektivs liegen.

Die Einstellung der Fernrohrachse senkrecht zur Drehachse des Gerätes. Man dreht das Tischchen und läßt durch die Neigung des Tischchens oder des Fernrohrs das Bild des vertikalen Fadens mit dem Mittelpunkt des schiefen Fadenkreuzes und das Bild des horizontalen Fadens mit dem Faden selbst zusammenfallen (Abb. 256). Dann dreht man den Kreis N um 180°. Hiernach ist im allgemeinen die obige Einstellung nicht mehr vorhanden, und man versucht, sie durch Drehen zweier Schrauben wieder zu erhalten. Mit der Schraube C_1 (Abb. 253) neigt man nach der einen oder der anderen Seite

das Fernrohr, und mit einer der Schrauben des Tischchens T neigt man nach der einen oder der anderen Seite die planparallele Platte. Die erste Schraube wird so weit gedreht, bis das Bild des horizontalen Fadens im Gesichtsfeld sich dem Faden selbst um die Hälfte seiner Anfangsentfernung nähert. Mit der zweiten Schraube bringt man das Bild des horizontalen Fadens mit dem Faden selbst vollends zur Deckung. Man schwenkt das Tischchen erneut um 180°, und wenn dieses Mal die Fadenkreuze nicht völlig zusammenfallen, wird die Einstellung entsprechend geändert. Das Fernrohr steht senkrecht zur Achse, wenn die Reflexion des horizontalen Fadens von der einen oder der anderen Spiegelfläche der Platte mit dem Faden selbst zusammenfällt.

Die Justierung des Kollimators. Der Spalt des Kollimators muß in der Brennebene seines Objektivs stehen, und die Kollimatorachse muß senkrecht zur Drehachse des Gerätes verlaufen. Um den Kollimatorspalt in die Brennebene des Objektivs zu bringen, geht man folgendermaßen vor: Man beleuchtet den Spalt mit einer davorgestellten Lampe und richtet auf den Kollimator das vorher justierte Fernrohr, und zwar so, daß das Bild des Spaltes auf dem Fadenkreuz erscheint. Durch Herein- oder Herausschieben des Rohrstückes mit dem Spalt erreicht man, daß das Spaltbild scharf erscheint und daß es sich beim Verschieben des Auges nach links oder nach rechts nicht vom Fadenkreuz entfernt.

Zur Einstellung der Kollimatorachse senkrecht zur Drehachse des Spektrometers zieht man quer über den Spalt (in seiner Mitte) einen dünnen Draht (wenn das Gerät ihn nicht schon besitzt) und neigt den Kollimator durch die Schraube C_2 (Abb. 253), bis der Draht mit dem horizontalen Faden zusammenfällt. Danach befindet sich der Spalt in der Mitte des Gesichtsfeldes des Fernrohrs.

Bei einigen Spektrometern kann man die untere Hälfte des Spaltes durch ein total reflektierendes Prisma verdecken. In diesem Fall bringt man mit Hilfe der Schraube C_2 den horizontalen Faden mit der oberen Kante des Prismas zur Deckung.

Die Justierung des Prismas. Das Prisma wird auf das Tischchen des Spektrometers gestellt und muß so einjustiert werden, daß seine brechende Kante parallel zur Drehachse des Spektrometers oder, was das gleiche ist, senkrecht zur Fernrohrachse verläuft. Dazu stellt man, nachdem man das Spektrometer sogfältig justiert hat, das Prisma so auf das Tischchen, daß eine seiner brechenden Flächen senkrecht zu der Verbindungslinie zweier Stellschrauben des Tischchens T liegt (Abb. 253). Man schwenkt das Prisma durch Drehen des Tischchens mit dieser Fläche zum Fernrohr, dessen Fadenkreuz beleuchtet ist, und bringt durch Drehen der vorderen oder hinteren Stellschraube oder beider in entgegengesetzten Richtungen den horizontalen Faden und sein Bild zur Deckung, ohne das Fernrohr anzurühren. Dann dreht man (durch Drehen des Kreises N) das Prisma mit der anderen brechenden Fläche zum Fernrohr und justiert sie mit Hilfe der dritten Schraube, die bei der Neigung der zweiten Fläche die erste in ihrer Ebene verschiebt, d. h., das Prisma und das Tischchen um eine Achse dreht, die senkrecht zur ersten Fläche verläuft. Endlich dreht man erneut das Prisma mit der ersten Fläche zum Fernrohr und bringt die Fäden, wenn sie nicht ganz zusammenfallen, erneut zur Deckung. Danach überprüft man die zweite Fläche.

Die Beschreibung der Quecksilberlampe. In den Quarzquecksilberlampen, die als Lichtquellen mit einem Linienspektrum verwendet werden, wird eine Bogenentladung in Quecksilberdämpfen benutzt. Die mit Argon bis zu Drucken von einigen Torr gefüllten Lampen enthalten eine bestimmte Menge Quecksilber, das während des Betriebs vollständig verdampft und den für die vorliegende Lampe vorgeschriebenen Dampfdruck erzeugt. Das Argon dient zur anfänglichen Zündung der Entladung. Die Zündspannung des Argons wird bei dem Vorhandensein geringer Mengen Quecksilberdampfes herabgesetzt, und die Lampe kann unter normalen Bedingungen leicht gezündet werden, wenn man sie an ein Wechselstromnetz von 220 V bzw. 120 V anschließt.

Im Moment des Zündens der Bogenentladung fließt ein Strom von 5 bis 6 A durch die Quecksilberlampe, die Elektroden beginnen zu glühen (sie liefern die zur Entladung notwendigen Elektronen), der Widerstand der Lampe fällt, und entsprechend geht auch der Spannungsabfall an der Lampe fast bis zu 20 V zurück.

Dann erhöht sich die Temperatur der Quecksilberlampe, der Quecksilberdampfdruck steigt, die Spannung an der Lampe beginnt zuzunehmen, der Strom fällt, und das den gesamten Raum innerhalb des Kolbens ausfüllende Leuchten zieht sich auf einen grellen Faden von 2 bis 4 mm Breite längs der Lampenachse zusammen. Nachdem alles Quecksilber verdampft ist, stellt sich ein konstanter Arbeitsbereich der Lampe ein. Die Schaltung der Lampe ist in Abb. 257 dargestellt.

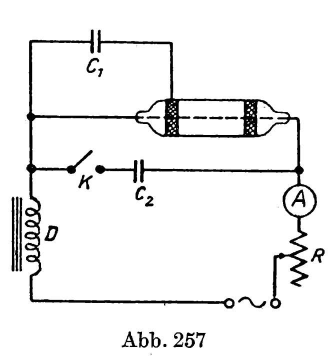


Abb. 257

In der vorliegenden Aufgabe ist C_1 ein Kondensator mit der Kapazität von 300 bis 600 pF, C_2 ein Kondensator mit der Kapazität von 3 bis 6 μF, R ein Vorwiderstand von 6 Ω für die eine Lampe (220 V) und von 11 Ω für die andere Lampe (120 V) und D eine Drossel, deren Induktivität 0,08 Hy beträgt.

Die fallende Widerstandscharakteristik einer Bogenentladung erfordert das Einfügen eines bestimmten Widerstandes in den Kreis der Lampe. Bei dem üblichen Betrieb mit Wechselstrom dient als Widerstand der induktive Widerstand der Drossel D. In diesem Fall erhöht der Zusatzwiderstand die im Kreis verbrauchte Leistung nur wenig und wirkt sich deshalb nur unwesentlich auf die Lichtabgabe der Lampe aus. Nachdem sich ein konstanter Brennbereich der Lampe eingestellt hat, beträgt die Stärke des Stromes, der durch die Lampe fließt, höchstens 4 A $(3{,}75 \pm 0{,}25)$.

Im Moment des Einschaltens der Lampe an das Netz muß der Vorwiderstand R vollkommen herausgenommen sein. Nach dem Schließen des Netzschalters öffnet und schließt man mehrmals den Schalter K (Abb. 257) und gibt damit auf die Elektroden der Lampe so lange erhöhte Spannungsimpulse, bis in ihr der Bogen zündet. Hiernach wird sofort der Vorwiderstand so weit hereingenommen, bis der oben angegebene Brennbereich eingestellt ist. Die Lampe brennt normal in horizontaler Lage. Die zulässigen Neigungen von 15°

dürfen nicht überschritten werden. Es empfiehlt sich, die Lampe nicht in andere Lagen zu bringen, weil dabei die Elektroden überlastet werden können und damit die Lebensdauer der Lampe verkürzt wird.

Eine erneute Zündung ist nur dann möglich, wenn die Lampe sich abgekühlt hat und der Quecksilberdampfdruck so weit abgenommen hat, daß die Zündspannung kleiner geworden ist als die an die Lampe angelegte Netzspannung. Die Abkühlzeit beträgt gewöhnlich nicht mehr als 10 Minuten.

Damit die sich in der Umgebung der Lampe aufhaltenden Studenten keinen „Sonnenbrand" bekommen und um ihre Augen vor der Einwirkung der ultravioletten Strahlung zu schützen, wird die Lampe von einem besonderen Gehäuse umschlossen. Die diese Aufgabe ausführenden Studenten müssen unbedingt eine Schutzbrille tragen.

Übung 1

Die Bestimmung des Brechungsindex eines Glasprismas

Die Messung. Zuerst muß der brechende Winkel des Prismas bestimmt werden. Dazu wendet man folgende Methoden an:

Erste Methode. Man beleuchtet das Fadenkreuz des Okulars, klemmt das Fernrohr durch die Schraube k_1 fest und dreht den Kreis mit dem Prisma so weit, bis das Bild des vertikalen Fadens, das von einer der Prismenflächen reflektiert wird, mit dem Schnittpunkt des schief stehenden Fadenkreuzes zusammenfällt (Abb. 256). In dieser Stellung wird der Kreis N (Abb. 253) festgeklemmt und die Stellung des Prismas an beiden Nonien abgelesen. Die Ablesung an dem einen Nonius ergibt $a°$. Durch Drehen am Kreis N stellen wir das Prisma mit der anderen Fläche zum Fernrohr. Diese Stellung wird wieder festgehalten. Die Ablesung am gleichen Nonius ergibt $b°$.

Wenn die Zahlen an den Teilstrichen des Limbus von a nach b abnehmen, dann ist der gemessene Winkel α gleich

$$\alpha = 180 - (a - b). \tag{1}$$

Das ist aus Abb. 258 ersichtlich, in der die Bewegung, der Einfachheit halber, umgekehrt dargestellt ist, d. h., in der das Tischchen T mit dem Prisma feststeht und das Fernrohr um das Prisma gedreht wird.

Wenn jedoch zwischen der Stellung a und der Stellung b des Fernrohrs der Nullpunkt des Limbus liegt (Abb. 259), dann gilt:

$$\alpha = 180 - [a + (360 - b)] = b - (180 + a). \tag{1'}$$

Man berechnet den brechenden Winkel des Prismas aus den Ablesungen von beiden Nonien und bildet aus den beiden erhaltenen Werten für den brechenden Winkel den arithmetischen Mittelwert.

Zweite Methode. Man beleuchtet den Kollimatorspalt und dreht das Prisma so, daß die aus dem Kollimator auf eine seiner Flächen fallenden Strahlen mit dieser Fläche einen Winkel von ungefähr 45° bilden. Man klemmt den Kreis N fest und dreht das Fernrohr, bis in ihm das von dem Prisma reflektierte Bild des Kollimatorspaltes erscheint. Man bringt dieses Bild mit dem Fadenkreuz zur Deckung, klemmt das Fernrohr fest und liest an den

Nonien ab. Dann dreht man das Prisma mit der zweiten Fläche in die gleiche Stellung, stellt das Fadenkreuz auf das Bild des Spaltes ein und liest erneut ab. Der brechende Winkel wird wieder nach den Formeln (1) und (1′) berechnet.

Man mißt nach beiden Methoden mehrmals den brechenden Winkel des Prismas und bildet aus allen Ergebnissen den arithmetischen Mittelwert.

Nachdem man den brechenden Winkel gemessen hat, beginnt man mit *der Bestimmung des Brechungsindex.*

1. Man stellt die Quecksilberlampe vor den Kollimatorspalt, zündet sie und dreht das Tischchen so, daß die Winkelhalbierende des brechenden Winkels des Prismas mit der Kollimatorachse einen spitzen, aber fast rechten Winkel bildet. Dabei möge die Prismenbasis rechts vom Beobachter liegen.

2. Man klemmt den Kreis fest und dreht das Fernrohr nach rechts (zur Prismenbasis) so weit, bis die grüne Linie des Quecksilbers ($\lambda = 5460$ Å) im Gesichtsfeld des Fernrohrs erscheint. Man stellt auf sie das Fadenkreuz ein,

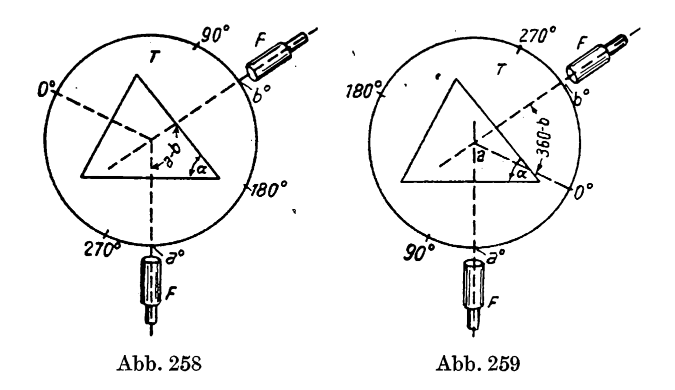


Abb. 258 Abb. 259

löst den Kreis N, dreht ihn mit dem Prisma nach der einen oder der anderen Seite und beobachtet, in welcher Richtung sich die Linie bewegt, d. h., ob die Ablenkung zu- oder abnimmt. Das Prisma muß so gedreht werden, daß die Spektrallinie sich der Richtung des nicht abgelenkten Strahles nähert. Dabei kann es vorkommen, daß die Linie aus dem Gesichtsfeld des Fernrohrs verschwindet. In diesem Fall dreht man das Prisma weiter, löst aber das Fernrohr und verfolgt damit die Linie. Hat die Linie einen bestimmten Weg durchlaufen, so bleibt sie stehen und beginnt dann zurückzukehren. In dieser Stellung ist das Prisma auf *den Winkel der minimalen Ablenkung* für die grüne Quecksilberlinie eingestellt. Der Kreis wird festgeklemmt und durch Drehen des Fernrohrs die Linie mit dem Fadenkreuz zur Deckung gebracht. Danach klemmt man das Fernrohr fest und versucht wieder, durch Drehen des Prismas sich davon zu überzeugen, daß der eingestellte Winkel dem Minimum der Ablenkung entspricht. Wenn es sich erweist, daß bei der Drehung die Linie sich etwas von dem Fadenkreuz in Richtung eines kleineren Ablenkungswinkels entfernt, so stellt man genauer auf das Minimum der Ablenkung ein, klemmt das Prisma fest und bringt das Fadenkreuz mit der Linie wieder zur Deckung.

3. Hat man den Kreis N endgültig festgeklemmt, so liest man an den Nonien ab. Dann läßt man den Kreis fest stehen, nimmt das Prisma vom Tischchen herunter und dreht das Rohr so, daß in ihm das Bild des Kollimatorspaltes erscheint. Man bringt das Bild mit dem Fadenkreuz zur Deckung und liest erneut ab. Die Differenz dieser beiden Ablesungen bestimmt den Winkel der minimalen Ablenkung δ_1 für die vorgegebene Spektrallinie. Wenn die Höhe des Prismas eine Ablesung der Richtung des nicht abgelenkten Strahles ermöglicht, so wird das Prisma nicht von dem Tischchen T heruntergenommen.

4. Man stellt das Prisma wieder auf das Tischchen, dreht den Kreis N mit dem Prisma in die zur vorherigen symmetrische Stellung, d. h. die Prismenbasis jetzt links vom Beobachter, klemmt den Kreis fest und wiederholt die Messung.

Damit erhält man zwei Werte für den Winkel der minimalen Ablenkung: rechts δ_1 und links δ_2. Aus diesen Werten bildet man den Mittelwert.

Die Ausrechnung. Der Brechungsindex n wird für eine vorgegebene Wellenlänge aus dem brechenden Winkel α des Prismas und dem Winkel δ der minimalen Ablenkung der Strahlen dieser Wellenlänge nach der Formel bestimmt:

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha + \delta)}{\sin \frac{1}{2} \alpha}.$$

Übung 2

Die Bestimmung der Dispersion eines Glasprismas

Bekanntlich ist der Brechungsindex eines Stoffes eine Funktion der Lichtwellenlänge. Infolgedessen wird jede Brechung eines zusammengesetzten Strahlenbündels von einer Zerlegung oder *Dispersion* der Strahlen begleitet. Als Maß für die Dispersion verwendet man gewöhnlich entweder die mittlere Dispersion

$$n_F - n_C \tag{2}$$

oder die relative Dispersion

$$\frac{n_F - n_C}{n_D - 1}, \tag{2'}$$

wobei n_C, n_D und n_F die Brechungsindizes der entsprechenden FRAUNHOFERschen Linien C, D und F sind.

Manchmal wird auch eine zur relativen Dispersion rezipr ke Größe verwendet, der sogenannte *Dispersionskoeffizient*:

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}. \tag{3}$$

Die Messung. Man stellt das Prisma auf das Spektrometertischchen unter Benutzung der Hinweise, die in Übung 1 gegeben wurden, setzt eine Natriumflamme vor den Kollimatorspalt und bestimmt den Brechungsindex n_D für die Natriumlinie $\lambda = 5893$ Å.

Dann bringt man eine Wasserstoffröhre[1]) in vertikaler Lage vor den Kollimatorspalt und verbindet einerseits die Sekundärwicklung der Induktionsspule mit den Elektroden der Röhre und andererseits die Primärwicklung mit der Akkumulatorbatterie. Durch einen Schalter schließt man den Stromkreis und reguliert die Tätigkeit des mechanischen Unterbrechers so ein, daß die Röhre besonders hell leuchtet.

Man bestimmt die Winkel der minimalen Ablenkung für die rote (C) und die blaue (F) Linie des Wasserstoffspektrums, berechnet die entsprechenden Werte für den Brechungsindex n_C und n_F und bestimmt aus den Formeln (2), (2′) und (3) die Dispersion des Glases, aus dem das Prisma gefertigt ist.

Übung 3

Die Bestimmung des Auflösungsvermögens eines Prismas

Die Reinheit des Spektrums hängt von der Breite der Lichtbündel ab, die das Prisma durchsetzen. Da diese Bündel in ihren Ausmaßen begrenzt sind, tritt Beugung auf, die das monochromatische Bild des Spaltes verbreitert, so daß in der Brennebene des Fernrohrs anstatt schmaler einzelner Linsen mehr oder weniger sich überlappende Streifen zu beobachten sind.

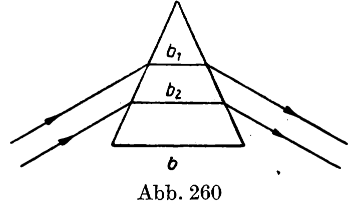


Abb. 260

Ein genaues Maß der Reinheit eines von dem Gerät gelieferten Spektrums ist das *Auflösungsvermögen des Gerätes*:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda};$$

darin ist λ die mittlere Wellenlänge zweier, vom Gerät gerade noch aufgelöster Spektrallinien und $\Delta\lambda$ die Differenz ihrer Wellenlängen.

Das Auflösungsvermögen eines Prismas ist für ein das ganze Prisma ausleuchtendes Lichtbündel

$$R = b\frac{dn}{d\lambda}, \tag{4}$$

wobei b die Prismenbasis, längs der das Licht verläuft (Abb. 260), und n den Brechungsindex für die entsprechende Wellenlänge λ bedeuten. n wird mit genügender Genauigkeit durch die zwei ersten Glieder der Formel

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \cdots \tag{5}$$

dargestellt. (A, B und C sind empirische Konstanten, die den Stoff charakterisieren.) Hieraus erhält man:

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}. \tag{6}$$

Die Messung. Man stellt auf das Spektrometertischchen ein Prisma aus Flintglas und schaltet die Quecksilberlampe ein. Dann bestimmt man die

[1]) Anm. d. Übers.: GEISSLERsches Rohr, gefüllt mit Wasserstoff.

Brechungsindizes n_1 und n_2 für die beiden gelben Linien des Quecksilberspektrums und liest aus der Tabelle ihre Wellenlängen λ_1 und λ_2 ab. Man setzt diese Werte in die Formel (5) ein (dabei benutzt man nur ihre ersten Glieder), findet B und bestimmt aus der Formel (6) $\frac{dn}{d\lambda}$. Man mißt die Länge der Prismenbasis b und errechnet nach der Formel (4) das Auflösungsvermögen des Prismas. Wenn das Lichtbündel nicht das ganze Prisma ausleuchtet (Abb. 260), so wird sein Auflösungsvermögen nach der Formel berechnet:

$$R = (b_2 - b_1) \frac{dn}{d\lambda}.$$

Aufgabe 74

Die Bestimmung des Brechungsindex flüssiger und fester Körper mit dem Refraktometer

Zubehör: 1. Refraktometer, 2. rechtwinkliges Prisma, 3. Lichtquelle (Natriumflamme oder Wasserstoffröhre), 4. zu untersuchende Flüssigkeit und Glaswürfel.

Das Refraktometer, wie es in dieser Aufgabe verwendet wird, dient zur Bestimmung des Brechungsindex von durchsichtigen flüssigen und festen Körpern. Die Methode beruht auf der Messung der Winkel φ der aus einem rechtwinkligen Prisma austretenden Strahlen (Abb. 261), wenn in die obere Prismenfläche ein monochromatisches Lichtbündel streifend einfällt.

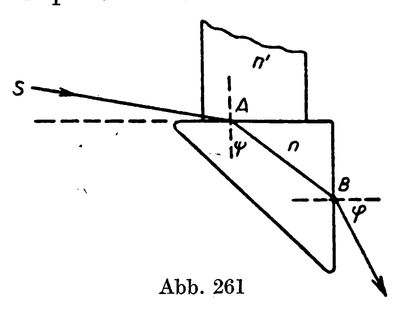


Abb. 261

Wenn der Brechungsindex n' des zu untersuchenden Stoffes kleiner ist als der Brechungsindex n des Prismas, dann kann man nach dem Brechungsgesetz für den streifenden Einfall eines Strahles im Punkte A schreiben:

$$n' = n \sin \psi, \tag{1}$$

wobei ψ den Grenzwinkel der Totalreflexion bezeichnet. Für denselben Strahl im Punkte B gilt:

$$n \sin (90° - \psi) = \sin \varphi$$

oder

$$n \cos \psi = \sin \varphi, \tag{2}$$

wobei φ den Winkel zwischen dem aus dem Prisma austretenden Strahl und der Normalen der vertikalen Fläche des Prismas bezeichnet. Auf Grund von (1) und (2) erhalten wir:

$$n' = \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}. \tag{3}$$

Kennt man also den Brechungsindex des Prismas und den Winkel φ, so kann man aus der Beziehung (3) den Brechungsindex n' des zu untersuchenden Stoffes berechnen.

Die Beschreibung der Anordnung. Der wesentlichste Teil des Gerätes ist das rechtwinklige Prisma aus schwerem Flintglas, dessen Brechungsindex n genau bekannt ist. Das Prisma ist in einer besonderen Halterung an dem Tischchen *1* des Gerätes befestigt (Abb. 262). Bei den Messungen wird auf die horizontale Fläche des Prismas die zu untersuchende Flüssigkeit oder der Würfel aus dem zu untersuchenden festen Stoff gebracht.

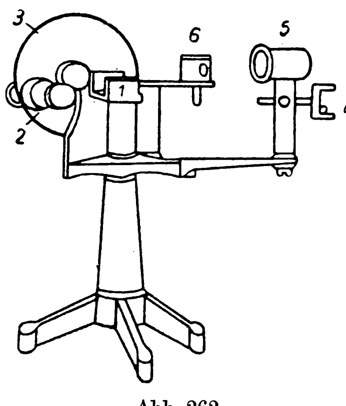


Abb. 262

Die gebrochenen Strahlen werden durch das Fernrohr *2* (Abb. 262) beobachtet, das am Rande eines vertikalen Teilkreises befestigt ist. Der Teilkreis ist um eine horizontale Achse drehbar angebracht und sowohl mit einem Nonius (mit Minutenteilung) als auch mit einer Mikrometerschraube und Ablesetrommel versehen. Damit lassen sich kleine Winkel mit einer Genauigkeit bis zu 0,1′ messen. Das Fernrohr besitzt ein Autokollimationsokular mit schrägem Fadenkreuz (siehe Aufgabe 73). Der Strahlengang ist in Abb. 263 wiedergegeben.

In der Brennebene des Fernrohrobjektivs ist ein schräges Fadenkreuz K aufgespannt, dessen Zentrum mit der optischen Achse des Fernrohrs zusammenfällt. Zwischen dem Okular Ok und dem Fadenkreuz liegt ein total reflektierendes Prisma P, das den rechten Teil des Fadenkreuzes verdeckt. Die von der Lichtquelle L kommenden Strahlen werden vom Prisma P reflektiert, beleuchten den rechten Teil des Fadenkreuzes, gehen durch das Objektiv Ob und bilden diesen Teil des Fadenkreuzes auf dem Spiegel S' ab, der unter 45° zur optischen Achse aufgestellt ist. Vom Spiegel werden die Strahlen reflektiert und fallen auf die reflektierende Fläche des rechteckigen Prismas P_1. Die vom Prisma P_1 zurückgeworfenen Strahlen lassen ein Bild des rechten Teiles des Fadenkreuzes in der linken Hälfte des Gesichtsfeldes entstehen. Wenn dabei die Normale der reflektierenden Fläche senkrecht zur optischen Achse des Fernrohrs steht, muß das Bild mit den Fäden selbst zusammenfallen.

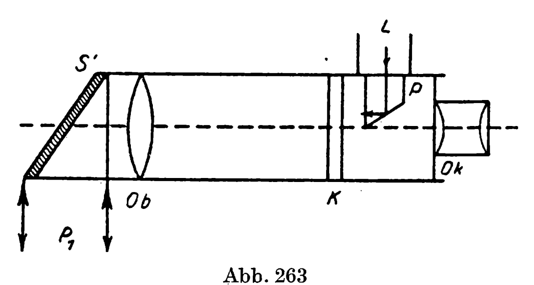


Abb. 263

Als Lichtquelle kann bei der Arbeit mit dem Refraktometer eine Wasserstoffröhre oder eine Natriumflamme dienen. Die Wasserstoffröhre wird an dem Gerät mit Hilfe der Klemme *4* (Abb. 262) befestigt. Der Kondensor *5* dient dabei zur Fokussierung des von der Wasserstoffröhre emittierten Lichtes.

Die Lichtquelle wird in gleiche Höhe mit der Grenzfläche zwischen dem zu untersuchenden Stoff und dem rechtwinkligen Prisma gebracht. Deshalb fallen die an der Grenze zweier Medien gebrochenen Strahlen auf den zu untersuchenden Stoff streifend auf.

Dabei muß der Brechungsindex des zu untersuchenden Stoffes kleiner sein als der Brechungsindex des rechtwinkligen Prismas, weil sonst alle Strahlen total reflektiert werden und nicht in das rechtwinklige Prisma eintreten können.

Beim Arbeiten mit der Natriumflamme verwendet man das Reflexionsprisma *6* (Abb. 262), mit dem die Strahlen in die benötigte Richtung gelenkt werden.

Für die Untersuchung flüssiger Medien wird auf dem Prisma ein zylindrisches Glasgefäß befestigt, in das die Flüssigkeiten gegossen werden. Um den Brechungsindex fester Körper zu bestimmen, wird aus dem zu untersuchenden Stoff ein Würfel mit gut polierten und genau senkrecht aufeinanderstehenden Flächen gefertigt. Und um einen optischen Kontakt zu erhalten, wird zwischen die Prismenfläche und den zu untersuchenden Stoff eine Flüssigkeit getropft, deren Brechungsindex größer ist als der Brechungsindex des zu untersuchenden Stoffes und kleiner als der Brechungsindex des Prismas.

Die Flüssigkeitsschicht wirkt wie eine planparallele Platte, und deshalb ändert sich nichts an der Endformel für die Bestimmung des Brechungsindex des zu untersuchenden Stoffes.

Zur Vereinfachung der Berechnung des Brechungsindex werden dem Gerät Tabellen beigegeben, denen man für jedes rechtwinklige Prisma aus dem gefundenen Winkel φ unmittelbar den gesuchten Brechungsindex entnehmen kann. Die Genauigkeit der Bestimmung des Brechungsindex n' hängt von der Genauigkeit der Bestimmung des Brechungsindex n des rechtwinkligen Prismas und von der Genauigkeit der Messung des Winkels φ ab. Das in dieser Aufgabe verwendete Refraktometer erlaubt es, den Brechungsindex mit einer Genauigkeit bis zu $1 \cdot 10^{-4}$ zu bestimmen.

Übung 1

Die Bestimmung des Brechungsindex von Flüssigkeiten

Auf die horizontal stehende Fläche des rechtwinkligen Prismas wird mit Kanadabalsam ein rechteckiges Glasrohr vertikal aufgekittet, in das die zu untersuchende Flüssigkeit gegossen wird. Die Flüssigkeit darf keine Blasen enthalten, und die Oberfläche des Prismas muß gut benetzt sein. Wenn die Flüssigkeit die Prismenfläche nur ungenügend benetzt, muß die Fläche mit Azeton gewaschen und mit Sämischleder oder einem sauberen Leinenläppchen abgerieben werden.

Die Messung. 1. Man bestimmt die Lage der Normalen zu der reflektierenden vertikalen Prismenfläche. Dazu stellt man das rechtwinklige Prisma auf das Tischchen des Gerätes und bringt dann das Fadenkreuz des Fernrohrs mit seinem Bild zur Deckung, das von der betrachteten Prismenfläche reflektiert wird. Dabei wird das Zusammenfallen zuerst grob durch Drehen des Fernrohrs von Hand eingestellt. Dann wird das Fernrohr festgeklemmt, und nun werden mit der Mikrometerschraube das Fadenkreuz und sein Bild genau

zur Deckung gebracht. Man liest die Skalenteile am Teilkreis und an der Trommel ab.

Anmerkung. Wenn es nicht gelingt, das Fadenkreuz und sein Bild zur Deckung zu bringen, so versucht man, eine symmetrische Lage des Bildes zum Fadenkreuz einzustellen (Abb. 264).

2. Man stellt die Lichtquelle so auf, daß in die Flüssigkeit ein streifendes Lichtbündel fällt. Dann dreht man das Fernrohr um die horizontale Achse, bis die gebrochenen Strahlen in seinem Gesichtsfeld als heller Streifen erscheinen. Man stellt die Mitte des Fadenkreuzes auf die obere Grenze des Streifens ein (das entspricht einem Einfallswinkel der Strahlen von 90°), klemmt das Fernrohr fest und liest die Werte am Teilkreis und an der Trommel ab.

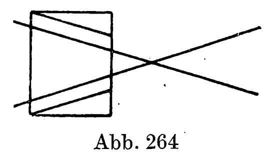


Abb. 264

Die Differenz der Ablesungen in der ersten und der zweiten Lage des Fernrohrs ergibt den Winkel φ. Kennt man φ, so kann man aus der Tabelle den Brechungsindex n' bestimmen.

Übung 2

Die Bestimmung des Brechungsindex von Glas

Bei der Ausführung dieser Übung werden gut polierte Glaswürfel mit genau rechten Winkeln zwischen den Flächen verwendet. Mit einem Glasstäbchen tropft man auf die eine Würfelfläche α-Monobromnaphthalin ($C_{10}H_7Br$), setzt den Würfel mit dieser Fläche auf die horizontal stehende Prismenfläche und drückt ihn fest an.

Die Reihenfolge der Messung ist die gleiche wie auch in der Übung 1.

Übung 3

Die Messung der Dispersion eines Glasprismas

Das zu untersuchende Prisma wird auf die Oberfläche des rechtwinkligen Prismas genauso gestellt wie in Übung 2. Auch hierbei tropft man zwischen die Prismen α-Monobromnaphthalin.

Zur Messung der Dispersion stellt man vor den Kondensor *5* (Abb. 262) eine Wasserstoffröhre. Rechts von dem Gerät (in etwa 30 bis 40 cm Abstand) stellt man eine Natriumflamme auf und wirft mit Hilfe des Prismas *6* ein Lichtbündel der Natriumflamme auf die Grundfläche des zu untersuchenden Prismas. Man dreht den Teilkreis, bis die Natriumlinie im Gesichtsfeld des Fernrohres erscheint und klemmt dann den Teilkreis fest. Danach stellt man mit Hilfe der Mikrometerschraube das Fadenkreuz auf den oberen Rand der Natriumlinie ein und liest am vertikal stehenden Teilkreis ab.

Die Ablesung wird mehrmals wiederholt und der Mittelwert des Winkels gebildet. Dann wird das Prisma *6* zur Seite gedreht, die Wasserstoffröhre „gezündet“ und von ihr ein Lichtbündel auf die Grundfläche des Prismas geworfen. Man führt die gleichen Messungen für die Linien des Wasserstoffspektrums aus (C — rote Linie des Wasserstoffs $\lambda = 6563$ Å, F — blaue Linie $\lambda = 4861$ Å).

Aus mehreren Ablesungen für jeden der Winkel φ werden die Mittelwerte genommen und eine Nullpunktskorrektion angebracht.

Aus den erhaltenen Werten für den Winkel φ sucht man aus einer besonderen dem Gerät beigegebenen Tabelle die dem Winkel φ entsprechenden Werte der Brechungsindizes n_D (für die Natriumlinie), n_C und n_F (für die Wasserstofflinien) heraus. Kennt man diese Größen, so kann man die mittlere und die relative Dispersion der untersuchten Prismen berechnen (siehe Aufgabe 73).

Besitzt man besondere Tabellen, so kann man die Dispersion aus den Ablesungen der Mikrometerschraube berechnen. In diesem Fall liegt die Genauigkeitsgrenze bei $\pm 2 \cdot 10^{-5}$.

Aufgabe 75

Die Bestimmung des Diffusionskoeffizienten nach einer optischen Methode[1])

Zubehör: 1. Kollimator und Fernrohr auf einer optischen Bank, 2. Pipette mit einer lang ausgezogenen Spitze, 3. 20%ige Salzlösung, 4. in Millimeter geteilter Maßstab, 5. Lichtfilter.

Die Methode und die Theorie. Wenn man in ein planparalleles Gefäß die Flüssigkeit *1* mit dem Brechungsindex n_1 gießt und darüber eine leichtere Flüssigkeit *2* mit dem Brechungsindex n_2 schichtet, so verschwimmt die anfänglich scharfe Grenze mit der Zeit infolge Diffusion. Damit verändert sich auch das Gesetz, nach welchem sich der Brechungsindex n mit der Höhe x vom Wert n_1 unten bis zum Wert n_2 oben ändert. Es ist völlig klar, daß die Flüssigkeitsschicht mit dem veränderlichen Brechungsindex die auf ihn senkrecht auffallenden parallelen Strahlen verschieden stark ablenkt. Wie weiter unten gezeigt wird, werden die Strahlen am stärksten abgelenkt, die an der Stelle des maximalen Gradienten des Brechungsindex $\frac{dn}{dx}$ durch die Flüssigkeit gehen. Umgekehrt gehen an den Stellen (oben und unten) mit $\frac{dn}{dx} \approx 0$ die Strahlen praktisch ohne Ablenkung durch die Flüssigkeit (Abb. 265).

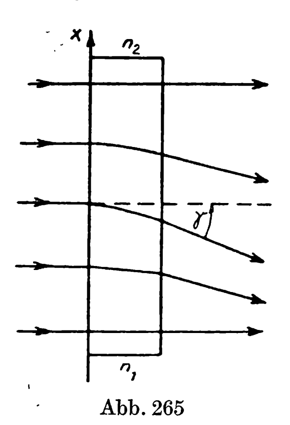


Abb. 265

Je nach dem Diffusionsgang ändert sich der maximale Gradient des Brechungsindex und damit auch der Winkel der Ablenkung (Winkel γ) der Strahlen. Die Messung von γ für bestimmte Zeitmomente erlaubt es, den *Diffusionskoeffizienten* zu bestimmen.

---

[1]) Anm. d. Übers.: nach O. WIENER.

Wir wollen die Krümmung und die Ablenkung des Strahles bei seinem Durchgang durch eine Schicht mit veränderlichem Brechungsindex betrachten. Wir nehmen an, daß A und A' zwei benachbarte Punkte der Wellenfläche der senkrecht auffallenden ebenen Welle sind (Abb. 266). Um die Wellenfläche nach der Zeit Δt zu finden, muß man die Umhüllende der elementaren Kugelwellen konstruieren. Da die Lichtgeschwindigkeit im Punkte A gleich $\frac{c}{n}$ und im Punkte A' gleich $\frac{c}{n+\Delta n}$ ist, so beträgt nach der Zeit Δt der Radius der Elementarwelle, die vom Punkt A ausgeht,

$$AB = \frac{c\Delta t}{n}$$

und der Radius der Elementarwelle, die vom Punkt A' ausgeht,

$$A'B' = \frac{c\Delta t}{n+\Delta n}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke A_0AB und $A_0A'B'$ folgt, daß

$$A_0A' = \Delta x \frac{A'B'}{AB - A'B'} = n \frac{\Delta x}{\Delta n}.$$

Man sieht leicht ein, daß der Grenzwert A_0A' für $\Delta x \to 0$ der Krümmungsradius des Strahles im Punkte A' ist. Damit erhält man:

$$\lim_{\Delta x \to 0} A_0A' = R(x) = \frac{n}{\frac{\partial n}{\partial x}}.$$

Abb. 266

Wenn die Dicke der Schicht δ genügend klein ist, so kann man den Winkel α, um den der Strahl beim Durchgang durch die Schicht abgelenkt wird (Abb. 267), gleich $\frac{\delta}{R}$ annehmen. Bezeichnen wir mit β den Winkel der Ablenkung des Strahles nach seiner Brechung beim Austreten aus dem Gefäß in den Luftraum und ersetzen wir (weil α und β klein sind) den Sinus durch den Winkel selbst, so können wir schreiben:

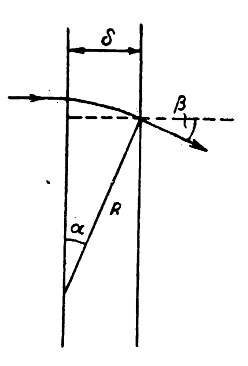


Abb. 267

$$\beta = n\alpha = \frac{n\delta}{R} = \delta \frac{\partial n}{\partial x}.$$

Folglich entspricht der maximale Wert von β, der oben durch γ bezeichnet wurde (Abb. 265), tatsächlich dem größten $\frac{\partial n}{\partial x}$. Es ist also:

$$\gamma = \delta_{\max} = \delta \left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)_{\max}. \tag{1}$$

Um zu klären, wie sich $\left(\frac{\partial n}{dx}\right)_{\max}$ zeitlich ändert, betrachten wir den uns interessierenden Fall der Diffusion.

Die Menge des Stoffes ΔM, die durch die Fläche Δs während der Zeit Δt tritt, wird bekanntlich durch die Beziehung bestimmt:

$$\Delta M = -D \frac{\partial c}{\partial x} \Delta s \, \Delta t \text{[1]}, \tag{2}$$

wobei D der Diffusionskoeffizient und c die Konzentration ist. Das negative Vorzeichen zeigt, daß der Diffusionsstrom in Richtung abnehmender Konzentration fließt. Diese Gleichung läßt sich bequem für den Fall verwenden, wenn wir es mit einem stationären (zeitlich konstanten) Prozeß zu tun haben. Wenn aber die Verteilung der Konzentration $\frac{\partial c}{\partial x}$ sich mit der Zeit ändert, wird der Diffusionsprozeß durch eine andere Differentialgleichung beschrieben, die sich leicht aus der Gleichung (2) ableiten läßt.

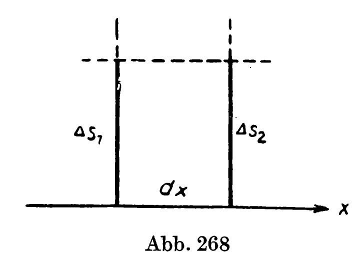


Abb. 268

Wir greifen uns ein Volumenelement $\Delta v = \Delta s \, \Delta x$ heraus, das durch die zwei Flächen Δs_1 und Δs_2 begrenzt ist, die einander gleich sind und parallel zueinander stehen. Den Abstand zwischen ihnen bezeichnen wir mit Δx (Abb. 268) und legen die X-Achse senkrecht zu den Flächen gleicher Konzentration. Übereinstimmend mit der Gleichung (2) diffundiert durch die Fläche Δs_1 in das Volumen Δv die Menge des Stoffes

$$\Delta M_1 = -D \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)_x \Delta s \, \Delta t,$$

und durch die Fläche Δs_2 tritt aus dem Volumen die Stoffmenge heraus:

$$\Delta M_2 = -D \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} \Delta s \, \Delta t.$$

Da die Konzentration c mit x abnimmt, ändert sich die Stoffmenge im Volumen Δv und die Größe

$$\Delta M = \Delta M_1 - \Delta M_2 = D \left[\left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)_x \right] \Delta s \, \Delta t =$$

$$= D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \Delta x \, \Delta s \, \Delta t$$

oder

$$\Delta c = \frac{\Delta M}{\Delta v} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \Delta t.$$

Hieraus erhalten wir eine Gleichung, die die Geschwindigkeit der Konzentrationsänderung $\left(\frac{\partial c}{\partial t} \right)$ bestimmt:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \text{[1]}, \tag{3}$$

wobei c die Konzentration und D der Diffusionskoeffizient ist.

[1]) Anm. d. Übers.: Ficksche Gesetze.

Für genügend verdünnte Lösungen kann man annehmen (wie auch für verdünnte Gase), daß der Brechungsindex von der Konzentration linear abhängt und damit der gleichen Differentialgleichung genügt:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \tag{4}$$

Die Anfangsbedingungen für $t = 0$ ergeben:

$$\begin{aligned} n &= n_1 \quad \text{oder} \quad x < 0; \\ n &= n_2 \quad \text{oder} \quad x > 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Die Lösung versuchen wir in der Form zu finden:

$$n = f(z), \quad \text{wobei} \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}}; \tag{6}$$

für $t = 0$ ist $z = \begin{cases} -\infty\,(x < 0) \\ +\infty\,(x > 0). \end{cases}$

Setzen wir die angenommene Form der Lösung (6) in (4) ein und berücksichtigen, daß

$$\frac{\partial n}{\partial t} = f'(z)\left(-\frac{x}{2t^{3/2}}\right) = -\frac{z}{2t} f'(z),$$

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{t}} f'(z)$$

und

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{1}{t} f''(z),$$

so erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$D f''(z) = -\frac{z}{2} f(z) \tag{7}$$

für die Anfangsbedingungen

$$f(-\infty) = n_1, \tag{5'}$$

$$f(\infty) = n_2. \tag{5''}$$

Integrieren wir die Gleichung (7), so erhalten wir:

$$\frac{d \ln f'(z)}{dz} = -\frac{z^2}{4D} + C_1,$$

$$f'(z) = C e^{-\frac{z^2}{4D}}. \tag{8}$$

Daraus finden wir:

$$f(z) = C \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{4D}} dz + A, \tag{9}$$

wobei C und A Konstanten sind, die sich bestimmen lassen.

Setzen wir

$$\frac{z}{2\sqrt{D}} = \xi, \tag{10}$$

dann läßt sich die Formel (9) umformen in

$$f(z) = \overline{C} \int_{-\infty}^{\frac{z}{2\sqrt{D}}} e^{-\xi^2} d\xi + A,$$

wobei

$$\overline{C} = 2\sqrt{D}C.$$

Wir bestimmen $\overline{C}$ und A aus den Bedingungen (5′) und (5″). Die Bedingung (5′) gibt uns:

$$A = n_1.$$

Gehen wir zu dem Grenzwert für $z \to \infty$ über, und berücksichtigen wir (5″), so erhalten wir:

$$n_2 = \overline{C} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi + n_1$$

oder

$$n_2 = \overline{C}\sqrt{\pi} + n_1,$$

woraus folgt

$$\overline{C} = \frac{n_2 - n_1}{\sqrt{\pi}}.$$

Gehen wir wieder zu den alten Veränderlichen zurück, so erhalten wir die Formel:

$$n(x, t) = \frac{n_2 - n_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-\xi^2} d\xi + n_1. \tag{11}$$

Aus (11) folgt, daß

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{n_2 - n_1}{2\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

Dieser Ausdruck besitzt ein Maximum für $x = 0$. Daher wird

$$\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)_{\max} = \frac{n_2 - n_1}{2\sqrt{\pi D t}}$$

und übereinstimmend mit (1)

$$\gamma = \delta \frac{n_2 - n_1}{2\sqrt{\pi D t}}. \tag{12}$$

Die erhaltene Formel (12) kann man nicht zur Berechnung von D benutzen, weil sie die Zeit t enthält. Diese Zeit wird vom Beginn der Diffusion an gezählt. Uns ist aber unter den vorliegenden Versuchsbedingungen der Anfangsmoment nicht mit genügender Genauigkeit bekannt. Wenn wir jedoch den Wert γ für mindestens zwei willkürliche Zeitmomente messen, so können wir daraus den Diffusionskoeffizienten bestimmen.

Es sei $\gamma = \gamma'$ für $t = t'$ und $\gamma = \gamma''$ für $t = t''$. Hieraus erhält man leicht eine Formel, die nur das Zeitintervall $t'' - t'$ enthält:

$$D = \frac{\delta^2 (n_2 - n_1)^2}{4\pi (t'' - t')} \left(\frac{1}{\gamma''^2} - \frac{1}{\gamma'^2} \right). \tag{13}$$

Dieses endgültige Ergebnis muß daher konstant sein für ein beliebiges Wertepaar t.

Die Beschreibung der Anordnung. Die Anordnung ist schematisch in Abb. 269 dargestellt. Ein paralleles, vom Kollimator K erzeugtes Lichtbündel fällt auf

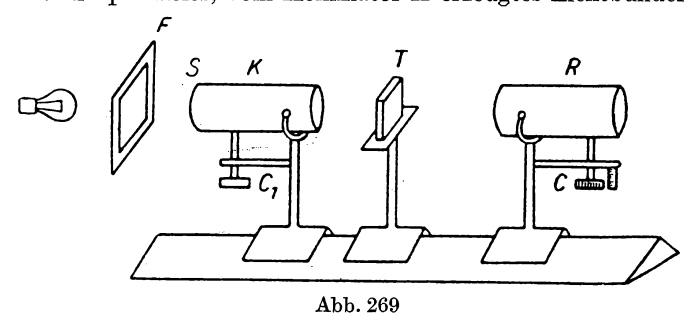


Abb. 269

eine Küvette mit planparallelen Wänden T. Die durch die Küvette laufenden Strahlen treffen auf das Fernrohr R, das auf unendlich eingestellt ist. Durch die Brechung im Diffusionsgefäß erscheint im Gesichtsfeld des Fernrohrs ein Bild, wie es in Abb. 270 dargestellt ist. Die kontinuierliche Reihe von Abbildungen des Kollimatorspaltes füllt den gesamten Raum aus zwischen der Abbildung, die von den nicht abgelenkten Strahlen $\beta = 0$ erzeugt wird und der Abbildung, die von maximal abgelenkten Strahlen $\beta = \gamma$ erzeugt wird. Deshalb ist der Teil des Gesichtsfeldes, der den Winkeln β von 0 bis γ entspricht, beleuchtet, während der übrige Teil dunkel bleibt.

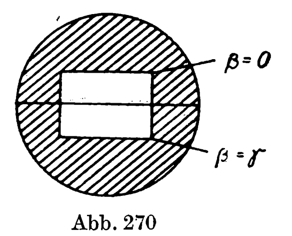


Abb. 270

Um den farbigen Rand an der Grenze $\beta = \gamma$ zu beseitigen, wird das Lichtfilter F in den Strahlengang gebracht (siehe Abb. 269). Der farbige Rand entsteht infolge der Dispersion des Lichtes bei der Brechung in der Küvette T.

Das Fernrohr R kann um die horizontale Achse mit Hilfe der Mikrometerschraube C gedreht werden. Der Wert der Teilstriche des Mikrometers C wird vor der Messung bestimmt. Das Fernrohr R wird auf unendlich eingestellt und der Kollimatorspalt so lange verschoben, bis sein Bild völlig scharf in der Brennebene des Fernrohrs R erscheint. Danach wird der Spalt verengt und zum Faden des Okulars parallel gestellt. Das Fernrohr und der Kollimator müssen mit Hilfe der Schrauben C und C_1 horizontal gestellt werden, und außerdem müssen ihre optischen Achsen zusammenfallen.

Die Küvette T wird zur Hälfte mit destilliertem Wasser (Brechungsindex $n_2 = 1{,}333$) gefüllt. Dann wird mit der Pipette (die man bis zum Boden ein-

tauchen muß) das Gefäß mit einer 20 %igen Natriumchloridlösung (Brechungsindex $n_1 = 1{,}364$) tropfenweise aufgefüllt, bis die Trennfläche zwischen den Flüssigkeiten die Höhe der optischen Achse des Systems erreicht hat.

Die Pipette muß langsam herausgezogen werden, damit die Flüssigkeiten sich nicht vermischen.

Die Messung. Durch Drehen der Schraube C wird der Faden des Okulars nacheinander auf das nicht abgelenkte Spaltbild (Grenze $\beta = 0$) und das abgelenkte (Grenze $\beta = x$) eingestellt. Aus der abgelesenen Differenz der Neigungen des Fernrohrs wird der Winkel γ bestimmt. Alle 10 bis 15 Minuten erfolgt die Messung des Winkels γ. Da sich die Änderung von γ mit der Zeit verlangsamt, wählt man auch die Zeitabstände zwischen den Ablesungen entsprechend größer[1].

Zur Berechnung von D nach der Formel (13) genügen zwei Wertepaare: t', γ' und t'', γ''. Um jedoch die Genauigkeit zu steigern, führt man mehrere Messungen durch (im Laufe von 1,5 bis 2 Stunden). Um bei der Berechnung von D einen systematischen Fehler auszuschließen, muß man untereinander verschiedene γ' und γ'' kombinieren und nicht verschiedene γ'' auf ein und dasselbe γ' beziehen. Außerdem muß man zur Verkleinerung des prozentualen Fehlers bei der Berechnung nicht zu nahe liegende Werte von γ' wählen.

Man muß dabei im Auge behalten, daß in die Formel (13) die Winkel γ im Bogenmaß und die Zeit t in Sekunden eingehen. Es ist daher zweckmäßig, den Umrechnungsfaktor in die Konstante der Formel (13) hereinzunehmen und jedesmal nur den Faktor

$$\frac{1}{t''-t'}\left(\frac{1}{\gamma''^2} - \frac{1}{\gamma'^2}\right)$$

auszurechnen. Man bildet danach den Mittelwert aus allen diesen Größen, multipliziert ihn mit der Konstanten und erhält den gesuchten Wert für den Diffusionskoeffizienten D.

Spezialliteratur

1. O. Wiener, Annalen der Physik **49** (1893), S. 105.
2. A. Sommerfeld: „Vorlesungen über theoretische Physik", Bd. IV: Optik. Dietrichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1950, S. 356 ff.

Aufgabe 76

Die Bestimmung der Wellenlänge des Lichtes mit Hilfe einer Bilinse und eines Biprismas[2])

Zubehör: 1. Optische Bank mit sechs Reitern, 2. Biprisma, 3. Bilinse, 4. Spaltblende, 5. Halterung für Lichtfilter, 6. Okularmikrometer, 7. Sammellinse mit einer Brennweite von 10 bis 15 cm, 8. Lichtquelle: Quecksilberlampe oder Glühlampe von 200 bis 300 Watt, 9. Lichtfiltersatz.

---

[1]) Die obere Grenze kann sich faktisch ebenfalls etwas verschieben, da während des Diffusionsprozesses ein Konzentrationsgradient auch in Gebieten auftritt, die von der Trennfläche zwischen den Flüssigkeiten weit abliegen.

[2]) Anm. d. Übers.: Billetsche Halblinsen und Fresnelsches Biprisma.

Theorie. Will man Interferenzerscheinungen experimentell verwirklichen, so ist es beim Überlagern zweier Schwingungen notwendig, daß sie ein und derselben Lichtquelle entstammen. Zwei Ausstrahlungszentren, die in ein und derselben Lichtquelle ihren Ursprung haben und deshalb Schwingungen mit konstanter Phasendifferenz ausstrahlen, werden *kohärent* genannt.

Die Energie der Schwingungen gleicher Amplituden im Interferenzfeld zweier benachbarter punktförmiger, kohärenter Lichtquellen ist proportional

$$4a^2\cos^2\left(\pi\frac{d_2-d_1}{\lambda}+\frac{\varphi}{2}\right),$$

wobei d_1 und d_2 die entsprechenden Abstände der Punkte des Feldes von den Lichtquellen, λ die Wellenlänge, a die Schwingungsamplitude und φ die anfängliche Phasendifferenz bedeuten. Wenn die anfängliche Phasendifferenz $\varphi = 0$ ist, dann werden die Bedingungen für das Maximum oder das Minimum der Intensität in einem vorgegebenen Punkt erfüllt für

$$2\frac{d_2-d_1}{\lambda}=2k \text{ (Maximum)}$$

und

$$2\frac{d_2-d_1}{\lambda}=2k+1 \text{ (Minimum)},$$

wobei k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Benutzt man diese Beziehungen, und kennt man den Abstand l zwischen den Lichtquellen, so kann man leicht erkennen, daß die Wellenlänge λ von dem Abstand zwischen den Interferenzstreifen auf einem Schirm abhängt, der parallel zur Verbindungslinie der Lichtquelle aufgestellt ist.

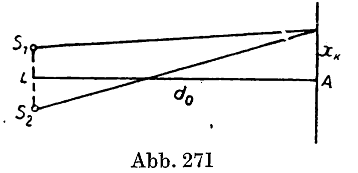


Abb. 271

Sind nämlich S_1 und S_2 (Abb. 271) zwei kohärente Lichtquellen, deren Abstand l voneinander, verglichen mit dem Abstand d_0 zwischen ihnen und dem Schirm, klein ist, so kann man auf dem Schirm Interferenzen beobachten. In dem Punkte A, der Mitte des Interferenzbildes, tritt ein heller Streifen (Phasendifferenz gleich null) auf, und der Abstand x_k des k-ten Streifens von dem mittleren Streifen wird durch die Bedingung bestimmt:

$$x_k=\frac{d_0}{l}k\lambda,$$

wenn x_k und l, verglichen mit d_0, klein sind. Die Lage der dunklen Streifen wird durch die Bedingung bestimmt:

$$x_k'=\frac{d_0}{l}(2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Man sieht leicht ein, daß der Abstand zwischen zwei benachbarten hellen oder dunklen Streifen gleich

$$\Delta x=x_{k+1}-x_k=\frac{d_0}{l}\lambda(k+1)-\frac{d_0}{l}\lambda k=\frac{d_0}{l}\lambda$$

ist, woraus man

$$\lambda=\frac{l}{d_0}\Delta x \tag{1}$$

erhält.

Übung 1

Die Bestimmung der Lichtwellenlänge mit Hilfe der Bilinse

Die Bilinse stellt eine Sammellinse dar, die mitten durchgeschnitten ist. Beide Hälften der Linse sind etwas auseinandergeschoben und liefern zwei reelle oder virtuelle Bilder des Spaltes S und damit zwei kohärente Licht-

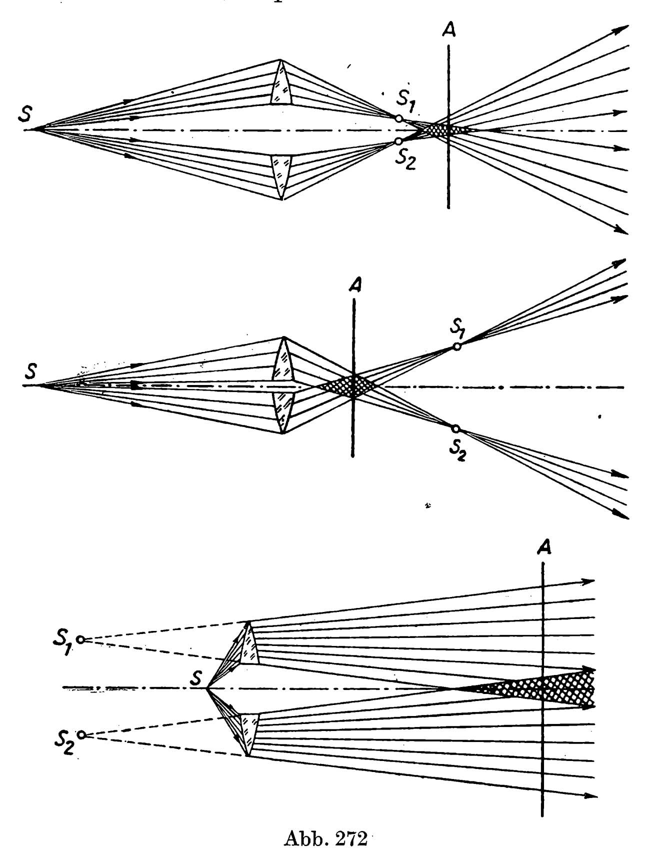


Abb. 272

quellen S_1 und S_2 (Abb. 272)[1]). Die Halterung der Bilinse besitzt zwei Schrauben, mit denen man die Halblinsen um eine Achse, die parallel zur

[1]) Eine zweite Möglichkeit, reelle kohärente Lichtquellen zu erhalten, besteht darin, daß aus der Linse ein Stück herausgeschnitten wird und die übrigbleibenden Teile einander nähergerückt werden (s. Abb. 272).

Die dritte Möglichkeit, ein Interferenzbild zu erhalten, besteht darin, daß man virtuelle kohärente Lichtquellen erzeugt. Dazu stellt man in den Strahlengang eines divergenten Lichtbündels eine Sammellinse, oder man schneidet aus einer Bilinse den mittleren Teil heraus und schiebt die übrigen beiden Teile ganz dicht aneinander (s. Abb. 272).

optischen Achse des Systems verläuft, zusammen- oder auseinanderschieben oder sie relativ zur Achse verschieben kann.

Die Messung. An dem einen Ende der optischen Bank werden ein Gehäuse mit einer Quecksilberlampe (siehe Aufgabe 73), die ein Linienspektrum liefert, und ein Spalt aufgestellt. Zwischen das Fenster des Gehäuses und den Spalt werden auf Reitern befestigte Lichtfilter gebracht, mit denen man verschiedene Linien ausfiltern kann. In ungefähr einem Meter Abstand (größer als die doppelte Brennweite der Linse) wird die Bilinse aufgestellt. Dann schiebt man die Halblinsen auf 3 bis 4 mm auseinander. Das Lichtbündel geht durch den Spalt, durch die Bilinse und fällt auf das Okularmikrometer. Um die Lage der Lichtbündel zu bestimmen, wird ein Blatt weißen Papiers in den Strahlengang gestellt. Man leuchtet beide Halblinsen gleichmäßig aus und sucht die Lage des Spaltbildes auf. Dann setzt man Lichtfilter in den Strahlengang und beobachtet beim Verkleinern der Spaltbreite das Spaltbild durch das Okularmikrometer. Gleichzeitig dreht man eine der Halblinsen, bis die Bilder vertikal stehen und gleich hell erscheinen. Man schiebt das Okularmikrometer um 40 bis 50 cm von der Stelle fort, an der die Spaltbilder beobachtet wurden, und sucht das Interferenzbild. Dann verschiebt man vorsichtig die Halblinsen (um sie nicht aus der Fassung zu drücken), ändert die Spaltbreite und versucht, durch Verschieben des Okularmikrometers längs der optischen Achse ein deutliches und klares Interferenzbild einzustellen.

Mit Hilfe des Okularmikrometers bestimmt man die Größe Δx, d. h., den Abstand zwischen zwei Interferenzstreifen. Dazu muß man den Abstand zwischen zwei voneinander entfernt liegenden dunklen (hellen) Streifen messen und diesen Abstand durch die Zahl der hellen (dunklen) Streifen dividieren, die innerhalb dieser herausgegriffenen dunklen (hellen) Streifen liegen. Jede Messung wird mehrmals ausgeführt und der Mittelwert gebildet.

Man merkt sich die Stellung des Okularmikrometers, verschiebt es, bis die Spaltbilder scharf erscheinen und mißt die Differenz d zwischen diesen beiden Stellungen des Mikrometers und den Abstand $S_1 S_2 = l$ zwischen den Spaltbildern. Nach der Formel (1) berechnet man λ.

Übung 2

Die Bestimmung der Lichtwellenlänge mit Hilfe des Biprismas

Das Biprisma besteht aus zwei Prismen mit kleinen brechenden Winkeln (Größenordnung 30′), die mit den Grundflächen aneinanderstoßen (Abb. 273). Das vom Spalt kommende Lichtbündel wird nach der Brechung am Biprisma in zwei sich überlagernde Bündel geteilt, die sich so verhalten, als ob sie von zwei virtuellen Spaltbildern S_1 und S_2 ausgehen. Da die Lichtquellen S_1 und S_2 kohärent sind, beobachtet man hinter dem Biprisma ein Interferenzbild im gesamten Gebiet der sich überlagernden Bündel.

Die Messung. Das Biprisma wird in einem Abstand von 70 bis 80 cm vom Spalt so aufgestellt, daß seine brechenden Kanten vertikal stehen. In einem Abstand von 30 bis 50 cm vom Biprisma wird das Okularmikrometer aufgestellt. Das Fenster des Lampengehäuses, die Mitte des Spaltes, das Biprisma und das Okularmikrometer müssen in einer Höhe stehen.

Man macht den Spalt genügend schmal, dreht ihn oder das Biprisma etwas um die horizontale Achse und versucht damit, den Spalt der brechenden Kante des Biprismas genau parallel zu stellen. Bei einer solchen Stellung erscheint das Interferenzbild am deutlichsten. Man verändert die Spaltbreite, verschiebt das Mikrometer längs der optischen Bank und versucht, genügend scharfe Interferenzstreifen bei genügend großem Abstand zwischen ihnen zu finden.

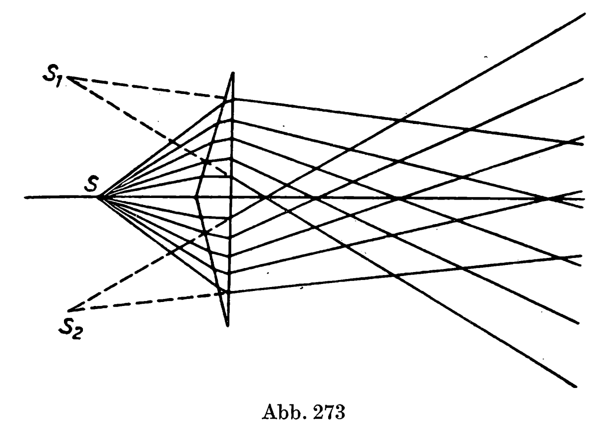


Abb. 273

Der Abstand zwischen den Streifen wird genauso gemessen wie in der Übung 1.

Danach bestimmt man den Abstand l zwischen den virtuellen Lichtquellen S_1 und S_2. Hierzu stellt man auf die optische Bank zwischen Biprisma und Mikrometer eine Sammellinse L (Abb. 274) mit einer Brennweite von 10 bis 15 cm, die zwei reelle Bilder des Spaltes S entwirft. Man verschiebt die Linse, bis in dem Okularmikrometer Ok beide Spaltbilder deutlich zu sehen sind. In diesem Fall liegen sie in der gleichen Ebene, in der auch das Interferenzbild beobachtet wurde. Mit Hilfe des Okularmikrometers mißt man den Abstand l zwischen den Spaltbildern.

Danach mißt man den Abstand d_0[1] zwischen Spalt S und Okularmikrometer Ok, den Abstand a zwischen Spalt S und Linse L und den Abstand b zwischen Linse L und Mikrometer Ok. Nach der Formel für die Linsenvergrößerung findet man den Abstand zwischen den virtuellen Spaltbildern:

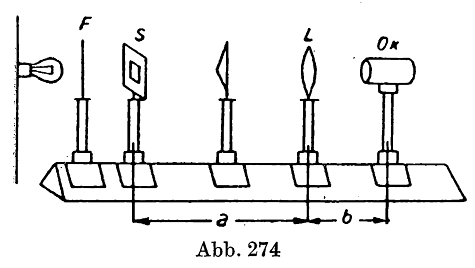


Abb. 274

$$l = \frac{a}{b} l'.$$

Man benutzt die Formel (1) und berechnet die Wellenlänge λ.

[1]) In Abb. 273 liegen die virtuellen Lichtquellen S_1 und S_2 und die reelle Lichtquelle S nicht streng in einer Ebene, die senkrecht zur optischen Achse steht. Doch ist diese Verschiebung, im Vergleich zu dem Abstand zwischen Lichtquelle S und Mikrometer Ok, sehr klein. Deshalb kann man bei der Bestimmung der Größe l direkt d_0 messen und damit die Verschiebung von S_1 und S_2, relativ zu S, vernachlässigen.

Aufgabe 77

Die Bestimmung des Krümmungsradius einer Linse und der Lichtwellenlänge mit Hilfe der NEWTONschen Ringe

Zubehör: 1. Meßmikroskop mit vertikaler Beleuchtungsvorrichtung, 2. Brillenglas, 3. Plättchen aus schwarzem Glas, 4. Natriumflamme, 5. Quecksilberlampe, 6. Lichtfilter.

NEWTONsche Ringe beobachtet man, wenn die gewölbte Oberfläche einer schwach gekrümmten Linse die ebene Oberfläche einer gut polierten Platte berührt. Es bildet sich zwischen ihnen ein langsam von der Mitte zu den Rändern zunehmender Luftspalt. Wenn nun auf die Linse ein monochromatisches Lichtbündel fällt, so interferieren die von der oberen und der unteren Grenze des Luftspaltes reflektierten Lichtwellen miteinander. Dabei entsteht folgendes Bild: Im Zentrum entsteht ein schwarzer Fleck, der von einer Reihe konzentrischer heller und dunkler Ringe abnehmender Breiten umgeben ist. Beobachtet man in durchgehendem Licht, so zeigt sich ein umgekehrtes Bild: Der Fleck im Zentrum ist hell, alle hellen Ringe sind durch dunkle ersetzt und alle dunklen durch helle.

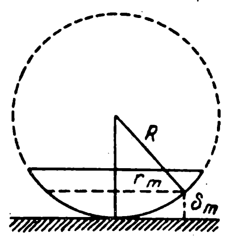


Abb. 275

Wir wollen den Durchmesser der NEWTONschen Ringe bei reflektiertem Licht berechnen. Da hierbei Wellen miteinander interferieren, die von der oberen und der unteren Oberfläche des Luftspaltes reflektiert werden, müssen wir bei der Berechnung der Phasendifferenz nicht nur den Gangunterschied innerhalb des Luftspaltes berücksichtigen, sondern auch die Änderung der Phase des elektrischen und des magnetischen Vektors bei der Reflexion an den Grenzen Glas—Luft und Luft—Glas. Diese Änderung führt sowohl für den einen als auch für den anderen Vektor zu einer zusätzlichen Phasendifferenz von π. Dabei erfolgt für den elektrischen Vektor die erste Reflexion ohne Phasensprung und die zweite mit einem Phasensprung von π. Für den magnetischen Vektor ist es umgekehrt. Im Endeffekt entsteht sowohl für den einen als auch für den anderen Vektor eine zusätzliche Phasendifferenz von $\frac{\lambda}{2}$. Folglich erhält man für den gesamten optischen Gangunterschied:

$$\Delta = 2\delta_m + \frac{\lambda}{2}, \tag{1}$$

wo δ_m die Dicke der Luftschicht ist (der Brechungsindex der Luft ist $n_1 = 1$); wie man leicht aus der geometrischen Darstellung (Abb. 275) entnimmt, ist:

$$\delta_m = \frac{r_m^2}{2R}. \tag{2}$$

Hierin ist r_m der Radius des m-ten Ringes und R der Krümmungsradius der Linse.

Die Bedingung für die Entstehung des m-ten dunklen Ringes lautet:

$$\Delta = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}. \tag{3}$$

Aus den Formeln (1), (2) und (3) erhält man:

$$r_m = \sqrt{mR\lambda}. \tag{4}$$

Je größer m, desto kleiner ist der Unterschied zwischen den Radien benachbarter Ringe, d. h., desto dichter liegen die Ringe.

Für den Radius eines halben Ringes erhalten wir:

$$r'_m = \sqrt{(2m-1)R\frac{\lambda}{2}}. \tag{5}$$

Aus den Formeln (4) oder (5) kann man R bestimmen (oder λ). Da jedoch infolge elastischer Deformation des Glases keine ideale Berührung zwischen der sphärischen Linse und der ebenen Platte in einem Punkt erreicht werden kann, erhält man ein besseres Ergebnis, wenn man R (oder λ) aus der Differenz der Radien zweier Ringe r_m und r_n errechnet. Die endgültige Formel hat dann die Form:

$$R = \frac{r_m^2 - r_n^2}{(m-n)\lambda}. \tag{6}$$

Zur Berechnung dieses Ausdruckes ist es bequemer, ihn folgendermaßen umzuschreiben:

$$R = \frac{(r_m - r_n)(r_m + r_n)}{(m-n)\lambda}. \tag{7}$$

Die Beschreibung der Anordnung. Auf das Tischchen des Meßmikroskops (Abb. 276) wird ein poliertes Plättchen aus schwarzem Glas gelegt, auf dem durch besondere Klemmen die zu untersuchende Linse festgehalten wird.

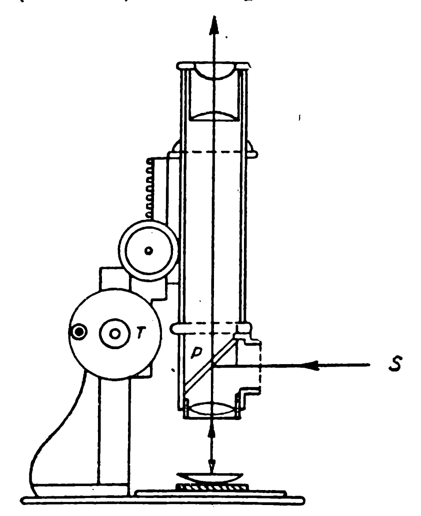


Abb. 276

An den Tubus des Mikroskops ist eine vertikale Beleuchtungsvorrichtung angeschraubt, die aus einem Rohrstück mit seitlichem Fenster besteht. Im Inneren dieses Rohres wird mit Hilfe von Schrauben, die in der Abbildung nicht eingezeichnet sind, gegenüber dem Fenster ein Glasplättchen P unter 45° zur Mikroskopachse gehalten. Das von der Lichtquelle S kommende Licht wird an diesem Plättchen reflektiert und fällt auf die Linse.

Der Tubus des Mikroskops läßt sich in der Richtung senkrecht zur Zeichenebene mit Hilfe einer Mikrometerschraube und der Trommel T verschieben. Eine volle Umdrehung der Trommel entspricht einer horizontalen Verschiebung des Tubus um 0,5 mm. Die Ablesung der vollen Umdrehung erfolgt an einer Skala, die an dem beweglichen Teil des Mikroskops angebracht ist, und die Ablesung der Bruchteile einer Umdrehung erfolgt an der Teilung der Trommel T.

Als monochromatische Lichtquelle dient in der ersten Übung eine Natriumflamme und in der zweiten eine Quecksilberlampe, die in einiger Entfernung vom Mikroskop auf gleicher Höhe mit dem Fenster aufgestellt werden. (Beschreibung der Quecksilberlampe siehe Aufgabe 73.)

Das von der Quecksilberlampe erzeugte Licht besteht aus einigen einzelnen starken Linien (siehe Tabelle 36), von denen sich zur Beobachtung am bequemsten zwei grüne, eine gelbe und eine violette Linie aussondern lassen. Dazu stellt man in den Strahlengang entsprechend ausgesuchte Filterkombinationen. Hierbei muß bemerkt werden, daß die gelbe Linie tatsächlich aus zwei sehr nahe beieinander liegenden Linien besteht.

Übung 1

Die Bestimmung des Krümmungsradius einer Linse

Die Messung. 1. Man zündet die Natriumflamme an und stellt sie gegenüber dem Fenster auf.

2. Man nimmt die Linse herunter, legt ein Stück Millimeterpapier auf die Oberfläche der schwarzen Platte und stellt das Mikroskop darauf scharf ein. Dann bringt man die Linse in die vorherige Lage und verschiebt die schwarze Platte, bis der Berührungspunkt zwischen Linse und Platte genau in der Mitte des Gesichtsfeldes des Mikroskops steht. Dabei müssen die an der Grenze zwischen Luftschicht und Linse entstehenden Newtonschen Ringe deutlich zu sehen sein. Wenn das nicht der Fall ist, wird die Scharfeinstellung des Mikroskops verbessert. Wenn im Berührungspunkt anstatt eines dunklen ein heller Fleck entstanden ist, bedeutet das, daß zwischen der Oberfläche der Linse und des Glases Staubkörnchen liegen. Sie müssen dann mit einem Sämischlederläppchen entfernt werden.

3. Durch Drehen der Trommel verschiebt man den Mikroskopschlitten in irgendeiner Richtung, z. B. nach links vom zentralen Fleck, bis mit dem Fadenkreuz die Mitte irgendeines vom Zentrum des dunklen Fleckes genügend weit entfernten Ringes, z. B. des zwanzigsten, zusammenfällt. Dann liest man an der Skala und der Trommel des Mikroskops ab. Diese Einstellung wird für ein und denselben Ring mehrmals wiederholt. Danach stellt man das Fadenkreuz nacheinander auf den neunzehnten, achtzehnten, siebzehnten usw. Ring ein und führt die gleichen Ablesungen durch. Man geht dabei über den zentralen Fleck hinaus und liest auch auf der rechten Seite die Stellungen bis zum zwanzigsten Ring ab.

Die gleichen Messungen führt man mit den hellen Ringen durch.

Da die nahe dem zentralen Fleck gelegenen Ringe meist sehr verschwommen sind und sich dadurch das Fadenkreuz schlecht auf sie einstellen läßt, können sie bei der Messung ausgelassen werden.

Die Ausrechnung. Aus den erhaltenen Ablesungen bestimmt man den Durchmesser und daraus den Radius der Ringe. Man kombiniert paarweise die Radien der Ringe und bestimmt aus der Formel (7) den Krümmungsradius der Linse.

Um die Genauigkeit zu steigern, empfiehlt es sich, die Radien der Ringe k, wobei k die Zahl der gemessenen Ringe bedeutet, mit den Radien der Ringe $\frac{k}{2}$ zu kombinieren, die Ringe $k-1$ mit $\frac{k}{2}-1$ usw.

Aus den erhaltenen Werten für R nimmt man den arithmetischen Mittelwert.

Übung 2

Die Bestimmung der Wellenlänge der Quecksilberlinien

Man schaltet die Quecksilberlampe ein und bringt sie an die Stelle der Natriumflamme. Vor das Fenster des Schutzgehäuses werden die die einzelnen Linien aussondernden Filterkombinationen gesteckt. Dann wiederholt man alle Messungen, die schon in der Übung 1 angegeben sind.

Setzt man in die Formel (7) den Wert für den Krümmungsradius der Linse R ein, den man in der ersten Übung gefunden hat, dann läßt sich die Wellenlänge der herausgefilterten Quecksilberlinien bestimmen.

Spezialliteratur

F. Löwe: „Interferenz-Meßgeräte und -Verfahren". VEB Verlag Technik, Berlin 1954.

Aufgabe 78

Die Bestimmung der Lichtwellenlänge aus der Größe der Fresnelschen Zonen

Zubehör: 1. Kohlebogen mit Widerstand, 2. Irisblende, 3. Schirm, 4. Spiegel, 5. langbrennweitiges Mikroskop, 6. Skala mit Millimeterteilung, 7. Lichtfilter.

Wir stellen im Punkte A (Abb. 277) eine punktförmige Lichtquelle und im Punkte B einen Schirm auf. Zwischen A und B setzen wir eine Blende CF so, daß ihre Achse mit der Geraden AB zusammenfällt. Dann entsteht im Punkte B ein dunkler oder heller Fleck, je nachdem, ob die Zahl der von der Blende freigegebenen Fresnelschen Zonen gerade oder ungerade ist. Diese Zahl hängt ihrerseits von dem Durchmesser $D = CF = 2r$ der Blende ab.

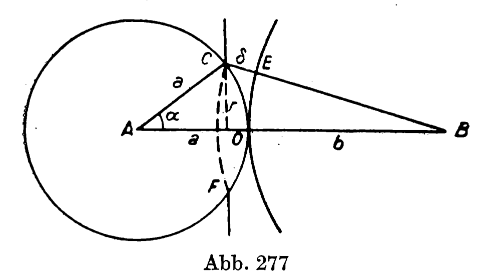


Abb. 277

Wir wollen die Zahl n der Zonen berechnen, die eine Blende von dem Durchmesser D_n freigibt. Dazu beschreiben wir um A eine Kugel vom Radius $AC = a$. Diese Kugel schneidet die Gerade AB im Punkte O. Um den Punkt B beschreiben wir ebenfalls eine Kugel mit dem Radius $BO = b$. Man sieht leicht ein, daß die Zahl

der Zonen n durch die Anzahl der Halbwellen $\frac{\lambda}{2}$ bestimmt ist, die in dem Abschnitt $CE = \delta$ liegen, d. h.

$$\delta = n\frac{\lambda}{2}.$$

Wir wollen nun δ bestimmen. Aus dem Dreieck ACB entnehmen wir die Beziehung:

$$(b+\delta)^2 = (a+b)^2 + a^2 - 2a(a+b)\cos\alpha.$$

Da der Winkel α klein und die Größe δ, im Vergleich zu a und b, auch klein ist, können wir

$$\sin\alpha = \frac{r}{a} \approx \alpha$$

annehmen und die Größe δ^2 vernachlässigen. Setzen wir $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, so erhalten wir:

$$r = \sqrt{\frac{2ab}{a+b}\delta}$$

oder

$$n = \frac{D_n^2}{4}\cdot\frac{(a+b)}{ab\lambda}$$

und für $a = b$

$$n = \frac{D_n^2}{2a\lambda}. \tag{1}$$

Wir wollen die zuerst geschlossene Blende nach und nach öffnen (z. B. für $a = b$). Dann entsteht allmählich im Punkte B ein sich verbreiternder heller Fleck. Die Helligkeit nimmt in der Mitte des Fleckes zu und erreicht ein Maximum, wenn eine Zone völlig freigegeben ist. Dann nimmt die Helligkeit in der Mitte wieder ab und erreicht ein Minimum, wenn die Blende zwei Zonen freigibt. Kennt man a und D_2, so kann man die Wellenlänge aus der Formel (1) bestimmen. Sie nimmt für $n = 2$, d. h. bei der Einstellung auf den ersten schwarzen Fleck, die Form an:

$$\lambda = \frac{D_2^2}{4a}. \tag{2}$$

Wenn man die Blende weiter öffnet, so erscheint im Punkte B wieder ein heller Fleck, der von einem dunklen Ring umschlossen ist. Wenn man in dieser Stellung D_3 mißt, so kann man λ aus der Formel (1) bestimmen und erhält:

$$\lambda = \frac{D_3^2}{6a}.$$

Die Beschreibung der Anordnung. Die Anordnung aller Geräte bei dieser Aufgabe ist aus Abb. 278 ersichtlich. Auf zwei Konsolen I und II, die an der Wand in einem Abstand von 10 m voneinander angebracht sind, stehen die Lichtquelle, eine Bogenlampe und die Blende. Das Licht fällt von der Lichtquelle durch die Blende auf den Spiegel, der sich an einem Abstand von 5 m von der Blende befindet, wird reflektiert und gelangt zum Schirm, der ebenfalls auf der Konsole II aufgestellt ist. Zur genaueren Aufstellung der Geräte

sind auf den Konsolen Markierungen angebracht, zwischen denen der Abstand genau 10 m beträgt.

Die Bogenlampe (Abb. 279) stellt einen PETROW-Bogen mit Kohleelektroden dar, die mit Schrauben festgeklemmt sind. Der Abstand zwischen

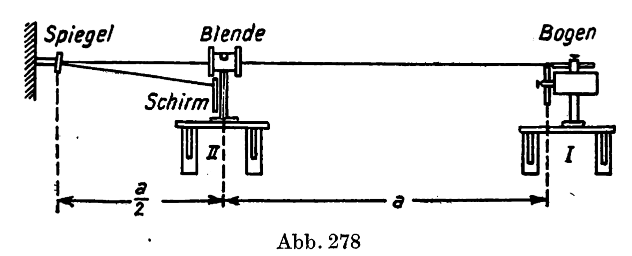


Abb. 278

den Kohlen kann von Hand mit Hilfe der Drehknöpfe A und B verändert werden. Dabei bewegt der Drehknopf A beide Kohlen gleichzeitig und der Drehknopf B nur die untere Kohle. Die Kohlen sind von einem abnehmbaren Gehäuse umgeben, das in der Abbildung nicht eingezeichnet ist. Das Zünden der Kohlen geschieht bei aufgesetztem Gehäuse. Dabei werden die Kohlen durch ein Farbglas beobachtet, das an dem Gehäuse angebracht ist.

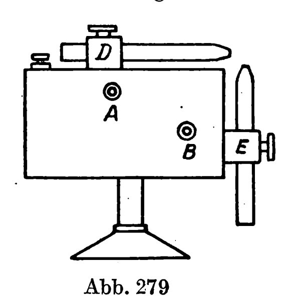


Abb. 279

Der Bogen wird mit einem Widerstand von einigen zehn Ohm an das Gleichstromnetz angeschlossen, wobei der positive Pol mit der oberen Kohle D verbunden wird. Bei richtiger Polung glüht diese Kohle wesentlich stärker als die untere. Der Bogen wird folgendermaßen gezündet: Man schließt den Schalter, führt die Kohlen bis zur Berührung zusammen und dreht sie sofort wieder leicht auseinander. Bei richtig gewähltem Abstand zwischen den Kohlen glühen nur die äußersten Enden der Kohlen, der Bogen zischt nicht und brennt ruhig. Die Abb. 280 zeigt die verschiedenen Stellungen der Kohlen zueinander während des Brennens. Das Ausschalten des Bogens geschieht durch einfaches Öffnen des Schalters.



Abb. 280

Die Blende. Als Blende wird in dieser Aufgabe die sogenannte *Irisblende* verwendet. Sie besteht aus einer Reihe dünner Plättchen von besonderer Form, die eine runde Öffnung bilden. Der Durchmesser dieser Öffnung kann durch den Hebel P verändert werden, der die Plättchen verschiebt (Abb. 281). Die Blende sitzt in einem Schutzgehäuse D, das auf einem Stativ befestigt ist.

Da diese Plättchen äußerst zerbrechlich sind, muß mit der Blende sehr sorgfältig umgegangen werden.

Die Messung. Zuerst wird der Bogen gezündet. Dann stellt man die Blende auf die Markierung der Konsole *II* so auf, daß der Schatten der Blende auf den Spiegel fällt. Man öffnet die Blende und beobachtet die vom Spiegel reflektierten Strahlen auf dem Schirm. Der auf dem Schirm entstehende Fleck muß kreisförmig sein, wenn die Blende richtig aufgestellt worden ist, d. h. senkrecht zum Strahl.

Nach der Aufstellung der Blende schließt man sie und beginnt dann, sie erneut allmählich zu öffnen bis zum Auftreten des ersten schwarzen Fleckes in der Mitte des Beugungsbildes. Der Durchmesser D_2 der Öffnung, die einen schwarzen Fleck ergibt, wird mit dem Mikroskop gemessen. Dieser Vorgang wird mehrmals wiederholt.

Danach vergrößert man den Durchmesser der Blendenöffnung so weit, bis in der Mitte des Beugungsbildes erneut ein heller Fleck entsteht. Man mißt wieder den Durchmesser D_3 der Öffnung und wiederholt diesen Vorgang mehrmals.

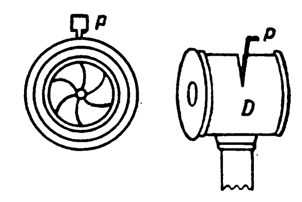


Abb. 281

Ohne den Abstand zwischen Objektiv und Okular zu verändern, bestimmt man den Wert der Teilung des Mikroskopokulars für die vorliegende Vergrößerung (siehe Aufgabe 72). Dazu stellt man das Mikroskop vor eine Skala mit Millimeterteilung.

Die Wellenlänge λ wird aus den Mittelwerten von D_2 und D_3 nach den Formeln (2) und (3) bestimmt.

Da der Bogen ein kontinuierliches Spektrum ausstrahlt, wird hierbei die Wellenlänge bestimmt, für die das Auge besonders empfindlich ist, d. h., man findet das Maximum der Empfindlichkeit des menschlichen Auges.

Man stellt vor den Bogen ein Lichtfilter und bestimmt erneut die Wellenlänge. Dabei wird das Maximum der Durchlässigkeitskurve des Lichtfilters bestimmt. Jedoch wird es etwas durch die Augenempfindlichkeitskurve verschoben[1]).

Spezialliteratur

1. CL. SCHAEFER: „Einführung in die theoretische Physik", Bd. III/1. Verlag W. de Gruyter, Berlin 1949.
2. A. SOMMERFELD: „Vorlesungen über theoretische Physik", Bd. IV: Optik. Dieterichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1950.

[1]) Anm. d. Übers.: Auch das mit dieser Methode bestimmte Maximum der Augenempfindlichkeitskurve ist nach dem langwelligen Spektralbereich verschoben, weil der Kohlebogen zwar ein kontinuierliches aber nicht energiegleiches Spektrum ausstrahlt.

Aufgabe 79

Untersuchungen am Beugungsgitter und die Bestimmung der Lichtwellenlänge

Zubehör: 1. Spektrometer, 2. Auswahl von Beugungsgittern, 3. Lichtquelle mit Linienspektrum (Quecksilberlampe, Glimmlampe, Natriumflamme, Entladungsrohr), 4. Lupe.

Einführung. Mit Beugungsgitter bezeichnet man eine Vielzahl nahe beieinanderliegender paralleler Spalte. Das einfachste Beugungsgitter ist eine Glasplatte, auf die mit einer Teilmaschine eine Reihe paralleler Striche eingeritzt ist. Die von der Teilmaschine geritzten Stellen streuen das Licht, so daß in die Beobachtungsrichtung nur ein verschwindend kleiner Bruchteil

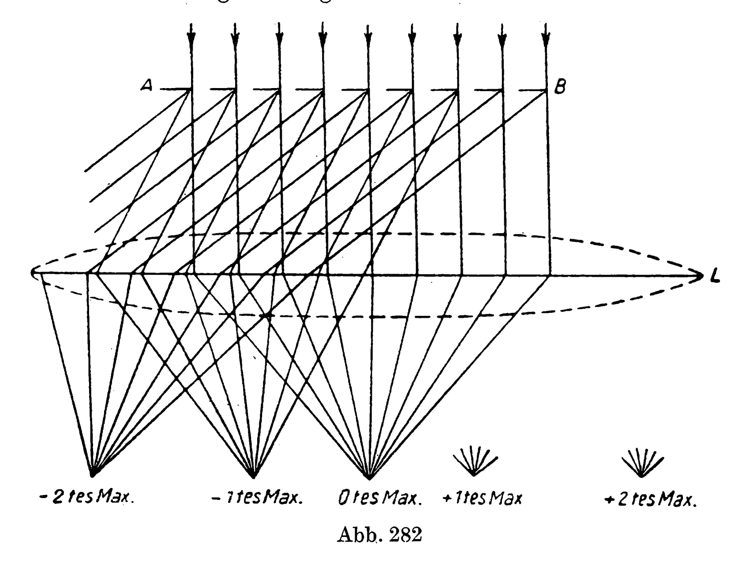


Abb. 282

des Lichtes gelangt. Die Striche erweisen sich daher als praktisch undurchsichtige Zwischenräume zwischen den nicht beschädigten Teilen der Platte — den Spalten.

Außer Beugungsgittern aus Glas werden im Praktikum sogenannte *Gitterkopien* verwendet, die man als Abdruck eines metallischen Reflexionsgitters auf Gelatine erhält.

Im einfachsten Fall, wenn das Licht senkrecht auf das Beugungsgitter fällt, dessen durchsichtige Striche die Breite a und dessen undurchsichtige die Breite b besitzen, werden die Lagen der Hauptmaxima durch die Gleichung bestimmt:

$$k\lambda = (a + b)\sin\varphi = d\sin\varphi,$$

woraus folgt

$$\sin\varphi = \frac{k\lambda}{d}, \tag{1}$$

wobei φ der Beugungswinkel, λ die Lichtwellenlänge, k die Ordnung des Spektrums ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) und $d = a + b$ die sogenannte *Gitterkonstante* bedeuten. Für $k = 0$ wird die Maximumsbedingung für alle Wellenlängen erfüllt, d. h., für $\varphi = 0$ wird ein zentraler heller Streifen beobachtet. Die beiden Vorzeichen $\pm$ bei allen übrigen k-Werten entsprechen zwei Spektrensystemen, die symmetrisch rechts und links von dem zentralen hellen Streifen liegen (Abb. 282).

Die höchste Zahl der Spektren, die man mit einem Beugungsgitter erhalten kann, ist durch die Beziehung gegeben:

$$k \leqq \frac{d}{\lambda}. \tag{2}$$

Als Hauptcharakteristiken eines Beugungsgitters werden sein *Auflösungsvermögen* und seine *Dispersion* betrachtet.

Das Auflösungsvermögen eines Gitters kann man berechnen, wenn man die RAYLEIGHsche Bedingung benutzt, nach der zwei monochromatische Spektrallinien dann aufgelöst werden (einzeln erscheinen), wenn das Hauptmaximum der einen Linie auf die Stelle des dem Hauptmaximum am nächsten liegenden Minimums der anderen Linie fällt (Abb. 283). Aus dieser Bedingung folgt, daß das Auflösungsvermögen des Gitters

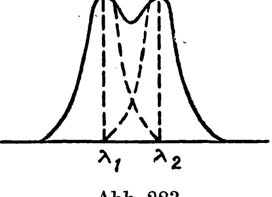


Abb. 283

$$R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = kN \tag{3}$$

ist, wobei N die Zahl der Gitterstriche bezeichnet. Beim Gitter versucht man, ein hohes Auflösungsvermögen durch eine große Zahl N von Gitterstrichen zu erreichen, da die Ordnung k nur klein ist.

Die Dispersion wird definiert als der Winkelabstand zwischen zwei Spektrallinien, bezogen auf ihre Wellenlängendifferenz

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}, \tag{4}$$

wobei $\delta\lambda$ in Angström (Å) ausgedrückt wird. Die Dispersion kann auch bestimmt werden durch den linearen Abstand δs zwischen zwei Spektrallinien, ausgedrückt in mm, wenn die Messung mit einem Fernrohr erfolgt, das mit einem Okularmikrometer versehen ist. Man muß den gemessenen Abstand natürlich auf $\delta\lambda$ beziehen. Da $\delta s = F\,\delta\varphi$, wobei F die Brennweite des Fernrohrobjektivs ist, so erhält man für die Lineardispersion:

$$\frac{\delta s}{\delta\lambda} = DF.$$

Die Winkeldispersion des Gitters erhält man, wenn man die Formel (1) differenziert:

$$D = \frac{k}{d\cos\varphi}. \tag{5}$$

Für kleine Ablenkungswinkel ist die Gitterdispersion konstant, d. h. $\delta\varphi$ proportional zu $\delta\lambda$. Deshalb wird das Gitterspektrum manchmal als „normales" Spektrum bezeichnet, zum Unterschied zu den Spektren, die man mit Glasprismen erhält und bei denen gleiche Wellenlängenintervalle im roten Teil des Spektrums schmaler sind als im violetten.

Die Justierung des Gerätes. Wie ein Spektrometer justiert wird, wurde schon in Aufgabe 73 angegeben. Wenn die Justierung des Spektrometers beendet ist, muß das Beugungsgitter justiert werden. Dazu stellt man das Fadenkreuz des Fernrohrs auf den von einer Quecksilberlampe beleuchteten Spalt ein und klemmt es in dieser Stellung fest. Dann stellt man auf dem Tischchen T das Gitter so auf, daß die Gitterstriche vertikal, d. h. parallel zu der Drehachse des Gerätes und die Gitterebene senkrecht zu der Kollimatorachse stehen. Man neigt und dreht das Tischchen, bis das Bild des Fadenkreuzes (das von den Flächen der Glasplatte, zwischen denen die Gitterkopie liegt, reflektiert wird), im Gesichtsfeld erscheint. Man bringt das Bild des vertikalen Fadens mit dem schrägen Fadenkreuz und das Bild des horizontalen Fadens mit dem Faden selbst zur Deckung, wie bei der Justierung einer planparallelen Platte. Geneigt wird nur das Tischchen und nicht das Fernrohr, weil die Justierung des Spektrometers schon beendet ist.

Man dreht das Tischchen mit dem Gitter um 180° und prüft die Justierung des Gitters. Man kann es als justiert ansehen, wenn in beiden Stellungen die Bilder des vertikalen Fadens und des Spaltes mit der Mitte des schrägen Fadenkreuzes zusammenfallen.

In einer der angegebenen Stellungen wird das Tischchen festgeklemmt und am Teilkreis die Lage des nullten Maximums abgelesen.

Übung 1

Die Bestimmung der Gitterkonstante und der Winkeldispersion

Die Messung. Man schwenkt das Fernrohr, z. B. nach links, bis man die grüne Quecksilberlinie ($\lambda = 5461$ Å) im Spektrum erster Ordnung eingestellt hat und liest diese Stellung ab. Dann schwenkt man in gleicher Richtung weiter, stellt die gleiche Linie im Spektrum zweiter Ordnung ein und liest wieder ab. Je höher die Ordnung des Spektrums, desto mehr nimmt seine Intensität ab.

Die gleichen Einstellungen und Ablesungen führt man auch aus beim Schwenken nach rechts vom nullten Maximum.

Man setzt in die Formel (1) die beobachteten Werte von φ für die entsprechenden Werte von k ein und bestimmt die Gitterkonstante.

Genauso bestimmt man noch die Winkel φ_1 und φ_2 für die beiden gelben Quecksilberlinien. Man entnimmt die Wellenlängen dieser Linien der Tabelle 36 (am Ende des Buches) und errechnet die Winkeldispersion des Gitters nach der Formel (4).

Übung 2

Die Bestimmung der Wellenlänge der Natriumlinie und des Auflösungsvermögens des Gitters

Die Messung. Man stellt ein Gitter mit bekannter Gitterkonstante auf das Spektrometertischchen, beleuchtet den Spalt mit einer Natriumflamme, bringt das Fadenkreuz des Spektrometerfernrohrs mit dem nicht abgelenkten Strahl zur Deckung und liest ab.

Dann schwenkt man nach irgendeiner Seite das Fernrohr, bis im Gesichtsfeld die beiden Linien im Spektrum erster Ordnung erscheinen. Man stellt nacheinander das Fadenkreuz auf sie ein und liest ab. Dann richtet man das Fernrohr auf die Linien im Spektrum zweiter Ordnung usw. Die gleichen Messungen führt man auch auf der anderen Seite vom nicht abgelenkten Strahl durch.

Man setzt in die Formel (1) die Gitterkonstante und die abgelesenen Werte von φ für die entsprechenden Ordnungen k ein und bestimmt die Wellenlängen der Natriumlinien.

Man berechnet die Wellenlängendifferenz $\Delta\lambda$ und bestimmt aus der Formel (3) den unteren Grenzwert des Auflösungsvermögens R des Gitters.

Um das Auflösungsvermögen eines Gitters beurteilen zu können, muß man eine Lichtquelle besitzen, deren Spektrum reich ist an eng beieinanderliegenden Linien. Damit muß man feststellen, welches Linienpaar beim Arbeiten mit dem vorliegenden Gitter, unabhängig von der Vergrößerung des Fernrohrs, uns gerade noch als eine Linie erscheint. Die Wellenlängendifferenz dieser beiden Linien ergibt die Größe $\Delta\lambda$. Es ist offensichtlich, daß in den Spektren verschiedener Ordnungen auch verschiedene Linienpaare gerade zusammenfließen, und die Größe $\Delta\lambda$ ist um so kleiner, je höher die Ordnung des betrachteten Spektrums ist. Das entspricht den allgemeinen Überlegungen über das Auflösungsvermögen eines Beugungsgitters.

Man kann das Auflösungsvermögen auch anders beurteilen: Kennt man nämlich die Gitterkonstante, und mißt man mit einem Lineal die Breite des Gitters aus, so kann man die Zahl N der Striche berechnen. (Es ist klar, daß bei dieser Berechnung von N vorausgesetzt wird, daß alle Gitterstriche ausgeleuchtet sind.) Die Ordnung k des Beugungsspektrums, die in den Ausdruck für das Auflösungsvermögen eingeht, muß dem Versuch entnommen werden. Dazu stellt man fest, welches Beugungsspektrum noch eine für die Beobachtung notwendige Intensität besitzt. (In seltenen Fällen ist k größer als 3 oder 4.

Aufgabe 80

Die Untersuchung der Emissionsspektren von Dämpfen und Gasen, die Spektralanalyse und die Eichung der Skala eines Spektroskops

Zubehör: 1. Spektroskop, 2. Bunsenbrenner, 3. Glimmlampe, 4. Linse zur Abbildung der Flamme auf den Spalt, 5. Lösungen verschiedener Salze, 6. Lösungen von Salzen für die Analyse, 7. Asbestdochte, 8. Zange zum Halten der Dochte.

Die Beschreibung des Spektroskops. Für qualitative Untersuchungen des sichtbaren Teiles des Spektrums werden Spektroskope verschiedenen Typs

verwendet. Einer der einfachsten Typen setzt sich zusammen aus folgenden Teilen: 1. Kollimatorrohr A mit Spalt S und Objektiv O_1, 2. Prisma D, 3. Fernrohr B mit Objektiv O_2 und 4. Rohr C mit Skala N und Objektiv O_3 (Abb. 284 und Abb. 285).

Der Kollimator hat die Aufgabe, das auf das Prisma D des Spektroskops fallende Lichtbündel parallel zu machen. Dazu wird der Spalt in die Brennebene des Objektivs O_1 parallel zur brechenden Kante des Prismas gestellt. Die Breite des Spaltes S läßt sich durch die Schraube x verändern (Abb. 286).

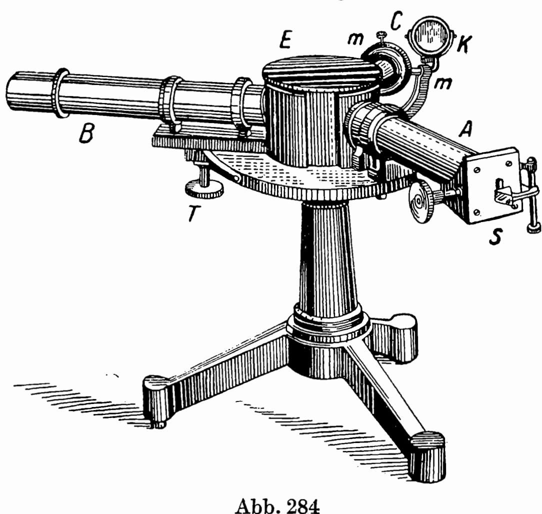


Abb. 284

Anmerkung. Das Prisma des Spektroskops wird gewöhnlich unter dem Winkel der minimalen Ablenkung aufgestellt, d. h. in der Stellung, bei der die Strahlen in einer Ebene senkrecht zur brechenden Kante (Fläche des Hauptschnittes) des Prismas durch dieses hindurchgehen. Die gebrochenen Strahlen verlaufen also im Prisma parallel zur Basis.

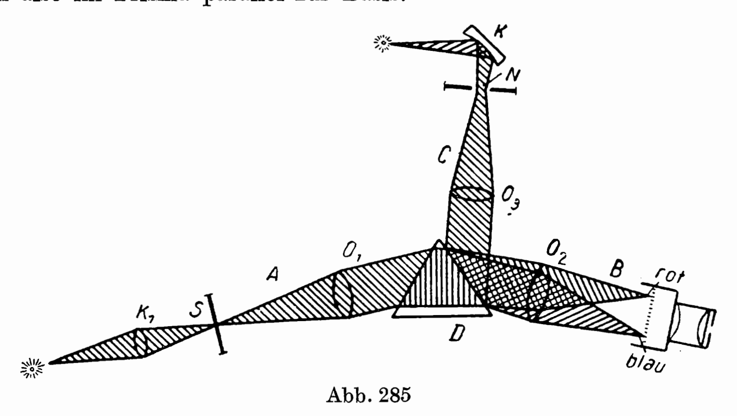


Abb. 285

Für ein Prisma, das ein optisches System ohne Symmetrieachse darstellt, gibt es kein paraxiales Strahlenbündel, für das die Aberrationsfehler des optischen Systems praktisch beseitigt sind. Werden Strahlen im Prisma gebrochen, so tritt deutlich der Astigmatismus schiefer Bündel auf (siehe Auf-

gabe 71). Die elementaren Berechnungen des Strahlenganges im Prisma werden stets für den Strahl durchgeführt, der in der Ebene des Hauptschnittes des Prismas liegt, während vom Kollimator auf das Prisma Strahlen fallen, die auch in anderen Ebenen durch das Prisma laufen. Diese Strahlen werden vom Prisma anders abgelenkt als die in der Ebene des Hauptschnittes liegenden. Deshalb ist z. B. das vom Prisma erzeugte Spaltbild in der vertikalen Ebene symmetrisch zum Mittelpunkt des Spaltes gekrümmt und erscheint zum roten Ende des Spektrums konvex.

Es ist offensichtlich für die Beobachtung eng aneinanderliegender Spektrallinien wichtig, daß die Breite der Abbildung nicht verzerrt wird.

Sowohl die beschriebenen als auch weitere Unzulänglichkeiten der Abbildungsgüte des Prismas werden bis zu einem gewissen Maße beseitigt, wenn das Prisma unter dem Winkel der minimalen Ablenkung aufgestellt wird. Doch verringert sich bei dieser Aufstellung die Dispersion des Prismas wesentlich. Aus diesem Grunde wird in einigen Fällen die oben angeführte Regel für die Aufstellung des Prismas außer acht gelassen, wenn vom Spektroskop eine große Dispersion gefordert wird.

Die vom Objektiv O_1 kommenden Strahlen fallen auf die vordere Fläche D des Prismas (Abb. 285), in dem sie zerlegt werden und aus dem sie in parallelen verschiedenfarbigen Bündeln in Richtungen austreten, die von der Wellenlänge abhängen.

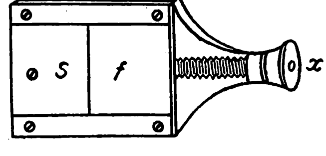


Abb. 286

Die vom Prisma kommenden Strahlen treten durch das Objektiv O_2 in das Fernrohr ein. Da die aus dem Prisma austretenden parallelen verschiedenfarbigen Bündel verschiedene Richtungen besitzen, entsteht in der Brennebene der Linse O_2 eine Reihe paralleler verschiedenfarbiger Spaltbilder. Diese Spaltbilder werden durch das Okular des Fernrohrs B betrachtet.

Zur Bestimmung der relativen Lage der Linien im Spektrum dient das Rohr C mit der Skala N (Abbildungen 284 und 285). Die in eine Glasplatte eingeritzte Skala besteht aus hellen Strichen auf dunklem Feld und wird mit Hilfe eines kleinen Spiegels K beleuchtet. Die Skala steht in der Brennebene der Linse O_3. Die von den einzelnen Punkten ausgehenden Strahlen werden von der dem Fernrohr zugewandten Fläche des Prismas reflektiert und erzeugen in der Brennebene der Linse O_2 ein reelles Bild. Hierdurch sieht das Auge durch das Okular gleichzeitig die Bilder des Spektrums und der Skala. Ein das Prisma umgebendes Gehäuse schützt dieses vor Streustrahlung.

Die Justierung des Spektroskops. Bevor das Gerät benutzt wird, muß es sorgfältig justiert werden. Dazu ist folgendes notwendig: 1. die Lichtquelle zu justieren, 2. das Fernrohr, den Kollimator und das Rohr mit der Skala auf unendlich einzustellen und 3. die Skala des Spektroskops zu justieren.

Die Justierung der Lichtquelle. Die Lichtquelle muß so aufgestellt werden, daß man ein möglichst helles Bild des Spektrums erhält. Das ist dann der Fall, wenn die Strahlen aussendende Oberfläche Q (Abb. 287) den Querschnitt des Kegels aSb vollständig ausfüllt. Der Kegel wird durch die Rand-

strahlen gebildet, die vom Spalt S zu dem Rand des Objektivs laufen. Eine solche Aufstellung der Lichtquelle ist jedoch nicht immer möglich. Es müßten kleine Lichtquellen sehr nahe an den Spalt gebracht werden. Das führt bei einigen Lichtquellen (Bogenlampe, Bunsenflamme) zur Erwärmung des Gerätes. Um die obige Forderung zu erfüllen, benutzt man folgendes Verfahren:

Vor den Kollimatorspalt setzt man genau in die Kollimatorachse eine Sammellinse (Kondensor) K_1 (Abb. 285) so, daß sie den ganzen Querschnitt des Kegels aSb ausfüllt. Ihr Abstand von dem Spalt ist dabei durch das Verhältnis bestimmt:

$$\frac{D}{d} = \frac{L}{l},$$

wobei D und d die Durchmesser der Kollimator- und der Kondensorlinse und L und l ihre Abstände vom Spalt sind. Die Lichtquelle wird so weit von der Linse entfernt aufgestellt, daß ihr scharfes Bild in der Ebene des Kollimatorspaltes erscheint. Diese Einstellung läßt sich leichter ausführen, wenn man in die Bunsenflamme einen mit einer NaCl-Lösung getränkten Asbestdocht bringt.

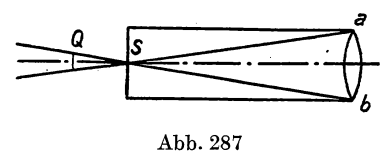


Abb. 287

Die Einstellung auf unendlich geschieht folgendermaßen: Man nimmt das Fernrohr B vom Stativ (Abb. 284) und verschiebt das ganze Okular relativ zum Objektiv, bis irgendwelche weit entfernten Gegenstände im Fernrohr scharf erscheinen. Danach wird das Fernrohr wieder an seine vorherige Stelle zurückgebracht. Man verschiebt nun das Rohrstück mit dem Kollimatorspalt, bis man im Fernrohr das Bild des von der Natriumflamme beleuchteten Spaltes scharf sieht. Nun dreht man den Spiegel K so, daß die Skala N gleichmäßig beleuchtet wird und verschiebt sie längs der Achse des Rohres C, bis die Teilstriche und Zahlen ebenfalls scharf im Fernrohr B erscheinen.

Die Justierung der Spektroskopskala. In die Bunsenflamme wird ein mit NaCl-Lösung getränkter Docht gebracht und dann das Natriumspektrum im Fernrohr beobachtet. Damit das gesamte sichtbare Spektrum mit der Skala zusammenfällt, ist es notwendig, daß die gelbe Natriumlinie mit einem Teilstrich zusammenfällt, der ungefähr in einem Abstand von einem Drittel der Skalenlänge von dem Skalenrand, der sich auf der gleichen Seite von der optischen Achse wie auch die brechende Kante des Prismas befindet, entfernt liegt. (Diese Einstellung wird deshalb gewählt, weil durch die Dispersion des Glases der gelb-rote Teil des Spektrums schmaler ist als der blaugrüne.) Man erreicht die Einstellung durch Verschieben der Skala mit Hilfe der Schrauben mm (Abb. 284).

Übung 1

Die Untersuchung des Emissionsspektrums von Metalldämpfen und die Spektralanalyse

Die Messung. Man justiert das Gerät wie beschrieben, bringt in die Bunsenflamme nacheinander Dochte, die mit allen für den Versuch ausgegebenen

Lösungen der Metallsalze getränkt sind, und liest die Lage der Spektrallinien für jedes Salz ab. Dann trägt man auf Millimeterpapier die abgelesenen Teilstriche auf und zeichnet die Lage der entsprechenden Linien ein. Diese Darstellung wird für jedes Salz im einzelnen angefertigt. Dabei muß man zwei Umstände beachten: Erstens muß man für jedes neue Salz unbedingt einen neuen Asbestdocht nehmen, sonst wird das neue Salz durch Reste des alten Salzes verunreinigt; zweitens muß man darauf achten, daß die Skala N sich nicht relativ zur Natriumlinie verschiebt. Tritt eine Verschiebung auf, so muß die Skala erneut nach der Natriumlinie eingestellt werden.

Man bringt in die Bunsenflamme Dochte, die mit Lösungen unbekannter Salze getränkt sind, bestimmt die Lage ihrer Spektrallinien auf der Skala und zeichnet sie auf Millimeterpapier auf. Man vergleicht diese Zeichnungen mit den Zeichnungen der Spektren der schon einzeln untersuchten Salze und bestimmt die Zusammensetzung der unbekannten Lösungen.

Übung 2

Die Eichung der Skala des Spektroskops mit Hilfe einer Neonlampe (Glimmlampe)

Die Neonlampe stellt eine Glimmentladungslampe dar, von der das negative Glimmlicht verwendet wird, das sich hauptsächlich auf den Raum zwischen den Elektroden konzentriert. Die Elektroden bestehen aus zwei parallel zueinander stehenden Scheiben. Die normale Stromdichte beträgt in Lampen dieses Typs 2,5 mA/cm^2. Die Stromstärke durch die Lampe wird durch einen Widerstand begrenzt, der in Reihe mit der Lampe geschaltet ist. Gewöhnlich ist der Widerstand schon in dem Fuß der Glimmlampe eingebaut.

Das Spektrum des Neons besteht aus einzelnen, größtenteils genügend starken Linien. Die Wellenlängen einiger dieser Linien sind in Tabelle 37 aufgeführt. Kennt man die Lage der Linien von bestimmter Wellenlänge auf der Skala des Spektroskops, so kann man eine Eichkurve für die Skala aufnehmen, d. h. die Skalenteile in Wellenlängen ausdrücken.

Die Messung. Das Spektroskop wird wie oben beschrieben justiert. Dann „zündet“ man die Glimmlampe und stellt sie unmittelbar vor den Kollimatorspalt des Spektroskops so auf, daß der Raum zwischen den Elektroden, in dem die Leuchtdichte am größten ist, genau vor dem Spalt liegt.

Man beobachtet durch das Fernrohr und trägt auf dem Millimeterpapier die Lage der stärksten Linien auf (die in Tabelle 37 angegeben sind).

Um die Eichkurve der Skala zu erhalten, trägt man auf der Abszissenachse die Skalenteile und auf der Ordinatenachse die Wellenlängen der angeführten Linien auf. Die einzelnen Punkte verbindet man durch eine zusammenhängende Kurve. Aus dieser Eichkurve läßt sich leicht die Wellenlänge einer unbekannten Spektrallinie bestimmen, wenn ihre Lage auf der Skala des Spektroskops bekannt ist.

Spezialliteratur

1. A. Sommerfeld: „Atombau und Spektrallinien“. Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig 1951.
2. H. Moritz: „Spektrochemische Betriebsanalyse“. Verlag F. Enke, Stuttgart 1946.

Aufgabe 81

Qualitative und quantitative Analyse von Legierungen mit dem Styloskop

Zubehör: 1. Styloskop, 2. Amperemeter für Wechselstrom von 10 A, 3. Schiebewiderstand, bemessen für eine Stromstärke von 5 A (20 Ω für Spannungen von 120 V oder 40 Ω für Spannungen von 220 V).

Die spektroskopische Methode der Analyse besteht in der Bestimmung der chemischen Zusammensetzung einer Legierung aus dem Auftreten charakteristischer Linien der Elemente in den Emissionsspektren der Legierung und in der Feststellung der Mengen der in ihr enthaltenen Elemente aus der Intensität der Spektrallinien.

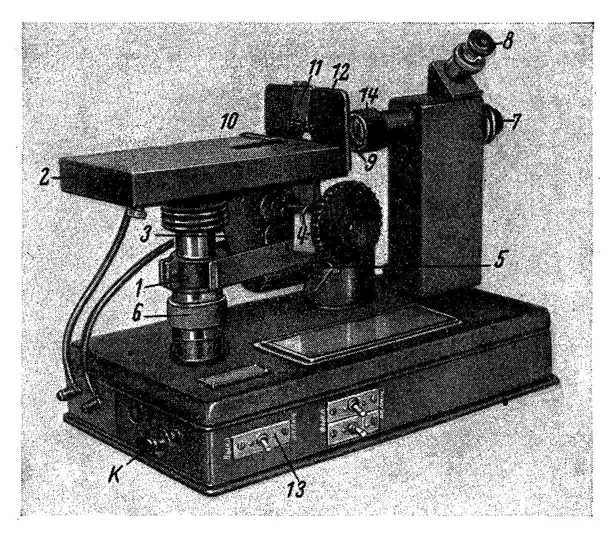


Abb. 288

Die Beschreibung der Geräte. Das Styloskop ist ein Gerät, mit dem eine rasche qualitative und halbquantitative Analyse durchgeführt werden kann. Das Prinzip der Wirkungsweise des Gerätes besteht in folgendem: Zwischen dem zu untersuchenden Objekt und einer Scheibe aus reinem Kupfer läßt man einen elektrischen Bogen übergehen. Das Licht dieses Bogens wird auf den Spalt eines Spektralapparates abgebildet. Das erhaltene Spektrum wird mit den dem Gerät beigefügten Standardspektren verglichen. Durch diesen Vergleich läßt sich bestimmen, ob in dem Spektrum charakteristische Linien bestimmter Elemente vorhanden sind.

Das Autokollimationsstyloskop, das in dieser Aufgabe verwendet wird (Abb. 288), ist zur Analyse legierter Stähle für folgende Elemente bestimmt: Cr, Ni, W, V, Mo, Mn, Ti und Si. Es besteht aus einer Säule (1), die einen Tisch (2) trägt, auf den das zu untersuchende Objekt gelegt wird, einer scheibenförmigen Elektrode aus reinem Kupfer, die durch einen Dreh-

knopf gedreht und durch einen Stopper festgestellt werden kann (3, 4, 5), und aus einem drehbaren Ring (6) zum Heben und Senken der Scheibe. Auf dem Tisch ist eine Markierung für das Auflegen des Objektes (10) angebracht und auf dem Schirm (12) ein Zeiger (11), um zu kontrollieren, wie die Scheibe relativ zur optischen Achse des Spektroskops liegt.

Die Anwendung einer Kupferelektrode ist bei der Analyse von Stählen dann notwendig, wenn es gilt, kleine Mengen der in der Legierung enthaltenen Elemente zu bestimmen. Elektrolytisches Kupfer ist frei von Beimengungen. Deshalb bringt die daraus gefertigte Elektrode in das betrachtete Spektrum keine zusätzlichen Spektrallinien von fremden Beimengungen. Außerdem erwärmen sich Kupferelektroden wegen der guten Wärmeleitfähigkeit weniger als Eisenelektroden und strahlen aus diesem Grunde ein schwächeres Kontinuum aus. Die Kupferscheibe und das zu untersuchende Objekt bilden die zwei Elektroden des Bogens.

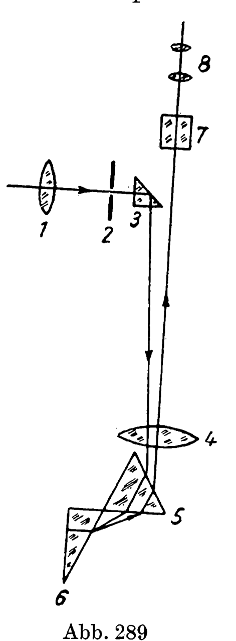


Abb. 289

Das Licht geht vom Bogen durch den Spalt 9 (Abb. 288), den Kondensor 1 (Abb. 289), den zweiten Spalt 2, das Prisma 3 und das Objektiv 4, das das Objektiv des Kollimators darstellt. Hinter dem Objektiv geht das parallele Lichtbündel durch die Prismen 5 und 6. Das Prisma 5 ist ein 60°-Prisma und das Prisma 6 ein 30°-Prisma, dessen eine Fläche (die größere Kathete) versilbert ist. Das durch beide Prismen gegangene Lichtbündel wird von der versilberten Fläche reflektiert und geht wieder durch die gleichen Prismen in umgekehrter Richtung. Deshalb ist dieses Prismensystem einem System, bestehend aus drei 60°-Prismen, äquivalent. Das zerlegte Lichtbündel geht wieder durch das gleiche Objektiv, das in diesem Fall das Objektiv des Fernrohrs darstellt. Das Prisma 7 lenkt das Lichtbündel um 45° ab und wirft es in das Okular 8, das einen Ring zur Fokussierung der Spektren besitzt (siehe die Abbildungen 288 und 289). Der Drehknopf, der mit der Teiltrommel 7 (Abb. 288) verbunden ist, dient zur Drehung des Prismas, d. h. zur Verschiebung des Spektrums im Gesichtsfeld des Okulars. Das Okular ist mit einer Markierung versehen, auf die die einzelnen Spektrallinien eingestellt werden.

Die Lichtquelle. Beim Arbeiten mit dem Styloskop wird zur Anregung der Spektren am häufigsten eine Bogenentladung (seltener eine Funkenentladung) benutzt. Gespeist wird der Bogen mit einer Wechselspannung von 120 oder 220 V.

Da der Bogen zwischen den Metallelektroden bei Wechselstrom von kleinen Stromstärken (Größenordnung 5 bis 6 A) nicht gezündet werden kann, muß zur Zündung eine hohe Spannung an die Elektroden gelegt werden. Diese Spannung liefert ein besonderer Generator von geringer Leistung, der mit *Aktivisator* bezeichnet wird.

Der Aktivisator ist ein Funkensender, der gedämpfte Hochfrequenzschwingungen liefert. Diese Schwingungen bestehen aus einzelnen Hochfrequenzimpulsen, deren Spannung über einen Hochfrequenztransformator an die Elektroden des Bogens gelegt wird. Diese Spannung genügt, um einen Durchschlag zwischen den Elektroden zu erzeugen und damit eine Möglichkeit des Durchganges für den vom gewöhnlichen Netz gelieferten Strom zu schaffen. Der Hochfrequenzstrom ist physiologisch unschädlich. Deshalb stellt der Hochfrequenzteil der Schaltung keine Gefahr für den arbeitenden Praktikanten dar.

Die Schaltung des Aktivisators ist in Abb. 290 angeführt. Der Strom fließt vom Wechselstromnetz (120/220 V) über den Netzschalter durch die Primärwicklung I eines Transformators geringer Leistung. Durch ihn wird die Spannung auf 2500 V herauftransformiert. Diese Spannung lädt den Kondensator C_1

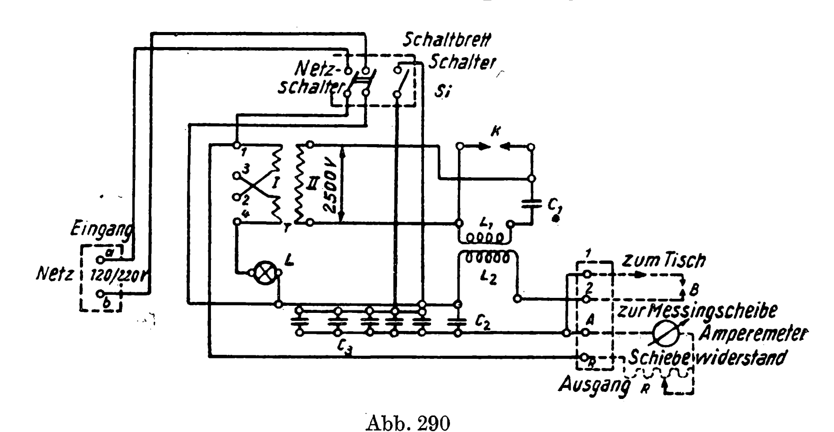


Abb. 290

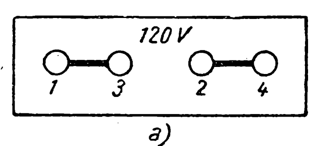
auf. Ist die Durchschlagsspannung der Funkenstrecke K erreicht, so entlädt sich der Kondensator. Im Moment der Entladung von C_1 über L_1 und die Funkenstrecke K entstehen in dem Schwingungskreis $L_1 C_1 K$ gedämpfte Hochfrequenzschwingungen. Diese Schwingungen werden von der Spule L_1 auf die mit ihr induktiv gekoppelte Spule L_2 übertragen. Die Spannung an den Enden der Spule liegt, weil der Abblockkondensator C_2 zwischengeschaltet ist, auch an den Elektroden des Bogens B und bewirkt den Durchschlag.

Nach dem Durchschlag fließt ein Strom vom Netz über den Netzschalter, die Spule L_2 und die Klemme 2 zum Bogen B und von ihm zur Klemme 1. Dann fließt er über das Amperemeter, den Schiebewiderstand zur Klemme R und von ihr zurück zu dem zweiten Hebel des Netzschalters. Der Kondensator C_2 verhindert, daß die Hochfrequenz über das Netz abfließt.

Die Glühlampe L (50 bis 60 W) stellt einen Widerstand im Kreis der Primärwicklung des Transformators dar. Sie verleiht dem Transformator I—II die entsprechende Charakteristik (fallende Widerstands-Charakteristik). Hat das Netz eine Spannung von 120 V, so wird der Transformator nach Abb. 291 a geschaltet. Hat das Netz eine Spannung von 220 V, so wird er nach Abb. 291 b geschaltet.

Im Bogen werden die meisten Spektrallinien, die zur Analyse benötigt werden, angeregt (Bogenspektren); doch wird auch eine ganze Reihe von Spektrallinien nur in einem kondensierten Funken angeregt (Funkenspektrum). Dazu gehört z. B. eine Spektrallinie des Siliziums ($\lambda_{Si} = 6340$ Å). Um vom Wechselstrombogen zum Funken übergehen zu können, wird die Kondensatorreihe C_3 verwendet, die parallel zum Abblockkondensator C_2 geschaltet wird. Das Ein- und Ausschalten der Kondensatoren C_3 geschieht durch den Schalter 13 (Abb. 288), an dem die Bezeichnung *Si* steht (Abb. 290).

Wenn der Bogen richtig arbeitet, was sich durch Regulierung der Funkenstrecke *K* (siehe Abb. 288) erreichen läßt, dann erzeugt der Bogen bei normaler Stromstärke von 5 A einen gleichmäßigen summenden Ton, und die Schwankungen der Stromstärke sind nicht größer als einige Zehntel Ampere.



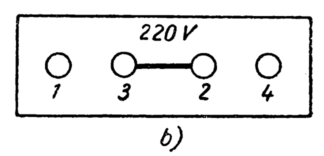


Abb. 291. Schaltung des Transformators.

Beim Schließen des Schalters *Si* muß der Bogen von selbst in einen Funken übergehen, wobei die Stromstärke auf 2 bis 3 Ampere absinkt. Geht der Bogen nicht von selbst in einen Funken über, so muß die Stromstärke mit Hilfe des Schiebewiderstandes *R* verkleinert werden. Der Strom springt dabei auf den notwendigen kleineren Wert, und der Bogen geht in einen Funken über.

Da sich bei der Funkenentladung die Elektroden nur unwesentlich erwärmen, läßt sie sich für die Analyse von leicht schmelzbaren Legierungen verwenden; jedoch ist dabei die Intensität der Spektrallinien viel geringer als bei der Bogenentladung.

Die Justierung des Gerätes. Die Justierung der Scheibe geschieht auf folgende Weise: Man zieht den Drehknopf 4 (Abb. 288) ein Stück heraus, setzt die Scheibe in die Halterung ein und dreht an dem Ring 6, bis die Scheibe den Zeiger 11 berührt. Dabei steht der Zeiger in seiner untersten Stellung.

Vor jeder Analyse muß die Scheibe durch den Drehknopf ein Stück weitergedreht werden, damit der Bogen zu einer reinen Stelle der Scheibe übergeht. Gesäubert wird die Scheibe entweder mit einer Feile oder einem Schmirgelstein, wobei man sie entweder von Hand säubert oder in eine Vorrichtung einspannt, in der sie gedreht werden kann. Wenn die gesamte Oberfläche der Scheibe benutzt worden ist (nach einer vollen Umdrehung der Scheibe), wird sie ausgewechselt oder direkt im Gerät gesäubert, nachdem man sie durch den Stopper 5 festgeklemmt hat. (Der Drehknopf 4 läßt sich dabei nicht drehen.)

Das zu untersuchende Werkstück wird so auf den Tisch gelegt, daß die zu analysierende Stelle sich in der Markierung 10 des Tisches befindet. Der Abstand zwischen den Elektroden beträgt gewöhnlich 2 bis 3 mm. Bei dem Styloskop stellt sich dieser Abstand automatisch ein.

Man schließt sowohl den Netzschalter als auch den Schalter des Aktivisators. Dabei entsteht zwischen den Elektroden der Funkenstrecke *K* ein kleiner Funke, und zwischen den Bogenelektroden muß der Bogen zünden, wenn der

Abstand zwischen den Elektroden der Funkenstrecke K richtig eingestellt ist (ungefähr 0,5 mm). Man dreht an dem Knopf der Funkenstrecke K, bis der Zeigerausschlag des Amperemeters die kleinsten Schwankungen zeigt.

Man muß dabei im Auge behalten, daß an die Elektroden der Funkenstrecke eine Spannung von 2500 V niedriger Frequenz angelegt wird, die eine Gefahr darstellt. Deshalb ist das Berühren der Elektroden kategorisch verboten. Wenn mit der Zeit das Brennen des Bogens unruhiger wird, muß die Funkenstrecke nachreguliert werden.

Anmerkung. Es ist für die Sicherheit besser, das Styloskop so an das Netz von 220 V anzuschließen, daß der geerdete Nulleiter mit der Klemme A des Ausganges verbunden ist und die Phase mit der Klemme R. Dann besitzt das Tischchen, auf das das zu untersuchende Werkstück gelegt wird, keine Spannung gegenüber Erde. Folglich ist es ungefährlich, das Tischchen zu berühren, auch wenn eventuell der Aktivisator aus Versehen nicht ausgeschaltet worden ist.

Trotzdem muß beim Wechsel der Werkstücke der Aktivisator unbedingt ausgeschaltet werden.

Die Durchführung der Analyse. Zur Analyse legierter Stähle auf die Elemente Cr (Chrom), Ni (Nickel), W (Wolfram), Mo (Molybdän), Mn (Mangan), Ti (Titan) und Si (Silizium) werden einige Liniengruppen verwendet (Tabelle 42), die in verschiedenen Spektralbereichen liegen. Gewöhnlich dient jede Liniengruppe zur Bestimmung eines Konzentrationsbereiches.

Will man irgendein Element analysieren, so sucht man sich aus der Tabelle 40 die für das Element charakteristische Liniengruppe aus und stellt dann aus der dem Gerät beigegebenen Tabelle die Trommelteilung 7 (Abb. 288) so ein, daß diese Liniengruppe im Gesichtsfeld des Okulars erscheint.

Hat man die in der Tabelle 40 aufgeführten Linien im Spektrum gefunden, so vergleicht man ihre Intensität mit der Intensität der entsprechenden Linien des Eisens, die ebenfalls in der Tabelle angegeben sind.

In der Tabelle 41, die den Zeichnungen der Tabelle 42 entspricht, sind die Verhältnisse der Intensitäten der zur Analyse benutzten Linien eines vorliegenden Elementes zu denen des Eisens und der diesen Verhältnissen entsprechende prozentuale Gehalt der zu analysierenden Elemente im Werkstück angegeben.

In der Tabelle 41 steht links stets die Linie des zu bestimmenden Elementes und rechts die zum Vergleich heranzuziehende Eisenlinie. Das Zeichen $=$ gibt an, daß die Intensität beider Linien gleich ist; das Zeichen $<$ gibt an, daß die Intensität der links stehenden Linie kleiner ist als die Intensität der rechts stehenden; das Zeichen $>$ gibt an, daß die Intensität der links stehenden Linie größer ist als die Intensität der rechts stehenden; das Zeichen $\leqq$ gibt an, daß die Intensität der links stehenden Linie kleiner oder gleich, und das Zeichen $\geqq$, daß sie entsprechend größer oder gleich der Intensität der rechts vom Zeichen stehenden Linie ist.

Für jedes Werkstück muß die Abschätzung nach allen Linien durchgeführt werden, die in der entsprechenden Liniengruppe der Tabelle enthalten sind.

Für die meisten oben aufgezählten Elemente erscheinen diese Linien im Spektrum bei Konzentrationen der Größenordnung einiger Zehntel oder

Hundertstel Prozent. Daher kann das Vorhandensein dieser Elemente mit großer Genauigkeit festgestellt werden.

Bei der Durchführung der Analyse muß man darauf achten, daß das Gesichtsfeld gleichmäßig ausgeleuchtet und genügend hell ist. Wenn das bei richtiger Stellung der Scheibe, relativ zur optischen Achse des Gerätes, nicht der Fall ist, muß man versuchen, durch Drehen an der Einfassung des Kondensators 14 (Abb. 288) eine gleichmäßige Ausleuchtung des Gesichtsfeldes zu erreichen.

Bei der Einstellung eines neuen Spektralbereiches muß man jedesmal die größtmögliche Schärfe der Linien mit dem Okular einstellen.

In einigen Fällen, bei denen die Erwärmung und die Beschädigung der Oberfläche durch den Bogen nicht erwünscht ist, ist es vorteilhafter, bei eingeschalteter Zusatzkapazität C_3 zu arbeiten. Hierbei ist die Beschädigung und die Erwärmung des Werkstückes praktisch unbedeutend.

Wir führen nun die genauere Beschreibung der Analyse für jedes Element in der Reihenfolge ihrer Bestimmung an.

Analyse auf Molybdän. Die Analyse auf Molybdän muß im ersten Moment nach dem Einschalten des Bogens durchgeführt werden, weil die Intensität der Molybdänlinien gerade in diesem Moment besonders konstant ist.

Analyse auf Nickel. Die Analyse auf Nickel muß zwischen einer und zwei Minuten nach dem Einschalten des Bogens durchgeführt werden. Das ist dadurch bedingt, daß die Intensität der Nickellinien sich während der Brenndauer des Bogens ändert und in dem angegebenen Zeitintervall nahezu konstant ist.

Analyse auf Chrom, Mangan, Wolfram, Vanadium und Titan. Die Analyse dieser Elemente kann nach 40 bis 60 sec nach dem Einschalten des Bogens durchgeführt werden.

Analyse auf Silizium. Zur Analyse auf Silizium wird der Zusatzschalter *Si* geschlossen und damit der Kondensator C_3 parallel zum Bogen gelegt. Dabei wird der Schalter *Si* alle 20 bis 30 sec neu eingeschaltet.

Für jedes untersuchte Werkstück wird eine besondere Tabelle angefertigt, in die die Ergebnisse der Analyse eingetragen werden.

Aufgabe 82

Die Untersuchung von Absorptionsspektren mit dem Handspektroskop und die Herstellung von Lichtfiltern

Zubehör: 1. Handspektroskop, 2. Glühlampe (kontinuierliches Spektrum), 3. Natriumflamme, 4. Anzahl von flüssigen und dampfförmigen Stoffen in abgeschmolzenen Röhren, 5. keilförmiges Gefäß mit einer Lösung von Kaliumpermanganat, 6. Farbstofflösungen, 7. zwei planparallele Küvetten.

Mit *Absorptionsspektrum* eines Stoffes wird die Gesamtheit aller dunklen Linien und Banden bezeichnet, die auftreten, wenn kontinuierliches Licht durch das absorbierende Medium geschickt wird. Die dunklen Linien und Banden entstehen durch Absorption bestimmter Frequenzen aus dem durch

den zu untersuchenden Stoff hindurchgeschickten Licht. Die Untersuchung der Absorptionsspektren besteht in der Bestimmung der Lage der absorbierten Linien und Banden im Spektrum und in der Bestimmung der Größe der Absorption.

Die Absorptionsspektren werden, wie auch die Emissionsspektren, unterteilt in folgende drei Typen: kontinuierliche Spektren, Bandenspektren und Linienspektren.

Die Linienspektren werden den Atomen und Ionen, die Bandenspektren den Molekülen und die kontinuierlichen Spektren den dichten Medien — festen und flüssigen Körpern — zugeschrieben.

In den Absorptionsspektren der Moleküle beobachtet man Systeme von Liniengruppen. Diese Gruppen werden *Banden* genannt. In vielen Fällen liegen die Linien in den Gruppen so dicht nebeneinander, daß sie nur durch sehr stark auflösende Spektralapparate getrennt werden können. Die Absorptionsspektren der dichten Medien bestehen gewöhnlich auch aus Banden, jedoch besitzen diese Banden kontinuierlichen Charakter und lassen sich auch nicht bei Anwendung von Spektralapparaten mit hohem Auflösungsvermögen in einzelne Linien trennen.

Die wesentlichsten Größen, die den Charakter der Absorptionsspektren beeinflussen, sind folgende:

1. Die Schichtdicke. Je dicker die absorbierende Schicht, um so dunkler und breiter sind die Absorptionsbanden. Bei sehr dicken Schichten können mehrere Banden in eine einzige zusammenfließen. Diese Erscheinung läßt sich leicht beobachten, wenn man eine Kaliumpermanganatlösung in ein keilförmiges Gefäß gießt und dieses Gefäß vor dem Spalt des Spektroskopes in einer Halterung verschiebt.

2. Die Konzentration des gelösten Stoffes. Die Erhöhung der Konzentration des gelösten Stoffes wirkt genauso, wie eine Verbreiterung der Absorptionsschicht. In beiden Fällen ist der Grund für die Veränderung die Zunahme der Menge des absorbierenden Stoffes. Zum Beispiel zeigt eine starke Lösung von Kaliumpermanganat eine dunkle Bande, die vom orangenen bis zum blauen Teil des Spektrums reicht, und für eine schwache Lösung zerfällt diese Bande in mehrere (fünf oder sechs) Banden, die im grünen Teil liegen.

3. Das Lösungsmittel. Der Einfluß des Lösungsmittels auf die Lage und die Form der Absorptionsbanden läßt sich leicht an folgenden Beispielen erkennen: Löst man Safranin in Wasser, so erhält man eine sehr breite, verwaschene Bande, die fast den gesamten grünen Spektralbereich einnimmt, und löst man Safranin in Alkohol, so erhält man zwei ziemlich dunkle und schmale Banden im gelb-grünen Spektralbereich. Eine Lösung von Jod in Alkohol läßt nur gelbe und rote Strahlen hindurch, und sogar in sehr schwacher Lösung werden alle blauen und violetten Strahlen absorbiert. Eine Lösung von Jod in Schwefelwasserstoff läßt die blauen und violetten Strahlen hindurch und absorbiert die grünen.

Die Beschreibung der Anordnung. Das Handspektroskop besteht aus zwei Rohren AA (Abb. 292), die ineinandergleiten. Das vordere Rohr trägt den Spalt i, dessen Breite durch Drehen des Ringes ff verändert werden kann. Das hintere Rohr trägt die Linse b, das Geradsichtprisma[1]) und die Öffnung c

[1]) Anm. d. Übers.: Amici-Prisma.

zur Beobachtung des Spektrums. Die eine Hälfte des Spaltes ist von einem total reflektierenden Prisma bedeckt. Deshalb gelangt ein Lichtbündel von der vor dem Spalt stehenden Lichtquelle direkt in das Spektroskop, und das andere wird von dem Spiegel *v* reflektiert, geht durch das Seitenfenster *m* hindurch, fällt auf das Prisma, wird total reflektiert und gelangt schließlich durch die zweite Hälfte des Spaltes in das Spektroskop.

Die beiden durch den geöffneten und durch den bedeckten Teil des Spaltes gehenden Lichtbündel verlaufen im Rohr *AA* längs der Rohrachse, gehen durch das Prisma *a* und erzeugen im Gesichtsfeld zwei horizontale aneinandergrenzende, streifenförmige Spektren. Das untere Spektrum wird von dem ersten und das obere von dem zweiten Lichtbündel erzeugt.

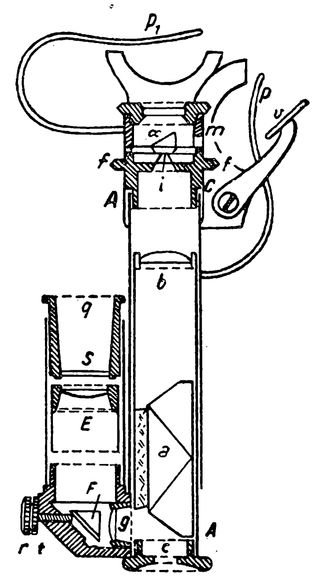


Abb. 292

In den Strahlengang eines Lichtbündels wird der Stoff gebracht, dessen Absorptionsspektrum untersucht werden soll. Dazu wird er unter eine der Federn (p oder p_1) geklemmt. Hierbei erscheint im Gesichtsfeld gleichzeitig das Absorptionsspektrum des Stoffes und das normale (nicht absorbierte) Spektrum. Letzteres dient zum Vergleich und zur Bestimmung der Größe der Absorption in den verschiedenen Spektralbereichen.

In dem seitlich angebrachten kurzen Rohr steckt ein verschiebbares Skalenrohr *q* mit der Skala *S* und das Okular zur Betrachtung der Skala, das aus den beiden Linsen *E* und *g* besteht. Das total reflektierende Prisma *F* ändert die Strahlenrichtung um 90°, wie die Abbildung 292 deutlich zeigt. Das von der beleuchteten Skala kommende Lichtbündel wird sowohl im Prisma *F* als auch an der hinteren Fläche des Prismas *a* reflektiert und erzeugt im Gesichtsfeld an der Stelle des oberen streifenförmigen Spektrums das Bild der Skala.

Durch die Schraube *r* läßt sich das Prisma *F* um die senkrecht zur Zeichenebene stehende Achse drehen. Damit läßt sich die Skala längs des Spektrums verschieben und an jeder beliebigen Stelle durch die Gegenmutter *t* feststellen. Die Skala ist in Wellenlängen geteilt (eine sogenannte Normalskala), und jedem Abstand zwischen zwei benachbarten Teilstrichen entsprechen 10 nm (Nanometer, $1\,\mathrm{nm} = 10^{-9}\,\mathrm{m}$). Wenn man die Skala genau justiert hat (die Natriumlinie *D* muß auf dem Teilstrich 590 stehen), läßt sich sofort die Wellenlänge ablesen.

Die Justierung des Gerätes. Das Gerät wird auf eine Mattscheibe gerichtet, hinter der eine Natriumflamme brennt. Man verschiebt das Skalenrohr *q*, bis die Teilstriche der Skala *S* scharf eingestellt sind.

Dann schiebt man das Spaltrohr *AA* zusammen oder auseinander, bis man ein scharfes Spaltbild erhält und stellt die kleinstmögliche Spaltbreite durch

Drehen an dem Ring *ff* ein. Man schwenkt den Spiegel *v*, bis man die zweite (vom Prisma *a* bedeckte) Hälfte des Spaltbildes erhält. Dann versucht man durch Zusammen- oder Auseinanderschieben des Rohres *AA* (oder *q*) die Parallaxe auszuschließen, d. h. eine Verschiebung des Spaltbildes gegenüber den Skalenteilen bei der Bewegung des Auges längs der Okularöffnung zu vermeiden. Mit der Schraube *r* stellt man die Skala so ein, daß das Spaltbild auf den Skalenteil 590 fällt, und zieht die Gegenmutter an. Man löscht die Natriumflamme aus und richtet das Spektroskop auf eine kontinuierliche Lichtquelle. Es muß dann ein vollständiges Spektrum zu sehen sein, das aus zwei horizontalen Streifen gleicher Helligkeit besteht.

Nach der Justierung des Gerätes klemmt man ein Reagenzglas mit der zu untersuchenden Lösung unter eine der Federn p_1 oder p und beginnt mit der Messung.

Übung 1

Die Untersuchung der Absorptionsspektren

Die Hauptaufgabe dieser Übung ist die allgemeine Untersuchung der Absorptionsspektren. Alle Untersuchungen tragen qualitativen Charakter.

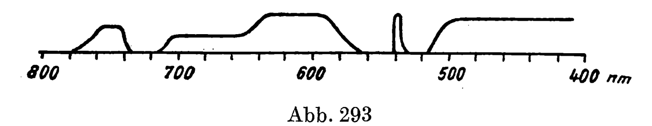


Abb. 293

Die Messung. Man klemmt unter eine Feder des Gerätes nacheinander mehrere Reagenzgläser mit verschiedenen Lösungen, betrachtet ihr Spektrum und bestimmt nach der Skala die Lage der Absorptionsbanden, ihre Breite und (nach Augenmaß) auch die Stärke der Absorption.

Die Ergebnisse der Untersuchungen der Spektren werden graphisch dargestellt. Man trägt auf der Abszissenachse die Wellenlänge und auf der Ordinatenachse die Stärke der Absorption auf. Das Absorptionsspektrum wird durch eine Kurve dargestellt (Abb. 293), deren größte Ordinate für die Stelle der stärksten Absorption gewählt wird. Für die Länge der Ordinate, die völliger Auslöschung entspricht, wird ein willkürlicher Wert genommen. Eine schwächere Absorption wird durch eine niedrigere Kurve dargestellt, d. h. durch kleinere Ordinaten. Dabei wird die Ordinatenlänge nach Augenmaß in Abhängigkeit von der Stärke der Absorption gewählt.

Übung 2

Die Herstellung von Lichtfiltern

Die Messung. Man gießt in die planparallele Küvette nacheinander verschiedene Farbstofflösungen, stellt sie vor den Spalt des Spektroskops und zeichnet die beobachteten Absorptionsspektren auf.

Man vergleicht die erhaltenen Spektren untereinander und sucht sich ein solches Paar von Lösungen aus, bei dem nach dem Übereinanderlegen der Kurven ein enger, nach Möglichkeit zu beiden Seiten scharf begrenzter Durchlaßbereich entsteht.

Zur Prüfung füllt man zwei planparallele Küvetten mit den ausgesuchten Lösungen, beobachtet und zeichnet das entstehende Spektrum auf.

Aufgabe 83

Die Untersuchung des Absorptionsspektrums von Lösungen mit einem Photometer

Zubehör: 1. Photometer, 2. Anzahl von Reagenzgläsern mit Lösungen: wäßrige Lösung von Fuchsin, wäßrige Lösung von Methylviolett, zwei Lösungen von Kupfersulfat und zwei Lösungen von Kobaltrhodanid verschiedener Konzentration, Lösung von Jod in Alkohol und in Tetrachlorkohlenstoff, Lösung von Chlorophyll in Alkohol.

Einführung. Die Aufgabe besteht darin, die Absorptionsspektren von Farbstofflösungen zu erhalten und den Einfluß des Lösungsmittels und der Konzentration des gelösten Stoffes zu untersuchen.

Die unmittelbar meßbare Größe ist die Durchlässigkeit D der Lösung als Funktion der Wellenlänge. Die Durchlässigkeit ist:

$$D = \frac{\Phi}{\Phi_0},$$

wobei Φ_0 der auf die Lösung auffallende Lichtstrom und Φ der durch die Lösung hindurchgegangene Lichtstrom bedeuten. Die Durchlässigkeit der Lösung D hängt mit dem Absorptionskoeffizienten K_λ und der Dicke der absorbierenden Schicht L durch die Beziehung zusammen:

$$D = \frac{\Phi}{\Phi_0} = e^{-K_\lambda L} \tag{1}$$

(siehe Aufgabe 84).

Wenn die Moleküle des Absorbers weder miteinander noch mit den Molekülen des Lösungsmittels in Wechselwirkung stehen, hängt der Absorptionskoeffizient von der Konzentration C des Absorbers linear ab:

$$K'_\lambda = x_\lambda C, \tag{2}$$

wobei x_λ ein Proportionalitätsfaktor ist, der von λ abhängt. Das erste Gesetz (1) wird neuerdings gewöhnlich in der Form geschrieben:

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = 10^{-K'_\lambda L},$$

wobei K'_λ mit K_λ folgendermaßen zusammenhängt:

$$K'_\lambda = K_\lambda \cdot \lg e = 0{,}43\, K_\lambda.$$

Die Größe K'_λ wird *Extinktions-* oder *Absorptionskoeffizient* und die Größe

$$E = \lg \frac{\Phi_0}{\Phi} = K'_\lambda L$$

die *Extinktion* der Lösung genannt.

Die Beschreibung des Gerätes. In der vorliegenden Aufgabe werden die Messungen mit einem besonderen Photometer[1]) (Stufenphotometer) ausgeführt. Die schematische Darstellung des Photometers und seiner Beleuchtungseinrichtung ist in Abb. 294 wiedergegeben.

Zwei Lichtbündel, die von der Lampe kommen und an den Spiegeln reflektiert werden, gehen durch Blenden mit einstellbarer Öffnung und werden mit Hilfe zweier optischer Systeme im Biprisma vereinigt. Der Beobachter sieht im Okular zwei Felder, zwischen denen eine scharfe Trennungslinie liegt (die Kante des Biprismas). Die linke Hälfte des Gesichtsfeldes ist von dem durch das rechte Fenster des Photometers eintretenden Lichtbündel beleuchtet und die rechte Hälfte von dem durch das linke Fenster eintretende Lichtbündel. Ändert man die Größe der Öffnung jeder Blende, d. h. den Querschnitt des entsprechenden Bündels, so kann man damit die Helligkeit jeder Gesichtsfeldhälfte verändern. Damit läßt sich ein photometrischer Vergleich beider Lichtströme durchführen. Wenn der eine Lichtstrom kleiner ist als der zweite, zum Beispiel als Folge der Absorption in dem im Strahlengang stehenden Medium, dann läßt sich durch Veränderung der Blendenöffnung in dem zweiten Strahlengang die Helligkeit beider Gesichtsfeldhälften angleichen. Aus der Größe der Veränderung der Blendenöffnung kann man das Verhältnis beider Lichtströme bestimmen. Die vor dem Okular stehenden auswechselbaren Filter gestatten es, diese Messungen in verschiedenen Spektralbereichen durchzuführen.

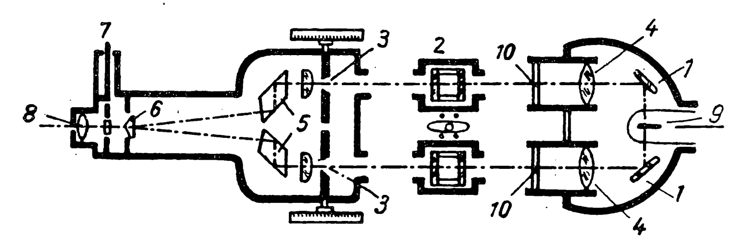


Abb. 294. Das Stufenphotometer: *1* — Beleuchtungsspiegel; *2* — Tischchen für die Küvetten mit Lösungen; *3* — Blenden mit veränderlicher Öffnung; *4* — Objektive; *5* — Umlenkprismen; *6* — Biprisma; *7* — auswechselbares Filter; *8* — Okular, das auf die Kante des Biprismas scharf eingestellt ist; *9* — Bandfadenlampe; *10* — Mattscheiben.

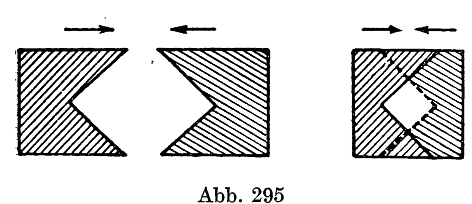


Abb. 295

Die Konstruktion der veränderlichen Blende ist in Abb. 295 dargestellt. Durch eine Umdrehung der Trommel wird die Blende vollständig geöffnet; und das ist dann der Fall, wenn ihre beiden Hälften sich nicht mehr überschneiden, sondern einander nur berühren. Der durch die Blende tretende

[1]) Anm. d. Übers.: Pulfrich-Photometer.

Lichtstrom ist der Fläche der Öffnung proportional: $\Phi \sim d^2$. Die Größe d hängt mit dem Winkel α der Trommelumdrehung linear zusammen, folglich ist $\Phi \sim \alpha^2$. Die Trommelskala (von 0 bis 100) ist so geeicht, daß die Zahlen (schwarze Skala) dem hindurchgehenden Lichtstrom unmittelbar proportional sind. Neben der schwarzen Skala ist noch eine rote Skala aufgetragen, deren Teilstrichabstände a_E mit den Teilstrichabständen der schwarzen Skala a_D (beide Skalen sind in der Zeichnung nicht aufgeführt) durch die Beziehung verknüpft sind:

$$a_E = \lg \frac{100}{a_D} = 2 - \lg a_D .$$

Wenn man zum Beispiel bei Absorptionsmessungen in den einen Strahlengang, dessen Blende auf dem Teilstrich 100 steht, die absorbierende Lösung bringt und durch Drehen der zweiten Trommel die Helligkeit beider Gesichtsfeldhälften angleicht, dann kann man an der schwarzen Skala dieser Trommel a_D ablesen und erhält unmittelbar die Durchlässigkeit der Lösung, ausgedrückt in %:

$$a_D = \frac{\Phi}{\Phi_0} \cdot 100 = D\,\%.$$

Liest man an der roten Skala ab, so erhält man unmittelbar die Extinktion der Lösung:

$$a_E = 2 - \lg a_D = \lg \frac{\Phi_0}{\Phi} = E; \quad \lg \frac{1}{D} = E.$$

Um die spektrale Durchlässigkeits- oder Extinktionskurve zu erhalten, benutzt man sogenannte S- oder M-Filter, die in einer Revolverblende stecken. Der Durchlässigkeitsbereich dieser Filter ist relativ schmal. Für die verschiedenen Filter liegt die Halbwertsbreite zwischen 20 und 40 nm. Deshalb kann man bei der Untersuchung von Lösungen mit relativ breiten und glatt verlaufenden Absorptionsbanden die gemessene Größe auf die *effektive Wellenlänge des Filters* beziehen, welche auf der Fassung des Filters durch Zahlen gekennzeichnet ist, die dem Buchstaben S (oder M) folgen. So ordnet man z. B. dem Filter S-72 die effektive Wellenlänge $\lambda = 720$ nm und dem Filter S-66 entsprechend $\lambda = 660$ nm zu usw. Die S-Filter sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Nr.	Lichtfilter	λ in nm
1	S-75	750
2	S-72	720
3	S-66	660
4	S-61	610
5	S-57	570
6	S-53	530
7	S-50	500
8	S-47	470
9	S-42	420

Die Justierung des Gerätes. Um eine Messung mit genügender Genauigkeit ausführen zu können, muß die anfängliche Leuchtdichte beider Gesichtsfeldhälften gleich sein. Dazu muß das Gerät sorgfältig justiert werden. Das geschicht folgendermaßen:

Man legt mit Hilfe eines Transformators an die Lampe der Beleuchtungseinrichtung eine niedrige Spannung, nimmt das Photometer vom Stativ und

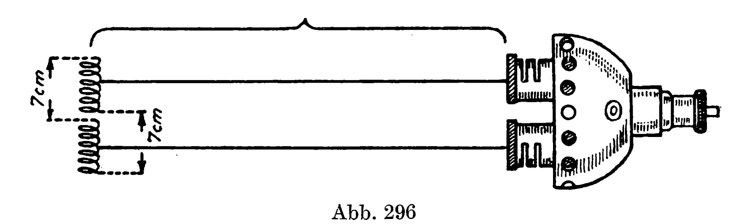


Abb. 296

wirft die von der Beleuchtungseinrichtung kommenden Lichtbündel auf ein in 1 m Entfernung senkrecht angebrachtes Blatt Papier. Man verschiebt die Einsätze mit den Kondensoren, bis man zwei scharfe Bilder des Lampenfadens erhält. Dann verrückt man die Lampe und nähert beide Bilder einander oder entfernt sie voneinander, bis die Entfernung zwischen den rechten oder linken Rändern beider Bilder 7 cm beträgt (Abb. 296).

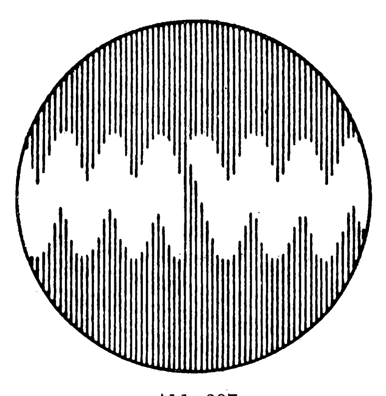


Abb. 297

Man stellt das Photometer auf das Stativ zurück, bringt das Filter *S*-57 in den Strahlengang und versucht, in beiden Gesichtsfeldhälften durch Verschieben der Kondensoren der Beleuchtungseinrichtung den Lampenfaden scharf einzustellen. Das Aussehen des Bildes, das man dabei erhält, entspricht der Abb. 297.

Man steckt vor die Fenster der Beleuchtungseinrichtung die Mattscheiben. Dabei achtet man darauf, daß die Nummern übereinstimmen. Dann stellt man das Okular sehr sorgfältig auf die Trennlinie beider Felder scharf ein.

Man stellt die Trommel auf den Teilstrich 100 ein, gleicht durch Drehen der anderen Trommel die Helligkeit beider Gesichtsfeldhälften ab und führt 5 bis 10 Messungen durch. Wenn man für den mittleren Wert der Ablesungen 100 ± 2 erhält, ist das Gerät genügend genau justiert. Sind die Abweichungen größer, wird einer der Kondensoren etwas verschoben und erneut photometriert usw., bis man die gleiche Helligkeit beider Gesichtsfeldhälften bei gleicher Einstellung der Blenden erhält.

Als gutes Kriterium für die Gleichheit der Gesichtsfeldhälften dient beim Photometrieren das Verschwinden der Trennungslinie zwischen den Feldern.

Während des Photometrierens muß das Auge des Beobachters an die Augenmuschel des Okulars gepreßt werden und nach Möglichkeit bei allen Messungen die gleiche Lage einnehmen. Personen, die eine Brille tragen, müssen sie beim Photometrieren abnehmen.

Übung 1

Das Aufnehmen der Absorptionskurven für Farbstofflösungen und die Untersuchung des Einflusses der Schichtdicke

Man füllt mit der zu untersuchenden Lösung eine Küvette (die vorher sorgfältig gereinigt und mit destilliertem Wasser ausgespült worden ist) und setzt sie auf das Tischchen. In den zweiten Strahlengang setzt man, um die Reflexionsverluste zu kompensieren, eine zweite mit destilliertem Wasser (oder dem entsprechenden Lösungsmittel) gefüllte Küvette.

Mit Hilfe der schwenkbar an dem Okular angebrachten Lupe erhält man ein scharfes Bild des quadratischen Ausschnittes der Blende und prüft, ob die durch die Küvetten gehenden Lichtbündel die Blendenöffnung vollständig und gleichmäßig ausleuchten.

Man stellt die Trommel der Blende des Strahlenganges, in dem sich die Küvette mit der Lösung befindet, auf den Teilstrich 100 ein. Dann dreht man das erste Filter in das Gesichtsfeld und gleicht durch Drehen der zweiten Trommel die Helligkeit beider Felder ab, wie dies bereits oben beschrieben wurde.

Es ist dabei notwendig, nacheinander mehrere Messungen durchzuführen und aus ihnen den Mittelwert zu bilden.

Nach jeder Einstellung werden gleichzeitig die Werte a_D und die Werte a_E abgelesen. Man führt die beschriebenen Messungen nacheinander für die verschiedenen Filter durch. Wenn die Helligkeit der Felder beim Arbeiten mit hellen Filtern sehr groß ist, so empfiehlt es sich, die Trommel des Strahlenganges, in dem sich die Lösung befindet, nicht auf $a_D = 100$, sondern auf $a_D = 50$ einzustellen. Dann muß man die entsprechenden Umrechnungen der Ablesungen an der zweiten Trommel durchführen.

Hat man diese Messungen beendet, so wechselt man die Plätze der Küvetten untereinander und wiederholt alle Messungen.

Aus beiden Meßreihen wird für jeden Wert der Mittelwert genommen.

Von den Meßergebnissen werden zwei graphische Darstellungen angefertigt, in denen auf der Abszissenachse die effektive Wellenlänge der Filter und auf der Ordinatenachse die Größen D und E abgetragen werden.

In der vorliegenden Übung werden folgende Lösungen untersucht: 1. wäßrige Lösung von Methylviolett, 2. wäßrige Lösung von Fuchsin — beide Lösungen werden bei einer Schichtdicke von 10 mm untersucht, 3. Lösung von Chlorophyll in Alkohol — diese Lösung wird bei zwei Schichtdicken (1 mm und 10 mm) untersucht.

Übung 2

Die Untersuchung des Einflusses der Konzentration auf den Extinktionskoeffizienten

Diese Messungen werden für Stoffe durchgeführt, für die das Gesetz (2) gültig ist, und für Stoffe, für die dieses Gesetz verletzt wird. Für jeden Stoff wird, wie oben beschrieben, die Extinktion für zwei Konzentrationen gemessen.

Für jeden Stoff werden die für beide Konzentrationen durchgeführten Meßergebnisse in eine graphische Darstellung eingetragen, wobei anstatt E auf der Ordinatenachse $\lg E$ abgetragen wird. Ein Kriterium für die Erfüllung des Gesetzes (2) ist der parallele Verlauf der Kurven $\lg E = f(\lambda)$ für verschiedene Konzentrationen. Die Messung wird für zwei Kupfersulfat- und zwei Kobaltrhodanidlösungen durchgeführt. Die Schichtdicke beträgt dabei 10 mm.

Übung 3

Die Untersuchung des Einflusses des Lösungsmittels auf das Absorptionsspektrum

Mit der oben beschriebenen Methode mißt man die Extinktionskurven für Lösungen des gleichen Stoffes in verschiedenen Lösungsmitteln und vergleicht die Kurven untereinander. Es werden Lösungen von Jod in Tetrachlorkohlenstoff und in Alkohol untersucht. Die Schichtdicke beträgt 10 mm.

Spezialliteratur

1. G. Kortüm: „Kolorimetrie, Photometrie, Spektrometrie“. Verlag J. Springer, Berlin 1955.
2. R. Sewig: „Handbuch der Lichttechnik“.

Aufgabe 84

Die Untersuchung der Lichtabsorption in festen und flüssigen Filtern mit Hilfe eines Spektralphotometers

Zubehör: 1. Spektralphotometer, 2. Beleuchtungseinrichtung, 3. Lichtquelle mit kontinuierlichem Spektrum-, Lichtbogen oder Lampe von 200 bis 300 W, 4. Quecksilberlampe, 5. Absorptionsgefäße, 6. Anzahl von zu untersuchenden Lichtfiltern, 7. Anzahl von zu untersuchenden Lösungen.

Die Beschreibung des Gerätes. Das Spektralphotometer gestattet es, die Lichtstärke zweier Lichtquellen, genauer, die Leuchtdichte seiner beiden Spalte in verschiedenen Spektralbereichen zu vergleichen. Dieses Gerät wird auch häufig zur Bestimmung der Schwächung, z. B. bei Absorption, des Lichtes für verschiedene Wellenlängen verwendet. Außerdem wird das Spektralphotometer zur Messung des Polarisationsgrades des Lichtes verwendet. Man kann

mit ihm auch die relative spektrale Intensitätsverteilung einer Lichtquelle messen, woraus bekanntlich in einigen Fällen ihre Temperatur bestimmt werden kann.

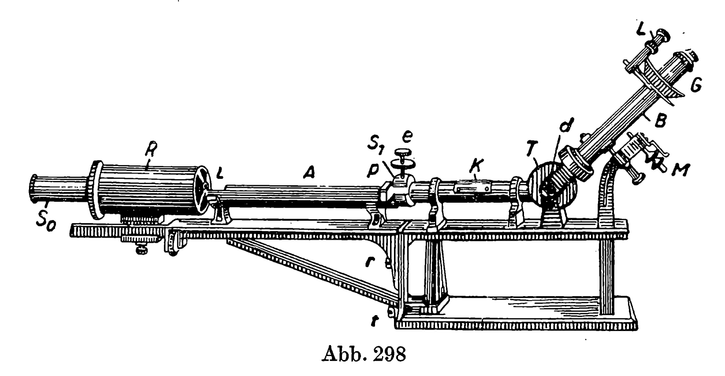


Abb. 298

Das Spektralphotometer[1]), dessen Außenansicht in Abb. 298 dargestellt ist, besteht aus dem fest montierten Kollimatorrohr K mit dem Doppelspalt S_1 und dem Fernrohr B, das sich um die horizontale Achse d drehen läßt. Diese Drehung wird mit Hilfe der Schraube M ausgeführt, die mit einer Ablesetrommel verbunden ist. Zwischen dem Kollimator und dem Fernrohr befindet sich in dem Gehäuse T ein Prisma, das die spektrale Zerlegung des Lichtes bewirkt. Auf den okularen Teil des Fernrohres wird ein abnehmbares Nicolsches Prisma G (siehe Aufgabe 85) gesetzt, dessen Drehwinkel an einem Teilkreis mit Hilfe der Lampe L abgelesen werden kann.

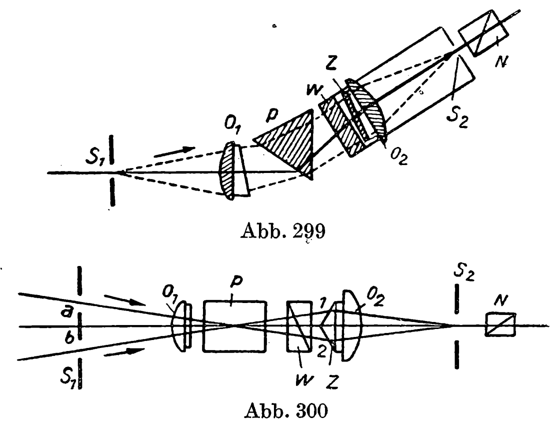


Abb. 299

Abb. 300

Das Gerät ist auf ein massives Untergestell gebaut, an das die Beleuchtungsvorrichtung mit den Schrauben r und t angeschraubt werden kann. Die Beleuchtungsvorrichtung besteht aus der Beleuchtungseinrichtung R selbst und den beiden Rinnen A, in die die Röhren mit den zu untersuchenden Flüssigkeiten gelegt werden.

In einigen Fällen, wenn z. B. zwei Lichtquellen verglichen werden sollen, kann man die Beleuchtungsvorrichtung nicht benutzen. Dann werden die Spalte des Spektralphotometers von der Seite mit Hilfe kleiner total reflek-

[1]) Anm. d. Übers.: KÖNIG-MARTENSsches Spektralphotometer.

tierender Prismen beleuchtet, die neben den Spalten an besonderen Hebeln sitzen. Diese Prismen können jedes für sich zur Seite und vor den Spalt geschwenkt werden.

Das KÖNIG-MARTENSsche Spektralphotometer gehört zu den mit polarisiertem Licht arbeitenden Geräten. Sein innerer Aufbau ist in den Abbildungen 299 und 300 schematisch im Vertikalschnitt und im Horizontalschnitt wiedergegeben. Der horizontale Spalt S_1, der aus den beiden Spalten a und b besteht (genauer gesagt ist es ein Spalt, dessen Mitte verdeckt ist), bildet mit dem Objektiv O_1 den Kollimator. (Über den Aufbau des Kollimators siehe Aufgabe 80.) Das Prisma P zerlegt das Licht spektral, und die Linse O_2 bildet die beiden entstehenden Spektren in der Ebene des zweiten Spaltes S_2 ab.

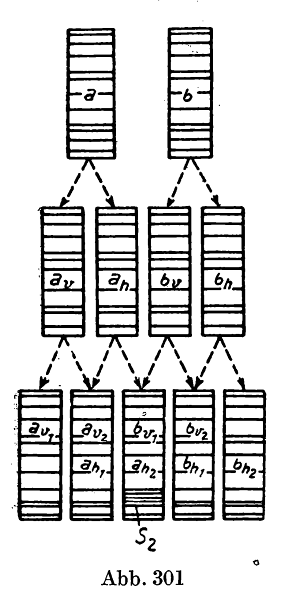


Abb. 301

In dieser Form würde das Gerät ein Spektroskop darstellen, das auf die Seitenfläche gestellt ist. Es sind jedoch außer diesen Teilen noch das Polarisationsprisma W (WOLLASTONprisma), aus dem die polarisierten Strahlen symmetrisch austreten, und das Biprisma Z vorhanden. Durch die Wirkung des Polarisationsprismas wird jedes der beiden Spektren a und b (Abb. 301) in zwei Spektren geteilt: das eine ist vertikal polarisiert (a_v und b_v), und das andere ist horizontal polarisiert (a_h und b_h). Man erhält auf diese Weise vier Spektren. Das Biprisma Z lenkt mit seinem rechten Teil alle Spektren nach links und mit seinem linken Teil alle Spektren nach rechts ab, so daß man insgesamt acht Spektren erhält, und zwar vier von jedem der Spalte a und b. Doch überlagern sich die Spektren teilweise, und man erhält insgesamt fünf getrennte Spektren, von denen die drei mittleren aus je zwei übereinanderliegenden bestehen[1]).

Der Spalt S_2 ist so eingestellt, daß in das Auge nur das mittlere Spektrum fällt. Dieses Spektrum besteht aus dem Spektrum a_{h_2} (horizontal polarisiert) des Spaltes a, das von dem linken Teil des Biprismas abgelenkt wird, und dem Spektrum b_{v_1} (vertikal polarisiert) des Spaltes b, das von dem rechten Teil des Biprismas abgelenkt wird. Bringen wir dabei das Auge in die Nähe des Spaltes S_2, so sehen wir ein von bestimmtem spektralen Licht gefärbtes Gesichtsfeld. Welcher Spektralbereich auf das Gesichtsfeld fällt, hängt von der Neigung des Fernrohres B ab. Die rechte Hälfte des Gesichtsfeldes wird von dem Spalt a beleuchtet, und der elektrische Vektor schwingt in ihm vertikal. Die linke Hälfte wird vom Spalt b beleuchtet, und der elektrische Vektor schwingt in ihm horizontal. Dabei ist unser Auge auf

---

[1]) Diese überlagerten Spektren fallen nur in einer bestimmten Ebene nahe dem Spalt S_2 zusammen. Da jedoch die ihnen entsprechenden Strahlen unter einem bestimmten Winkel zueinander verlaufen, so laufen sie auf ihrem weiteren Wege auseinander, und wir sehen die eine Hälfte des Gesichtsfeldes von dem einen Spektrum beleuchtet und die andere Hälfte von dem anderen.

die Kante des Biprismas gerichtet, die als Trennungslinie des Gesichtsfeldes dient. Wenn man vor den Spalt S_2 ein Nicolsches Prisma N setzt (Abbildungen 299 und 300), so daß die von ihm durchgelassene Schwingungsebene des Lichtes mit der vertikalen Richtung den Winkel α bildet, so ist die Amplitude der Lichtschwingungen der rechten Hälfte des Gesichtsfeldes gleich $Oa \cdot \cos\alpha$ und des linken Gesichtsfeldes gleich $Ob \cdot \sin\alpha$ (Abb. 302).

Stellen wir das Nicolsche Prisma so ein, daß beide Gesichtsfeldhälften gleich hell erscheinen, dann haben wir:

$$Oa \cdot \cos\alpha = Ob \cdot \sin\alpha ,$$

und für das Verhältnis der auf die Spalte a und b auffallenden Lichtströme erhalten wir:

$$\frac{\Phi_a}{\Phi_b} = \left(\frac{Oa}{Ob}\right)^2 = \mathrm{tg}^2\alpha , \tag{1}$$

da für das natürliche Licht das Verhältnis der Lichtströme dem Verhältnis der Amplitudenquadrate der Komponenten proportional ist.

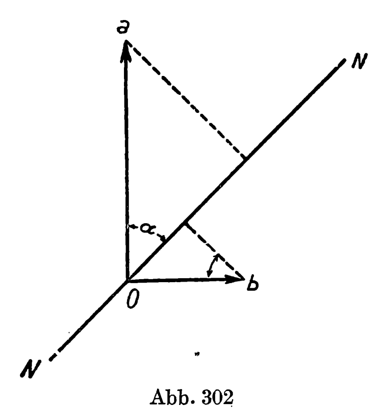


Abb. 302

Das Fernrohr B (Abb. 298) kann mit Hilfe der Mikrometerschraube M längs dem gesamten Spektrum verschoben werden. Daher können die Messungen in allen Spektralbereichen durchgeführt werden.

Die Überprüfung der Justierung des Gerätes. Bei richtiger Justierung des Spektralphotometers müssen folgende Bedingungen erfüllt werden:

1. Wenn der rechte Spalt abgedeckt wird, muß die linke Gesichtsfeldhälfte völlig dunkel werden (bei beliebiger Stellung des Nicolschen Prismas), und umgekehrt muß die rechte Gesichtsfeldhälfte dunkel werden, wenn man den linken Spalt abdeckt.

2. Auf der Trennungslinie zwischen den Feldern darf kein heller oder dunkler Streifen liegen. Das Auftreten eines Streifens kann von einer unrichtigen (schiefen) Ausleuchtung der Spalte herrühren. Der Streifen verschwindet bei richtiger Ausleuchtung. Außerdem kann er auch auftreten, wenn das Polarisationsprisma oder das Biprisma nicht richtig stehen.

3. Bei der Drehung der Mikrometerschraube M, die es gestattet, verschiedene Spektralbereiche einzustellen, müssen bei Beleuchtung beider Spalte mit ein und derselben Lichtquelle beide Gesichtsfeldhälften die gleiche Farbe zeigen. Farbunterschiede sind besonders leicht im gelbgrünen Spektralbereich zu bemerken.

Die Überprüfung läßt sich auch auf andere Weise durchführen: Man beleuchtet den Spalt S_1 mit einer Lichtquelle, die ein Linienspektrum ausstrahlt (Quecksilberlampe) und betrachtet die erhaltenen Spektren durch das Okular. Dann müssen die vom Spalt a und vom Spalt b erhaltenen Spektrallinien im mittleren Teil zusammenfallen oder sich kreuzen.

4. Bei der Beleuchtung beider Spalte mit ein und derselben Lichtquelle muß das Verhältnis der Helligkeiten über das gesamte Spektrum gleich sein. Anders gesagt, die Stellung des Nicolschen Prismas darf sich bei gleicher Beleuchtung der Felder beim Übergang von einem Spektralbereich zu einem anderen nur geringfügig ändern. Die Änderung darf höchstens 3 bis 4° betragen.

Wenn das nicht erfüllt ist, muß die Stellung des Polarisationsprismas oder des Biprismas verändert werden. Eine solche fundamentale Justierung des Gerätes dürfen Anfänger auf keinen Fall selbständig durchführen.

Übung 1

Die Eichung des Gerätes

Zuerst muß das Gerät geeicht werden, d. h., man muß die Teilung der Mikrometerschraube M (Abb. 298), die das Fernrohr B verschiebt, mit der Wellenlänge des durch den Spalt S_2 fallenden Lichtes in Beziehung setzen[1]). Als Lichtquelle dient eine Quecksilberlampe (siehe Aufgabe 73). Die Beleuchtungsvorrichtung wird abgenommen und die Lampe direkt vor den Spalt S_1 gestellt. Die Breite des Spaltes S_1, die mit der Schraube e verändert werden kann, darf nicht zu groß sein (ungefähr 0,2 bis 0,3 mm). Die Breite des Spaltes S_2, die durch einen besonderen Ring am okularen Teil des Fernrohres verändert werden kann, wird so gewählt, daß sie etwas größer ist als die Breite der beobachteten Spektrallinien.

Man nimmt das Nicolsche Prisma ab, setzt an seine Stelle das zu dem Gerät gehörige Okular, dreht an der Mikrometerschraube und verschiebt damit das Fernrohr B längs dem Spektrum. Man schreibt die Trommelstellungen der Schraube auf, bei denen Spektrallinien in der Mitte des Spaltes S_2 erscheinen. Für diese Linien sucht man aus Tabellen die Wellenlängen heraus und fertigt aus den Meßpunkten eine Eichkurve an. Hierzu trägt man auf der Ordinatenachse die Wellenlängen und auf der Abszissenachse die entsprechenden Teilstriche der Trommel auf.

Bereitet die Identifizierung aller beobachteten Spektrallinien mit den in den Tabellen angegebenen Wellenlängen größere Schwierigkeiten, dann zeichnet man zuerst eine Kurve nach den intensivsten Linien, deren Identifizierung einfach ist. Danach wird der Verlauf dieser Kurve mit den übrigen Linien verfeinert. Die Identifizierung läßt sich noch mehr vereinfachen, wenn man das Taschenspektroskop verwendet, das mit einer Wellenlängenskala versehen ist. Diese Skala muß vorher nach der charakteristischen grünen Quecksilberlinie justiert werden.

Übung 2

Die Messung der Absorptionskurve der Filter

Der Spalt des Spektralphotometers muß mit der kleinen Beleuchtungsvorrichtung beleuchtet werden. Sie besteht aus einer Blende d (Abb. 303) mit einer rechteckigen Öffnung, die von einem Mattglas bedeckt ist, und der

---

[1]) Wird eine Eichkurve dem Gerät beigegeben, so braucht die Übung 1 nicht ausgeführt zu werden.

großen plankonvexen Linse L, auf deren planer Seite zwei gleichgroße plankonvexe Linsen l_1 und l_2 aufgeklebt sind. Das von einem Lichtbogen oder einer Glühlampe von 200 bis 300 W kommende Licht beleuchtet die Mattscheibe, die damit zu einer das Licht streuenden Lichtquelle wird. Von ihr fallen die Lichtstrahlen auf das Linsensystem L, l_1, l_2, treten hindurch und werden dahinter in zwei einzelnen Lichtbündeln, deren Achsen parallel zueinander verlaufen, auf den Kollimatorspalten konzentriert.

Das zu untersuchende Filter stellt man so auf, daß die den Spalt a beleuchtenden Strahlen durch das Filter gehen, während die den Spalt b beleuchtenden Strahlen unmittelbar auf den Spalt fallen. Durch Drehen des Nicolschen Prismas erreicht man, daß die Leuchtdichte beider Gesichtsfeldhälften einander angeglichen wird. Die Trennungslinie darf dabei nicht mehr zu sehen sein.

Es ist leicht einzusehen, daß es vier Stellungen des Nicolschen Prismas gibt, für die man die Gleichheit der Leuchtdichte beider Gesichtsfeldhälften erreichen kann. Diese Stellungen entsprechen den Winkeln α, $180° + \alpha$, $180° - \alpha$, $360° - \alpha$. Für jeden Meßpunkt müssen alle vier Stellungen abgelesen werden, um Fehler auszuschalten, die dadurch entstehen können, daß der Nullpunkt der Kreisteilung gegenüber der Polarisationsebene des Nicolschen Prismas verschoben sein kann. Gleichzeitig schaltet man damit den Fehler aus, der durch eine mögliche Exzentrizität des Teilkreises auftreten kann. In jedem Quadranten des Teilkreises müssen je nach der Leuchtdichte 2 bis 5 Ablesungen durchgeführt und aus ihnen der Mittelwert genommen werden.

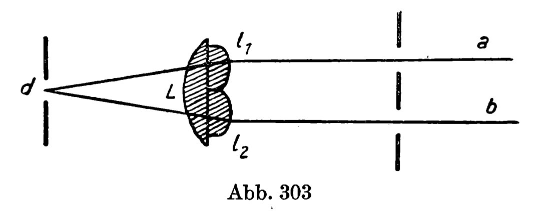


Abb. 303

Bezeichnen wir die durch die Spalte gehenden Lichtströme mit Φ_a und Φ_b, so erhalten wir die Beziehung:

$$\frac{\Phi_a}{\Phi_b} = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

[siehe Formel (1)].

Nehmen wir das zu untersuchende Filter aus dem Strahlengang und ändern wir nichts an der Beleuchtung der Spalte, so finden wir analog den Winkel α_0. Dann ist

$$\frac{\Phi_{a_0}}{\Phi_b} = \operatorname{tg}^2 \alpha_0 .$$

Hieraus läßt sich leicht das Verhältnis des durch das Filter hindurchgegangenen Lichtstromes (Φ_a) zu dem auf das Filter auffallenden Lichtstrom (Φ_{a_0}) angeben:

$$D = \frac{\Phi_a}{\Phi_{a_0}} .$$

Diese Größe D heißt *Durchlässigkeit* des Filters:

$$D = \frac{\Phi_a}{\Phi_{a_0}} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha_0} . \qquad (2)$$

Führt man diese Messung für das gesamte Spektrum aus, so erhält man die Durchlässigkeit D in Abhängigkeit von der Wellenlänge (spektrale Durchlässigkeitskurve).

Die Anzahl der Meßpunkte muß genügend groß sein (ihr Abstand soll im Mittel 10 *nm* betragen). In den Spektralbereichen, in denen sich die Absorption stark ändert, muß die Punktfolge dichter liegen, und in den Bereichen, in denen sich die Absorption fast gar nicht ändert, kann die Punktfolge weiter auseinander gewählt werden. Der Winkel α_0 braucht nur für vier oder fünf Wellenlängen bestimmt zu werden, da er fast unverändert bleibt.

Bei genauen Messungen müssen zwei Meßreihen durchgeführt werden: erstens, wenn das Filter vor dem Spalt a steht, und zweitens, wenn es vor dem Spalt b steht. Im zweiten Fall, bei dem die Funktionen der Spalte vertauscht worden sind, muß D nach der Formel berechnet werden:

$$D = \frac{\Phi_k}{\Phi_{b_0}} = \frac{\mathrm{tg}^2 \beta}{\mathrm{tg}^2 \beta_0} = \frac{\mathrm{tg}^2 \beta}{\mathrm{tg}^2 \alpha_0}.$$

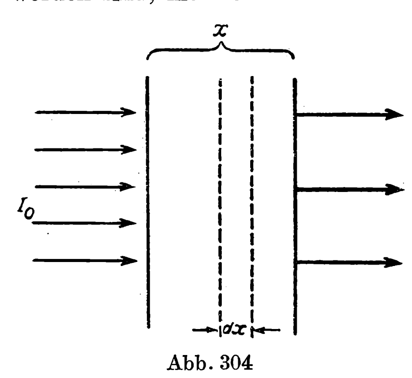


Abb. 304

Bei den Absorptionsmessungen muß man seine Aufmerksamkeit auf die Breite der Spalte S_1 und S_2 lenken. Bei der Messung von Stoffen, deren Absorption sich in irgendeinem Wellenlängenbereich stark ändert, muß die Spaltbreite klein sein (0,1 mm), sonst erhalten die beiden Gesichtsfeldhälften verschiedene Farben, und die Meßergebnisse werden ungenau.

Überhaupt darf bei genauen Messungen die Breite der Spalte S_1 und S_2 nicht größer sein als 0,2 mm. Breite Spalte dürfen nur in den unumgänglichsten Fällen (kleine Intensitäten) und unter der Bedingung benutzt werden, daß sich der Lichtstrom in diesem Bereich genügend langsam ändert.

Um die Größe des Meßfehlers abzuschätzen, differenzieren wir die logarithmierte Gleichung (2). Wir erhalten dann:

$$\frac{dD}{D} = \frac{4 \cdot d\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Lassen wir zu, daß der Fehler bei der Bestimmung des Winkels α gleich 0,5° ist, so zeigt diese Formel, daß der Fehler bei der Bestimmung von D für $\alpha = 45°$ am kleinsten ist und ungefähr 0,04 oder 4 % beträgt. Ergibt sich für α ein Winkel von fast 0° oder 90°, so wird bei der Bestimmung von α der Einfluß des Fehlers auf das Meßergebnis sehr groß.

Übung 3

Die Messung des Absorptionskoeffizienten von Lösungen

Geht monochromatisches Licht durch ein absorbierendes Medium, so nimmt der Lichtstrom nach dem Gesetz $\Phi = \Phi_0 \cdot e^{-\beta x}$ ab. Dieses Gesetz läßt

sich auf Grund folgender Überlegungen leicht ableiten: Wir nehmen uns in Gedanken aus dem absorbierenden Medium eine sehr dünne Schicht dx heraus (Abb. 304), die senkrecht zu dem auffallenden Licht steht. Man kann nun annehmen, daß der Lichtstrom auf dem Wege durch diese Schicht proportional zur Schichtdicke und zur Größe des auffallenden Lichtstromes abnimmt, d. h.

$$d\Phi = -\beta \Phi dx,$$

wobei β ein konstanter Faktor ist, den man mit *Absorptionskoeffizient* bezeichnet. Das Minuszeichen gibt an, daß der Lichtstrom beim Durchgang durch dx abnimmt. Integrieren wir diese Gleichung und bestimmen wir die Integrationskonstante aus der Bedingung, daß $\Phi = \Phi_0$ für $x = 0$, so erhalten wir:

$$\ln \Phi = -\beta x + \ln \Phi_0$$

oder

$$\Phi = \Phi_0 e^{-\beta x}. \tag{2}$$

Abb. 305

Der Absorptionskoeffizient hängt für jeden Stoff im allgemeinen von der Wellenlänge λ des auffallenden Lichtes ab. Die die Abhängigkeit β von λ darstellenden Kurven werden *Absorptionskurven* genannt. Durch sie werden die Absorptionseigenschaften der verschiedenen Medien charakterisiert.

Für Lösungen hängt der Absorptionskoeffizient β im allgemeinen von ihrer Konzentration ab. Für die meisten Lösungen ist in bestimmten Konzentrationsbereichen β proportional zur Konzentration C. Diese Abhängigkeit gestattet es, die Konzentration quantitativ mit dem Spektralphotometer zu bestimmen.

Die Messung. Die zu untersuchende Lösung wird in ein planparalleles Gefäß gegossen und vor einen der Spalte des Spektralphotometers gestellt.

Da eine solche Aufstellung bei der Benutzung der kleinen Beleuchtungsvorrichtung schwierig ist, weil die beiden Lichtbündel hierbei sehr nahe nebeneinander verlaufen, wird eine große Beleuchtungsvorrichtung verwendet. Ihre Konstruktion unterscheidet sich von der der kleinen nur durch größere Ausmaße der Linsen und durch die Verwendung zweier total reflektierender Doppelprismen q_1 und q_2 (Abb. 305), durch die das Licht beider Bündel auf die Kollimatorspalte gelenkt wird.

Man führt die Messungen analog denen der Übung 2 aus und erhält die Größe

$$\frac{\Phi_a}{\Phi_b} = \mathrm{tg}^2 \alpha$$

für die verschiedenen Wellenlängen des Spektrums.

Dabei muß man beachten, daß die Lichtverluste beim Durchgang durch das Gefäß nicht nur von der Absorption in der Lösung, sondern auch noch im wesentlichen von der Reflexion an den Gefäßwänden herrühren. Um diesen Fehler zu eliminieren, muß man eine Messung mit dem gleichen Gefäß an der gleichen Stelle, aber angefüllt mit dem reinen Lösungsmittel (von dem wir annehmen, daß es das Licht nicht absorbiert) durchführen. Dabei erhalten wir die Größe:

$$\frac{\Phi_a'}{\Phi_b} = \mathrm{tg}^2 \alpha'.$$

Da die Reflexionsverluste in beiden Fällen gleich sind, gibt die Größe $\Phi_a : \Phi_a'$ das Verhältnis des durch das Gefäß hindurchgegangenen zu dem auf das Gefäß aufgefallenen Lichtstromes an. Nach der Gleichung (2) ist es gleich $e^{-\beta x}$, wobei β der Absorptionskoeffizient und x die Dicke der absorbierenden Schicht bedeuten. Folglich ist

$$e^{-\beta x} = \frac{\Phi_a}{\Phi_a'} = \frac{\mathrm{tg}^2 \alpha}{\mathrm{tg}^2 \alpha'}.$$

Durch Logarithmieren erhält man daraus für den Absorptionskoeffizienten:

$$\beta = \frac{2}{x} (\ln \mathrm{tg}\, \alpha' - \ln \mathrm{tg}\, \alpha) = \frac{4{,}61}{x} (\lg \mathrm{tg}\, \alpha' - \lg \mathrm{tg}\, \alpha).$$

Die Meßergebnisse werden graphisch dargestellt, indem man den Absorptionskoeffizienten β über der Wellenlänge aufträgt.

Bei der Untersuchung der Lichtabsorption in Flüssigkeiten benutzt man häufig ein planparalleles Gefäß mit einem „Körper"[1]).

In ein Glasgefäß, z. B. von der Breite 11 mm, wird auf den Boden ein kleiner Würfel der Breite 10 mm gelegt. Wenn in das Gefäß Flüssigkeit gegossen wird, so beträgt die Schichtdicke in dem Teil des Gefäßes, in dem der Würfel liegt, 11 — 10 = 1 mm und in dem anderen Teil 11 mm, das heißt, der Dickenunterschied beträgt 10 mm. Man stellt nun das Gefäß vor den Spalten des Spektralphotometers so auf, daß das eine Lichtbündel durch den Würfel geht und das andere unmittelbar durch die Lösung. Die Auswertung der Messungen geschieht nach den gleichen Formeln, wobei für die in die Formeln eingehende Schichtdicke die Dicke des Würfels, d. h. 10 mm, eingesetzt wird.

Einer der Vorteile dieser Methode ist, daß man dabei die große Beleuchtungsvorrichtung nicht benötigt, die die zur Beleuchtung der Spalte dienenden Lichtbündel voneinander entfernt.

Spezialliteratur

Siehe Literatur zu Aufgabe 83.

[1]) Anm. d. Übers.: Schulzscher Körper.

Aufgabe 85

Die Untersuchung der wesentlichsten Erscheinungen der Lichtpolarisation bei parallelem Strahlengang

Zubehör: 1. Gerät zur Polarisation durch Reflexion, 2. Rhomboeder aus Kalkspat, 3. Anzahl von Gips- und Glimmerplättchen verschiedener Dicke, 4. Gipsplättchen von empfindlicher Schattierung, 5. $\frac{\lambda}{4}$-, $\frac{\lambda}{2}$- und λ-Plättchen aus Glimmer, 6. Gipskeil erster, zweiter und dritter Ordnung, 7. Glimmerplättchen von empfindlicher Schattierung, 8. farbiges Nomogramm zur Doppelbrechung.

Die Grundvorstellungen der Polarisationserscheinungen. Eine linear polarisierte Lichtwelle ist dadurch charakterisiert, daß ihr elektrischer Vektor in einer ganz bestimmten Richtung schwingt. Die Ebene, die diese Richtung und die Ausbreitungsrichtung der Lichtwelle enthält, wird die *Schwingungsebene* genannt. Bei natürlichem Licht sind die Schwingungsebenen der Wellen chaotisch über alle Richtungen im Raum verteilt. Die Ebene, die senkrecht zur Schwingungsebene verläuft, trägt die Bezeichnung *Polarisationsebene* der Welle. Daher stehen die Schwingungsebene und die Polarisationsebene einer Welle senkrecht zueinander.

Polarisiertes Licht kann man auf folgende Weise erhalten:

1. Durch Reflexion an einem nicht metallischen Spiegel (Glas, Wasser usw.). Dabei erhält man im allgemeinen nur teilweise polarisiertes Licht; doch erhält man bei einem bestimmten Einfallswinkel der Lichtwelle auf dem Spiegel vollständige Polarisation. Das ist dann der Fall, wenn der Tangens des Einfallswinkels gleich dem Brechungsindex des Stoffes ist, aus dem der Spiegel besteht. Dieser Winkel heißt *Polarisationswinkel*[1]) und ist für Glas gleich 57°. Bei vollständiger Polarisation liegt die Schwingungsebene der reflektierten Welle senkrecht zu ihrer Einfallsebene.

2. Durch Brechung in einer Glasplatte. Hierbei ist die Polarisation des Lichtes unvollständig. Ihren größten Wert erreicht sie bei einem Einfallswinkel, der gleich dem Polarisationswinkel ist. Während der reflektierte Teil des Lichtbündels beim Polarisationswinkel vollständig polarisiert ist, ist im gebrochenen Teil nur genau so viel Licht polarisiert, wie der reflektierte Teil des Lichtbündels ausmacht. Zum Beispiel wird, wenn auf eine Glasplatte ein Lichtbündel unter dem Polarisationswinkel auffällt, nur $^1/_7$ des Lichtes reflektiert, und $^6/_7$ gehen hindurch. Dann ist im durchgehenden Lichtbündel auch nur $^1/_7$ des Lichtes polarisiert, und die übrigen $^5/_7$ bleiben natürliches Licht. Um einen größeren Polarisationsgrad des gebrochenen Lichtbündels zu erhalten, wird es unter dem Polarisationswinkel (Winkel von 57°) durch einen Satz von dünnen Glasplatten geschickt, die übereinandergelegt sind (Stoletowscher Glasplattensatz).

3. Die dritte Methode, um polarisiertes Licht zu erhalten, besteht in der Brechung des natürlichen Lichtes in Kristallen. Dabei beobachtet man eine *Doppelbrechung*, d. h. die Aufspaltung der Lichtwelle im Kristall in zwei Wellen, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten ausbreiten.

---

[1]) Anm. d. Übers.: oder Brewsterscher Winkel.

In optisch einachsigen Kristallen (Kalkspat, Quarz u. a.) wird eine Welle, die sich in Richtung der Symmetrieachse höherer Ordnung ausbreitet, nicht aufgespalten, und das Licht bleibt unpolarisiert. Diese Richtung trägt die Bezeichnung *optische Achse.* Jedoch wird das Licht, das in jeder beliebigen anderen Richtung in den Kristall eintritt, in zwei vollständig polarisierte Wellen aufgespalten, deren Schwingungsebenen senkrecht aufeinander stehen. Eine dieser Wellen, die die Bezeichnung *ordentliche Welle* (ordentlicher Strahl) trägt, breitet sich in allen Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit aus und wird folglich durch einen konstanten Wert des Brechungsindex n_0 charakterisiert. Die Richtung der Schwingungen in dieser Welle verläuft senkrecht zum Hauptschnitt des Kristalls, d. h. zu einer Ebene, die gebildet wird aus der Richtung der Wellenausbreitung und der Richtung der optischen Achse.

Die zweite Lichtwelle, genannt *außerordentliche Welle* (außerordentlicher Strahl), breitet sich im Kristall, in Abhängigkeit von der Richtung, mit verschiedener Geschwindigkeit aus und wird folglich durch verschiedene Brechungsindizes charakterisiert. Der Wert des Brechungsindex für die außerordentliche Welle, der sich am meisten von dem der ordentlichen Welle unterscheidet, wird mit n_e bezeichnet.

Sowohl die ordentliche als auch die außerordentliche Welle sind vollständig polarisiert. Dabei schwingt die außerordentliche Welle in der Ebene des Hauptschnittes des Kristalls und die ordentliche in der dazu senkrechten Ebene. Aus diesem Grunde stellt die Wellenfront der Lichtwellen in einem einachsigen Kristall eine komplizierte Fläche dar, die aus einer Kugel und einem Ellipsoid besteht, das entweder in der Kugel eingeschrieben ist (positiver Kristall) oder die Kugel umhüllt (negativer Kristall). Dabei entspricht der Kugel die ordentliche Welle und dem Ellipsoid die außerordentliche. Die Linie, die durch die Berührungspunkte zwischen Ellipsoid und Kugel geht, gibt die Richtung an, in der die Geschwindigkeiten der ordentlichen und der außerordentlichen Welle gleich sind und somit keine Doppelbrechung auftritt. Diese Linie ist die optische Achse.

In optisch zweiachsigen Kristallen besitzt die Wellenfront eine wesentlich kompliziertere Form und stellt eine Fläche vierter Ordnung dar. Die in einem solchen Kristall einfallende Lichtwelle spaltet in zwei Wellen auf, die in zwei senkrecht zueinander stehenden Richtungen schwingen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Lichtwellen ist in verschiedenen Richtungen verschieden. Es existieren nur zwei Richtungen, in denen die Geschwindigkeit beider Wellen gleich ist. Diese zwei Richtungen sind die optischen Achsen des Kristalls. Der Winkel zwischen den optischen Achsen hängt von der Größe der drei Hauptbrechungsindizes des Kristalls ab und kann für verschiedene Stoffe sehr verschieden sein. Wenn der spitze Winkel zwischen den optischen Achsen von der Richtung halbiert wird, in der die Lichtwellen sich mit maximaler und mittlerer Geschwindigkeit ausbreiten, so wird der Kristall als optisch positiv bezeichnet. Wenn jedoch in der angegebenen Richtung die Lichtwellen sich mit minimaler oder mittlerer Geschwindigkeit ausbreiten, wird der Kristall als optisch negativ bezeichnet. Die Ebene, in der die beiden optischen Achsen liegen, wird *Hauptschnitt* des Kristalls genannt.

Mit einem Analysator läßt sich vom natürlichen Licht das polarisierte Licht trennen und seine Schwingungsebene bestimmen. Das gleiche Gerät läßt sich auch zur Herstellung polarisierten Lichtes verwenden. Als Analysator dient ein Gerät, daß die Bezeichnung Nicolsches Prisma oder einfach Nicol trägt. Es besteht aus einem länglichen Kalkspatkristall *abcd* (Abb. 306), der in der Ebene *gf* zersägt und hinterher mit Kanadabalsam zusammengekittet ist. Fällt eine Lichtwelle auf eine der beiden Flächen *ad* oder *bc* unter einem Winkel, der nicht größer als 33° ist, dann wird sie im Kristall stets in die ordentliche und die außerordentliche Welle aufgespalten. Dabei geht die außerordentliche Welle durch den Kristall hindurch, während die ordentliche an der Schicht aus Kanadabalsam total reflektiert wird. (Der Brechungsindex des Kanadabalsams ist kleiner als der Brechungsindex des Kalkspats für den ordentlichen Strahl und größer als der Brechungsindex für den außerordentlichen Strahl.) Aus diesem Grunde läßt der Nicol nur die außerordentliche Welle hindurch, die in der Ebene des Hauptschnittes schwingt. Bei dem in der Natur in Rhomboederform vorkommenden Kalkspat hat man es gleichzeitig mit beiden Wellen zu tun. Beide Lichtbündel haben gleiche Helligkeit, wenn sie aus natürlichem Licht hervorgegangen sind. Wenn jedoch auf den Kristall schon polarisiertes Licht fällt, sind die Helligkeiten beider Lichtbündel verschieden. Wenn ein natürliches Lichtbündel senkrecht auf den Kristall auffällt, so geht die ordentliche Welle ohne Ablenkung hindurch, während die außerordentliche zur Seite abgelenkt wird und beim Austritt aus dem Kristall parallel zur ordentlichen verläuft. Dreht man daher das Rhomboeder um die Einfallsrichtung des Lichtbündels, so verändert das aus dem Kristall austretende ordentliche Lichtbündel seine Länge nicht, während das außerordentliche Bündel sich auf einem Kreis um das ordentliche bewegt. Damit erhält man eine Möglichkeit zur Trennung der beiden Bündel. Wenn auf den Analysator ein Lichtstrom fällt, dessen Schwingungsebene mit der Hauptebene des Analysators den Winkel α bildet, ist der hindurchgehende Lichtstrom

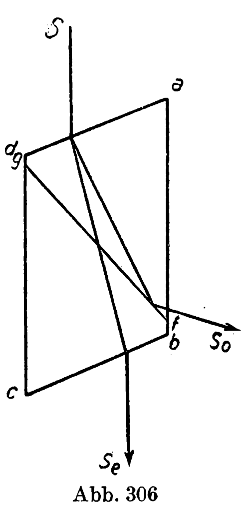


Abb. 306

$$\Phi = \Phi_0 \cos^2 \alpha,$$

wobei Φ_0 den auffallenden Lichtstrom bezeichnet. Wenn beide Ebenen senkrecht aufeinanderstehen, bleibt das Gesichtsfeld völlig dunkel.

Die Beschreibung der Anordnung. Auf einem Fußgestell sind zwei Säulen (eine kurze und eine lange) befestigt, zwischen denen eine Platte *P* aus schwarzem Glas hängt (Abb. 307), die sich um eine horizontale Achse drehen läßt. Die Platte stellt den Polarisator dar, da das von der Lichtquelle kommende gestreute Licht von der Seite auf sie fällt und nach der Reflexion linear polarisiert erscheint. Das durch Reflexion polarisierte Licht ist vertikal gerichtet

und fällt auf das Tischchen T. Das Tischchen ist mit einem in Grade geteilten Kreis versehen, der in der Tischebene gedreht werden kann. Der Drehwinkel wird an einem festen Zeiger abgelesen. In den runden Ausschnitt des Tischchens wird entweder eine Glasplatte gelegt, auf die ein Kreuz gezeichnet ist, oder eine metallische Blende mit runder Öffnung. Es sind zwei solcher Blenden mit verschiedenen Durchmessern der Öffnungen vorhanden. Auf das Tischchen werden die zu untersuchenden Kristallplättchen gelegt.

Als Analysator A wird in dem vorliegenden Gerät ein Nicol verwendet, der auf der oberen Plattform Q angebracht ist. Die Teilstriche auf Q dienen zur Bestimmung der Analysatorstellung, relativ zum Polarisator P (das heißt, relativ zur Lage der Ebene des Hauptschnittes des Analysators und der Schwingungsebene des vom Spiegel reflektierten Lichtes). Außerdem ist dazu an der Seite des Analysators eine Markierung (schwarzer Strich) angebracht. Manchmal wird der Analysator zur gleichzeitigen Beobachtung des ordentlichen und des außerordentlichen Lichtbündels durch ein Rhomboeder aus Kalkspat ersetzt. (Auf der Abbildung ist dieser nicht angeführt.)

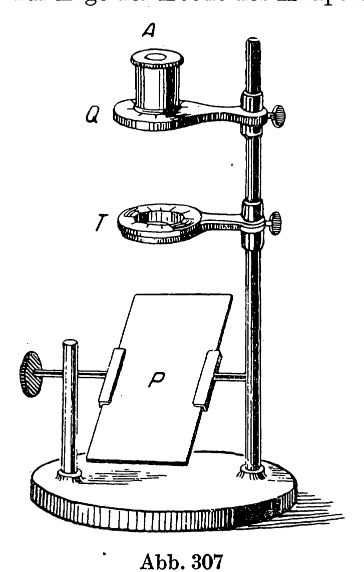


Abb. 307

Das Gerät ist mit einer Linse zur genaueren Betrachtung der Gegenstände, die auf dem Tischchen T liegen, ausgerüstet. Sie wird auf den Analysator gelegt.

Die Justierung des Gerätes. Zuerst achtet man darauf, daß die Mitten der Kreise T und Q sich ungefähr in einer Vertikalen befinden.

Das Gerät stellt man auf eine erhöhte Unterlage, damit es etwas höher steht als die Lichtquelle (z. B. mattierte Lampe). Dann wird der Spiegel P so geneigt, daß das Licht unter dem Polarisationswinkel auffällt und unmittelbar in vertikaler Richtung nach oben reflektiert wird. Um diesen Winkel leichter zu finden, sind manche Geräte mit einem Limbus und der Spiegel mit einem Zeiger ausgerüstet, der auf dem Limbus entlanggleitet.

Das durch den Analysator tretende Licht ist vollständig polarisiert, wenn man eine solche Stellung des Analysators findet, bei der die helle Öffnung in der auf das Tischchen T gelegten Blende völlig verschwindet. Dabei steht die Schwingungsebene zu der Ebene des auf P auffallenden natürlichen Lichtes senkrecht.

Übung 1

Die Untersuchung der Erscheinungen der einfachen Polarisation

1. Man sucht die Richtung der Schwingungsebene des Lichtes, das durch den Analysator geht, und die Richtung der Ebene seines Hauptschnittes relativ zu den Diagonalen. Dazu beobachtet man, wie sich die Leuchtdichte des

Feldes bei der Drehung des Analysators A um 360° ändert. Man notiert seine Stellungen, relativ zur Schwingungsebene des auffallenden Lichtes, bei denen die größte und die kleinste Leuchtdichte des Feldes beobachtet wird, und erklärt so die beobachtete Veränderung.

2. Anstatt des Analysators A setzt man auf die Plattform Q das Kalkspatrhomboeder. Legt man eine kleine Blende auf T, so sind durch das Rhomboeder zwei Abbildungen von ihr in Form zweier einzelner Scheiben zu sehen. Jedoch überdecken sich beide Abbildungen teilweise, wenn man die große Blende auflegt. Diese Bilder entstehen durch das ordentliche und das außerordentliche Lichtbündel.

Man bestimmt die Richtung der Schwingungsebene der ordentlichen und der außerordentlichen Wellen und die Lage des Hauptschnittes im Rhomboeder aus der Veränderung der Leuchtdichte beider Blendenbilder. Man erkläre, warum bei der großen Blendenöffnung der gemeinsame Teil der Bilder bei der Drehung gleich hell erscheint.

Übung 2

Die Untersuchung der Erscheinungen der chromatischen Polarisation

Wenn zwischen den Polarisator P und den Analysator A ein doppelbrechendes Plättchen C gelegt wird, das nicht senkrecht zur optischen Achse geschnitten ist, so wird das weiße Licht, das vom Polarisator kommt und durch das Plättchen und den Analysator geht, bei keiner Stellung der angeführten drei Objekte zueinander vollständig ausgelöscht, sondern es tritt farbig aus. Allerdings gibt es herbei eine Ausnahme, wenn die Hauptrichtungen des Plättchens mit den Hauptrichtungen des mit dem Polarisator gekreuzten Analysators zusammenfallen. Die Färbung wird nicht durch monochromatisches, sondern durch aus verschiedenen Wellenlängen zusammengesetztes Licht hervorgerufen, das mehr oder weniger verweißlicht ist.

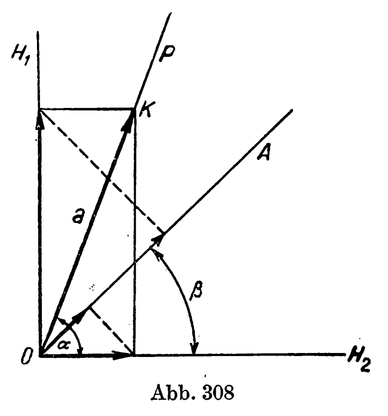


Abb. 308

Die Färbung hängt auch noch davon ab, unter welchem Winkel das Licht auf die Platte auftrifft. Wenn das Plättchen planparallel ist und von parallelem Licht durchsetzt wird, ist das gesamte Feld homogen gefärbt. Ist die Platte nicht planparallel, so ist die Färbung unterschiedlich, entsprechend der Dickenänderung des Plättchens. So ergibt ein sphärisch konvexes oder konkaves Plättchen farbige Ringe, und ein keilförmiges ergibt gerade Streifen.

Die beschriebene Erscheinung wird in groben Zügen folgendermaßen erklärt: Jede monochromatische Welle eines polarisierten Lichtbündels wird beim Eintritt in ein doppelbrechendes Plättchen im allgemeinen in zwei Wellen aufgespalten, die senkrecht zueinander polarisiert sind und die parallel zu den Hauptrichtungen H_1 und H_2 schwingen (Abb. 308). Diese Wellen ver-

laufen bei kleinem Einfallswinkel und bei kleiner Dicke des Plättchens fast in gleicher Richtung und treten aus dem Plättchen fast gemeinsam aus. Wenn sie das Plättchen mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchlaufen haben, haben sie einen bestimmten Gangunterschied und folglich auch eine entsprechende Phasendifferenz erhalten. Weil sie aber senkrecht zueinander schwingen, können sie nicht miteinander interferieren, und man erhält dabei elliptisch polarisiertes Licht. Der Analysator A läßt von jeder Welle nur die in einer Ebene polarisierten Komponenten hindurch. Damit erhält man zwei Wellen, die in Abhängigkeit von dem in dem Plättchen C erhaltenen Gangunterschied miteinander interferieren.

Dieser Gangunterschied ist für Wellen verschiedener Richtung und verschiedener Wellenlänge verschieden. Deshalb ist beim endgültig austretenden Lichtbündel die Zusammensetzung des Lichtes nicht gleich der anfänglichen, und das Bündel erscheint uns gefärbt.

Wir lassen monochromatisches Licht auf das Plättchen senkrecht auffallen. In Abb. 308 liegt die Zeichenebene senkrecht zum auffallenden Lichtbündel O, PO ist die Schwingungsebene im Polarisator, AO die im Analysator, OH_1 und OH_2 die im Kristallplättchen. $OK = a$ ist die Amplitude der aus dem Polarisator austretenden Lichtschwingungen. Der Analysator läßt nur die Komponenten der Schwingungen der Richtung OA durch. Ihre Amplituden sind $a \cos\alpha \cos\beta$ und $a \sin\alpha \sin\beta$. Zwei Wellen, die aus dem Analysator austreten, haben in dem Plättchen den Gangunterschied R und die Phasendifferenz δ erhalten. Überlagert man diese Wellen, so erhält man eine Welle, deren Schwingungsamplitude man aus der Gleichung finden kann:

$$A^2 = a^2 \cos^2\alpha \cos^2\beta + a^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta + 2a^2 \cos\alpha \cos\beta \sin\alpha \sin\beta \cos\delta .$$

Setzt man hierin $\cos\delta = 1 - 2\sin^2\frac{\delta}{2}$, so erhält man für den austretenden Lichtstrom:

$$\Phi = \Phi_0 \left[(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta)^2 - 4 \cos\alpha \cos\beta \sin\alpha \sin\beta \sin^2\frac{\delta}{2}\right] =$$

$$= \Phi_0 \left[\cos^2(\alpha - \beta) - \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2\frac{\delta}{2}\right] .$$

Für gekreuzte Nicols, $\alpha = \beta + 90°$, erhält man

$$\Phi = \Phi_0 \sin^2 2\alpha \sin^2\frac{\delta}{2} ,$$

und für parallel stehende Nicols, $\alpha = \beta$, erhält man

$$\Phi = \Phi_0 \left(1 - \sin^2 2\alpha \sin^2\frac{\delta}{2}\right) .$$

Wir wollen die Phasendifferenz δ durch die Brechungsindizes der Wellen ausdrücken. Wir bezeichnen mit d die Dicke des Plättchens und mit v_1 und v_2 die Geschwindigkeit zweier polarisierter Wellen, die sich in der gleichen Richtung in Plättchen ausbreiten. Die Abhängigkeit des Gangunterschiedes R von d, v_1 und v_2 läßt sich leicht ableiten: Ist die Zeit des Durchganges der Welle mit der Geschwindigkeit v_1 durch die Kristallplättchen gleich t_1 und die gleiche

Zeit für die Welle mit der Geschwindigkeit v_2 gleich t_2, dann ist der Weg, den die erste Welle in Luft in der Zeit zurückgelegt hat, während der die zweite Welle aus dem Kristall in Luft ausgetreten ist, gleich $(t_2 - t_1)\,v$, wobei v die Lichtgeschwindigkeit in Luft bedeutet. Dieser Ausdruck ist gerade der Gangunterschied R. Deshalb erhält man:

$$R = v\,(t_2 - t_1)\,.$$

Ersetzt man t_2 und t_1 durch $\frac{d}{v_2}$ und $\frac{d}{v_1}$, so erhält man $R = d\left(\frac{v}{v_2} - \frac{v}{v_1}\right)$. Weil aber $\frac{v}{v_2} = n_2$ und $\frac{v}{v_1} = n_1$, wobei n der Brechungsindex ist, und die Indizes 1 und 2 der größeren und der kleineren Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im Kristall entsprechen, gilt $R = d\,(n_2 - n_1)$. Folglich ist die Phasendifferenz

$$\delta = \frac{2\pi R}{\lambda} = \frac{2\pi d}{\lambda}\,(n_2 - n_1)\,.$$

Wenn also P senkrecht zu A steht, erhält man:

$$\Phi = \Phi_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\pi d}{\lambda}\,(n_2 - n_1)\,. \tag{1}$$

Hieraus folgt, daß $\Phi = 0$ in zwei Fällen auftritt: entweder für $\alpha = 0$ oder für $\frac{\pi}{\lambda}\,d\,(n_2 - n_1) = m\pi$, wobei m eine ganze Zahl oder null ist.

Die erste Bedingung $\alpha = 0$ besagt, daß die Schwingungsrichtung des Lichtes in den Nicols mit der Schwingungsrichtung des Lichtes in den Plättchen zusammenfällt, d. h., daß im Plättchen das Licht nicht in zwei Komponenten zerlegt wird. Die zweite Bedingung kann in folgenden zwei Fällen erfüllt werden: entweder für $n_2 - n_1 = 0$, d. h., wenn das Plättchen senkrecht zur optischen Achse geschnitten ist, oder für $d\,(n_2 - n_1) = m\lambda$. Daraus sieht man, daß das Plättchen nur bei Anwendung monochromatischen Lichtes dunkel erscheint. In weißem Licht löschen sich nur die Lichtschwingungen aus, für die der Gangunterschied ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge bildet. Folglich erscheint das Plättchen stets farbig, und die Farbe hängt von der Größe $d\,(n_2 - n_1)$ ab.

Ein maximaler Lichtstrom geht für $\alpha = 45°$ hindurch, d. h. für den Fall, wenn das Plättchen so liegt, daß seine Hauptrichtungen die Winkel zwischen den Hauptrichtungen des Analysators und des Polarisators halbieren.

Die zweite Bedingung für maximalen Lichtstrom (für einen monochromatischen Strahl) lautet:

$$\frac{\pi}{\lambda}\,d\,(n_2 - n_1) = (2m + 1)\,\frac{\pi}{2}\,,$$

das heißt

$$d\,(n_2 - n_1) = (2m + 1)\,\frac{\lambda}{2}\,.$$

Wenn P parallel zu A ist, dann ist

$$\Phi = \Phi_0 \left[1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\pi}{\lambda}\,d\,(n_2 - n_1)\right]. \tag{2}$$

In diesem Fall sind die Bedingungen für die Interferenz gerade umgekehrt wie die Bedingungen, die für P senkrecht zu A abgeleitet worden sind. In weißem Licht beobachtet man als Interferenzfarben die Komplementärfarben zu den Farben, die man bei gekreuzten P und A beobachtet. Davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man den Analysator durch das Rhomboeder D ersetzt und durch die Blende mit großer Öffnung beobachtet. Beide Bilder überlappen sich teilweise, und ihr gemeinsamer Teil bleibt dauernd weiß.

Die Differenz der Länge zweier benachbarter ausgelöschter Wellen (und folglich auch die zweier sich verstärkender) läßt sich aus der Bedingung errechnen:

$$(m-1)\,\lambda = m\,(\lambda - \delta\lambda)\,,$$

woraus man erhält:

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{m}\,,$$

das heißt, je größer m (je größer der Gangunterschied), desto näher im Spektrum liegen die sich verstärkenden Wellen. Bei genügend großem Gangunterschied besitzt das Licht für viele Wellenlängen in allen Spektralbereichen ein Intensitätsmaximum, und das hindurchgehende Licht erscheint weiß. Deshalb werden die Erscheinungen der chromatischen Polarisation nur für kleine Gangunterschiede, d. h. in dünnen Plättchen, beobachtet.

Man richtet A senkrecht zu P ein und legt auf das Tischchen ein Gipsplättchen. Es wird gefordert, die Schwingungsrichtung des Lichtes relativ zu den Seiten a und b des Plättchens zu finden und aufzuschreiben sowie zu beobachten, wie sich bei der Beleuchtung mit weißem Licht die Färbung des Plättchens und der hindurchgehende Lichtstrom bei der Drehung des Plättchens um 360° ändert.

Man stellt A parallel zu P, führt das gleiche mit dem Rhomboeder aus und überzeugt sich davon, daß hierbei die komplementäre Färbung auftritt.

Man bringt das Plättchen in die diagonale Lage, relativ zu A und P, für A senkrecht zu P, bestimmt alle Veränderungen der Farbe und des Lichtstromes bei Drehung des Analysators um 360° und erhält die beobachteten Erscheinungen.

Wenn bei gekreuzten P und A unter den Analysator ein Gipsplättchen gelegt wird, das dabei eine empfindliche Schattierung[1]) zeigt, und auf das Tischchen des Gerätes ein $\frac{\lambda}{4}$-Plättchen[2]) aus Glimmer, so ändert sich die im Gerät beobachtete Interferenzfarbe in Abhängigkeit von der gegenseitigen Lage des Gips- und des Glimmerplättchens. Fallen die Richtungen der Schwingungsebene mit der größeren Ausbreitungsgeschwindigkeit im Gips- und im Glimmer-

[1]) Als empfindliche Schattierung wird die Schattierung der violett-roten Farbe bezeichnet, auf deren Änderungen das menschliche Auge besonders empfindlich reagiert. Um bei gekreuzten Nicols eine solche Schattierung zu erhalten, muß man ein Gipsplättchen nehmen, das einen Gangunterschied von 560 nm erzeugt. Dabei wird das Licht dieser Wellenlänge (gelb-grünes Licht), übereinstimmend mit der Gleichung (1), vollständig ausgelöscht, und die Platte erhält die Farbe der empfindlichen Schattierung („Rot I").

[2]) Unter $\frac{\lambda}{4}$-Plättchen versteht man gewöhnlich ein Plättchen, das einen Gangunterschied von $\frac{\lambda}{4}$ bei der Wellenlänge der gelben Natriumlinie erzeugt.

plättchen zusammen, so ist der resultierende Gangunterschied R gleich der Summe der Gangunterschiede in den beiden Plättchen R_G und R_{Gl}, d. h.

$$R = R_G + R_{Gl} = 560\ \mathrm{m}\mu + 147\ \mathrm{m}\mu,$$

und die Färbung sieht grünlich-himmelblau aus. Stehen diese Richtungen senkrecht zueinander, dann erhält man für den Gangunterschied die Differenz aus beiden, d. h.

$$R = R_G - R_{Gl} = 560\ \mathrm{m}\mu - 147\ \mathrm{m}\mu,$$

und die Färbung sieht orange-gelb aus. Fällt die Richtung der Schwingungsebene in dem Glimmerplättchen mit den Hauptrichtungen des Polarisators und des Analysators zusammen, so erzeugt das Glimmerplättchen keinen Gangunterschied, und wir erhalten für den resultierenden Gangunterschied:

$$R = R_G = 560\ \mathrm{m}\mu,$$

das heißt, es bleibt die Färbung der empfindlichen Schattierung erhalten.

Wir bringen zwischen die gekreuzten Nicols (Polarisator und Analysator) ein Gipsplättchen von empfindlicher Schattierung („Rot I“) und irgendein anderes (dem Versuch beigegebenes) Kristallplättchen und beobachten die Änderung der Färbung und des Lichtstromes bei der Drehung der Plättchen. Zuerst wird das Kristallplättchen und dann das Gipsplättchen gedreht. Es wird gefordert, die beobachteten Erscheinungen zu erklären.

Übung 3

Die Bestimmung der Dicke eines Kristallplättchens und der Größe seiner Doppelbrechung

Die Bestimmung der Dicke eines Kristallplättchens mit Hilfe eines Gipskeils. Dieser Keil (Abb. 309) ist so geschnitten, daß seine scharfe Kante (Höhe) parallel zu einer der Hauptrichtungen des Kristalls verläuft. Wenn der Keil im Gerät zwischen Polarisator und Analysator (wobei $P \perp A$ steht) in diagonaler Lage so gelegt wird, daß seine lange Seite den Winkel zwischen P und A halbiert, so beobachtet man in monochromatischem Licht über die gesamte Länge des Keiles helle und dunkle Streifen, die parallel zu der scharfen Kante des Keiles verlaufen und den gleichen Abstand voneinander besitzen. Die dunklen Streifen werden bei dem Gangunterschied

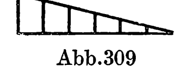


Abb.309

$$R = d(n_2 - n_1) = 2m\frac{\lambda}{2} = m\lambda$$

und die hellen bei

$$R = d(n_2 - n_1) = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$$

beobachtet, wobei d die Dicke des Keiles und m die Ordnung der Streifen bezeichnen, d. h., m ist eine ganze Zahl. Hieraus folgt, daß der Abstand der Streifen voneinander proportional zu λ anwächst. Folglich ist der Abstand für violette Strahlen kleiner als der für rote. Deshalb beobachtet man bei weißem

Licht auf dem Keil farbige Streifen, deren Farbe sich mit der Dicke des Keiles fast in der gleichen Reihenfolge ändert, wie bei den NEWTONschen Ringen. Bei der Drehung des Keiles um das einfallende Lichtbündel beobachtet man vier Stellungen, bei denen die hellen Streifen verschwinden und das ganze Gesichtsfeld dunkel erscheint. Das ist dann der Fall, wenn die Hauptrichtungen H_1 und H_2 des Keiles mit den Polarisationsebenen von P oder A zusammenfallen.

Für $A \parallel P$ erscheint der Keil in diesen vier Stellungen weiß. In seinen diagonalen Stellungen bei monochromatischem Licht beobachtet man die hellen Streifen dort, wo bei gekreuzten Nicols die dunklen Streifen beobachtet wurden, und umgekehrt. In weißem Licht beobachtet man ebenfalls farbige Streifen, die jedoch relativ zu der Färbung bei gekreuzten Nicols komplementär gefärbt sind.

Mit zunehmender Dicke des Keiles ändert sich bei weißem Licht die Färbung, wobei einige Farben periodisch wiederkehren, z. B. die rote, die violette und die grüne Farbe. Deshalb teilt man die Interferenzspektren wie die Beugungsspektren in Spektren erster, zweiter, dritter usw. Ordnung ein und spricht zum Beispiel von der roten Farbe erster Ordnung, zweiter Ordnung usw. Die verschiedenen Farben der ersten drei Ordnungen sind sehr gesättigt, und ihnen entsprechen ganz bestimmte Keildicken. Nach der dritten Ordnung beginnen die Farben zu verweißlichen, nur rot und grün treten noch besonders kräftig hervor.

Bei größeren Keildicken verlieren sich selbst diese Farben, und der Keil wird farblos, wie das auch bei den NEWTONschen Ringen der Fall ist. Das erklärt man durch eine Addition verschiedener Farben in jedem Punkte, die zusammen weißes Licht ergeben.

In der Tabelle 45 (am Ende des Buches) wird die Reihenfolge der Farben in den Spektren der ersten drei Ordnungen des Gipskeils sowohl für $P \perp A$ als auch für $P \parallel A$ wiedergegeben. Darin ist auch die entsprechende Keildicke in Millimetern angegeben. Benutzt man diese Tabelle, so kann man die Dicke eines vorliegenden Gipsplättchens bestimmen. Dazu muß man das Plättchen auf den Keil so auflegen, daß die verschiedenartigen Hauptrichtungen (H_1 des Keiles mit H_2 des Plättchens) zusammenfallen. Dann entsteht an der Stelle, an der ihre Dicke gleich ist, für $P \perp A$ ein schwarzer Streifen, und auf beiden Seiten des Streifens liegen die Spektren erster, zweiter usw. Ordnung. Verschiebt man das Plättchen etwas in der Richtung parallel zur scharfen Kante des Keiles, dann sieht man auf dem Keil, welcher Farbe und welcher Ordnung die Färbung des Plättchens entspricht. Danach läßt sich aus der Tabelle die Plättchendicke entnehmen. Außerdem kann man auf diese Weise die Ordnung der Färbung jedes beliebigen Kristallplättchens und die ihr äquivalente Dicke des Gipskeils bestimmen.

Alle hier beschriebenen Erscheinungen müssen auf dem Gipskeil sowohl in monochromatischem (durch Anwenden eines Farbfilters) als auch in weißem Licht bei $P \perp A$ und $P \parallel A$ für eine diagonale Lage des Keiles beobachtet werden.

Weiterhin sollen für Gipsplättchen verschiedener Dicke die Farbe und die Ordnung der Färbung bestimmt und die Dicke der Plättchen aus der Tabelle 45

entnommen werden. Das gleiche soll für die Glimmerplättchen von $\frac{\lambda}{4}$, $\frac{\lambda}{2}$ usw. durchgeführt werden. Man bestimme den Charakter ihrer Färbung, die Ordnung des Spektrums und die äquivalente Dicke der Gipsplättchen, indem man hierzu wieder den Keil und die Tabelle verwendet.

Die Bestimmung der Größe der Doppelbrechung eines Kristallplättchens bestimmter Dicke. Die Größe der Doppelbrechung des Plättchens, die ausgedrückt wird durch die Differenz der Brechungsindizes für die Wellen, die senkrecht zum Plättchen verlaufen, erhält man aus der Beziehung

$$R = d(n_2 - n_1),$$

wobei R den von dem Plättchen hervorgerufenen Gangunterschied, d die Dicke des Plättchens und $(n_2 - n_1)$ die Größe der Doppelbrechung bezeichnen. Als charakteristische optische Konstante für den Kristall erweist sich die Größe der maximalen Doppelbrechung $n_g - n_p$. Dabei ist n_g der größte und n_p der kleinste Brechungsindex. Diese Konstante wird an einem zweiachsigen Plättchen bestimmt, das parallel zu der Ebene der optischen Achsen geschnitten ist, oder an einem einachsigen, das parallel zu seiner optischen Achse geschnitten ist.

Das Kristallplättchen wird so zwischen die gekreuzten Nicols (Polarisator und Analysator) gelegt, daß die Schwingungsrichtung des senkrecht zu ihm verlaufenden Lichtbündels einen Winkel von 45° mit den Hauptrichtungen des Polarisators und Analysators bildet. In diesem Fall geht der größte Lichtstrom durch das Plättchen.

Die Größe der Doppelbrechung wird mit Hilfe des farbigen Nomogrammes der Doppelbrechung bestimmt (siehe Tabelle 46 am Ende des Buches). Es ist so konstruiert, daß auf der horizontalen Achse die Größe des Gangunterschiedes in *nm* und auf der vertikalen Achse die Dicke des Plättchens in *mm* aufgetragen sind. Die Tabelle selbst ist farbig, und jedem Gangunterschied entspricht eine bestimmte Interferenzfarbe. Da die Abhängigkeit zwischen dem Gangunterschied, der Dicke des Plättchens und der Größe der Doppelbrechung linear ist, so ist der geometrische Ort aller Punkte, die die gleiche Größe der Doppelbrechung charakterisieren, eine Gerade. Für verschiedene Größen $n_g - n_p$ ist sie zur horizontalen Achse verschieden stark geneigt. In der oberen und der rechten Spalte stehen die Größen der Doppelbrechung, die jeder geneigten Geraden entsprechen.

Die Bestimmung der Größe $(n_g - n_p)$ wird folgendermaßen durchgeführt:

1. Man sucht den Streifen, dessen Farbe der Farbe des Kristallplättchens entspricht, das sich zwischen den gekreuzten Nicols (Polarisator und Analysator) befindet;

2. man sucht den Schnittpunkt dieses Streifens mit der Linie, die der Dicke des Plättchens entspricht;

3. an der geneigten Geraden, die durch diesen Schnittpunkt verläuft, liest man die Größe der Doppelbrechung in der oberen oder rechten Spalte der Tabelle ab.

Aus der Größe des Gangunterschiedes und einer bekannten Doppelbrechung kann man ebenso die umgekehrte Aufgabe lösen, d. h. die Dicke des Plättchens bestimmen.

Man nimmt ein Kristallplättchen mit bekannter Doppelbrechung, z. B. ein Gipsplättchen. Seine Doppelbrechung ist

$$n_g - n_p = 1{,}531 - 1{,}521 = 0{,}010$$

für λ_{Na}. Aus der Tabelle entnimmt man ihren Gangunterschied und bestimmt graphisch die Dicke: Auf der Geraden, die der geometrische Ort aller Punkte gleicher Doppelbrechung ist, geht man bis zum Schnitt mit dem Streifen, der die gleiche Interferenzfarbe hat wie auch das Plättchen. Von diesem Schnittpunkt geht man auf der Horizontalen bis zum linken Rand der Tabelle und liest dort die Dicke des Plättchens ab.

Das erhaltene Ergebnis muß überprüft werden durch Division der Größe des Gangunterschiedes, ausgedrückt in *nm*, durch die vorgegebene Größe der Doppelbrechung für einen vorgegebenen Kristallschnitt.

Spezialliteratur

Siehe Literatur zu Aufgabe 86.

Aufgabe 86

Die Untersuchung der kristalloptischen Erscheinungen mit einem Polarisationsmikroskop

Zubehör: 1. Polarisationsmikroskop, 2. mehrere Objektive und Okulare verschiedener Vergrößerung, 3. zwei Kompensatoren: Quarzkeil I. bis IV. Ordnung und Quarzplättchen von „empfindlicher Schattierung“ („Rot 1“), 4. verschiedene Immersionsflüssigkeiten, 5. Kristall- und Glaspulver, 6. Auswahl von Kristallplättchen, die senkrecht und parallel zur optischen Achse (einachsige Kristalle) und senkrecht zur spitzen Bisektrix (zweiachsige Kristalle) geschnitten sind, 7. Schliffe von Biotitkristallen.

Die Beschreibung der Anordnung. Das Polarisationsmikroskop besteht aus einem Stativ *a* (Abb. 310) mit dem Tubus *b*, in dem sich der Nicol (obere Analysator) *c* sowie die Linse *d* befindet, welche zur Untersuchung der Polarisationserscheinungen in einem konvergenten Bündel verwendet wird (Bertrandsche Linse). Der Analysator und die Linse *d* können durch Fenster aus dem Tubus herausgezogen werden. Der Tubus besitzt noch ein drittes Fenster *e*, das zur Einführung von Kompensatoren in das optische System des Mikroskops dient. Der Tubus kann mit der Schraube *h* und der Mikrometerschraube *g* gehoben und gesenkt werden. Die Drehung der Mikrometerschraube kann an einer Teilung abgelesen werden, die an dem Kopf der Schraube eingeritzt ist. Gewöhnlich entspricht ein Teilstrich der Verschiebung des Tubus um 0,002 bis 0,003 mm. Für bequemere Anwendung läßt sich das Stativ in jede beliebig geneigte Lage bringen und mit der entsprechenden Schraube festklemmen.

Die Mikroskope werden in zwei Typen eingeteilt, die sich durch die Vorrichtung zum Auswechseln der Objektive unterscheiden: die einen haben Revolver- und die anderen Zangenwechsler. Bei den ersteren werden die Objektive in die Gewinde der Scheibe *f* geschraubt, die sich um eine Achse drehen läßt. In Mikroskopen des zweiten Types werden die Objektive in eine

federnde Zange geschoben, die mit ihrer Gabel hinter einen kleinen Zapfen am Ring des Objektivs einrastet. Dieser Ring ist mit einer Vorrichtung zur Zentrierung des Objektivs versehen.

Das Objektiv ist zentriert, wenn der Schnittpunkt der Fäden des Fadenkreuzes mit der Drehachse des Objekttischchens *i*, auf den der zu untersuchende Gegenstand gelegt wird, zusammenfällt.

Das Tischchen läßt sich um seine Achse drehen, wobei der Drehwinkel an einem Limbus am Rande des Tischchens bis auf 1° genau abgelesen werden kann. An der Seite befindet sich die Schraube *k*, mit der der Tisch in einer bestimmten Stellung festgeklemmt werden kann. Das Tischchen ist mit den Klammern *L* versehen, die zum Festhalten des Objektes dienen.

Der Beleuchtungsapparat, der sich unter dem Tischchen befindet, besteht aus einem Spiegel *M* (plan und konkav), dem Polarisator *N* mit Beleuchtungslinse und Blende *O* und dem Kondensor *P*, der das konvergente Lichtbündel erzeugt. Mit Hilfe eines nicht in der Abb. 310 gezeigten Hebels läßt sich der Kondensor auch aus dem Strahlengang entfernen. Der dem Mikroskop beigegebene Zusatzkondensor (Apertur 0,5 bis 1,3) wird mit Objektiven verwendet, die eine stärkere Vergrößerung ermöglichen. Die Schraube *S* dient zum Festklemmen des Polarisators in einer geforderten Stellung, wenn bei gekreuzten Nicols beobachtet wird. Der gesamte Beleuchtungsapparat läßt sich mit Hilfe der seitlichen Schraube *R* senken und auch zur Seite wegdrehen.

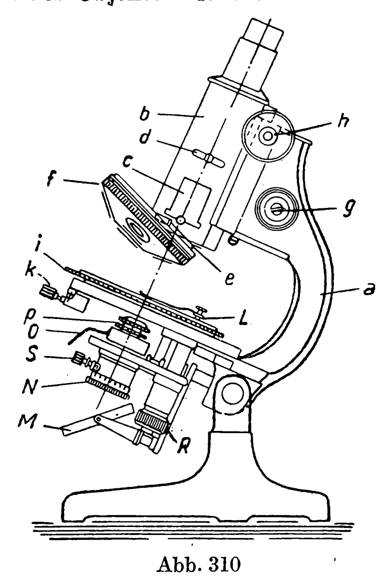


Abb. 310

Das Quarzplättchen von empfindlicher Schattierung („Rot I“) ist so geschnitten, daß die Welle, deren Schwingungsebene parallel zu der längeren Seite des Plättchens verläuft, den Brechungsindex n_p besitzt, während die Welle mit der Schwingungsebene längs der kürzeren Seite den Brechungsindex n_g besitzt. Der durch dieses Plättchen erzeugte Gangunterschied ist gleich 555 *nm*. Dieser Gangunterschied ergibt bei gekreuzten Nicols eine violett-rote Färbung, die der Grenze zwischen erster und zweiter Ordnung entspricht (empfindliche Schattierung). Bei dieser Färbung ergibt eine kleine Vergrößerung des Gangunterschiedes (um 50 *nm*) schon eine Blaufärbung, und eine Verkleinerung ergibt eine orange-rote Färbung. Über den Quarzkeil siehe die Beschreibung des Gipskeiles in Aufgabe 85.

Die Justierung des Mikroskops. Zur Beleuchtung des zu untersuchenden Objektes verwendet man in den meisten Fällen eine Speziallampe oder eine mattierte starke Glühlampe, um gestreutes Licht zu erhalten. Das Objektiv mit kleiner Vergrößerung (8,8fach) wird in die Zange des Tubus gesteckt. Der

Analysator und die Linse d werden aus dem Tubus gezogen. Ohne das Okular einzusetzen, schaut man in den Tubus des Mikroskops und versucht, durch Verändern der Spiegellage das Gesichtsfeld so gut wie möglich auszuleuchten. Dabei muß die Blende des Beleuchtungsapparates voll geöffnet sein. Dann steckt man in den Tubus das mit einem Fadenkreuz versehene Okular, schiebt den Analysator hinein, löst die Schraube S und dreht den Polarisator, bis die Helligkeit des Gesichtsfeldes maximal geschwächt ist. Die maximale Schwächung der Gesichtsfeldhelligkeit deutet auf die gekreuzte Stellung der Nicols hin.

Danach muß man die Schwingungsebene des Polarisators bestimmen. Hierzu nimmt man den Analysator heraus, nachdem man die Schraube gelöst hat, die ihn in dem Tubus des Mikroskops festhält. Man beobachtet mit dem Analysator vor dem Auge das von irgendeiner glänzenden Oberfläche (z. B. von dem Mikroskopschränkchen) reflektierte Licht. Man dreht den Nicol und stellt fest, wie sich die Stärke des durchgehenden Lichtes verändert. Da man die Schwingungsrichtung des reflektierten Lichtes kennt, kann man auf diese Weise die Schwingungsebene des Analysators bestimmen, und weil die Stellung der gekreuzten Nicols vorher eingestellt worden ist, kennt man auch die Schwingungsebene des Polarisators.

Um während der Arbeit stets über die Schwingungsrichtung orientiert zu sein, prüft man das Zusammenfallen des Okularfadenkreuzes mit den Schwingungsebenen des Analysators und des Polarisators. Die Lage der Fäden prüft man mit einem Dünnschliff aus schwarzem Glimmer (Biotitkristall). Im Glimmer erkennt man leicht die Spaltrisse. Das sind die Richtungen, längs denen der Glimmer leicht bis zu den dünnsten Plättchen zerlegt werden kann. Man schiebt den Analysator heraus und dreht das Objekttischchen so, daß die Spaltrisse parallel zu einem der Okularfäden stehen. Dann schiebt man den Analysator wieder hinein. Dabei muß völlige Verdunkelung des Kristalles entstehen, weil die Spaltrisse des Biotits mit einem der Hauptschnitte des Brechungsindexellipsoids zusammenfallen. Wenn man keine völlige Verdunkelung erhält, so besagt das, daß das Fadenkreuz des Okulars nicht mit den Schwingungsebenen des Nicols übereinstimmt. Tritt ein solcher Defekt des Mikroskops auf, dann muß er von einem Spezialisten behoben werden, weil er einen großen Einfluß auf die Messungen ausübt.

Die Zentrierung des Objektivs. Wenn das Objektiv nicht zentriert ist, beschreiben alle Objektpunkte bei der Drehung des Tischchens Kreise, deren Zentrum nicht mit dem Fadenkreuz des Okulars übereinstimmt. Die Zentrierung besteht darin, daß man versucht, das Zentrum der Drehung des Gesichtsfeldes mit der Mitte des Okularfadenkreuzes zusammenfallen zu lassen. Durch rasche Drehung des Tischchens nach beiden Seiten merkt man sich (nach Augenmaß) das Drehzentrum. Dann verdreht man die senkrecht zueinanderstehenden Zentrierschrauben an der Fassung des Objektivs und versucht, das Drehzentrum des Gesichtsfeldes mit der Mitte des Fadenkreuzes zusammenfallen zu lassen. Man wiederholt mehrmals diese Zentrierung, bis die Objektivachse mit der Drehachse des Tischchens zusammenfällt.

Nach der Justierung des Polarisationsmikroskops geht man an die Ausführung der Messungen.

Übung 1

Die Bestimmung des Brechungsindex von Pulvern nach der Lichtstreifenmethode (Immersionsmethode)

Bei Anwendung dieser Methode ist nur ein Nicol erforderlich. Deshalb muß man den Analysator aus dem Tubus des Mikroskops herausschieben. Wenn die Brechungsindizes eines Kristallpulvers bestimmt werden, so wird anfänglich das zu untersuchende Kristallbruchstück in eine Stellung gebracht (durch Drehen des Mikroskoptischchens), die bei gekreuzten Nicols Auslöschung hervorruft, und erst dann wird der Analysator entfernt. Zur besseren Beobachtung muß ein Objektiv mit höherer Vergrößerung genommen werden (40- oder 60fach).

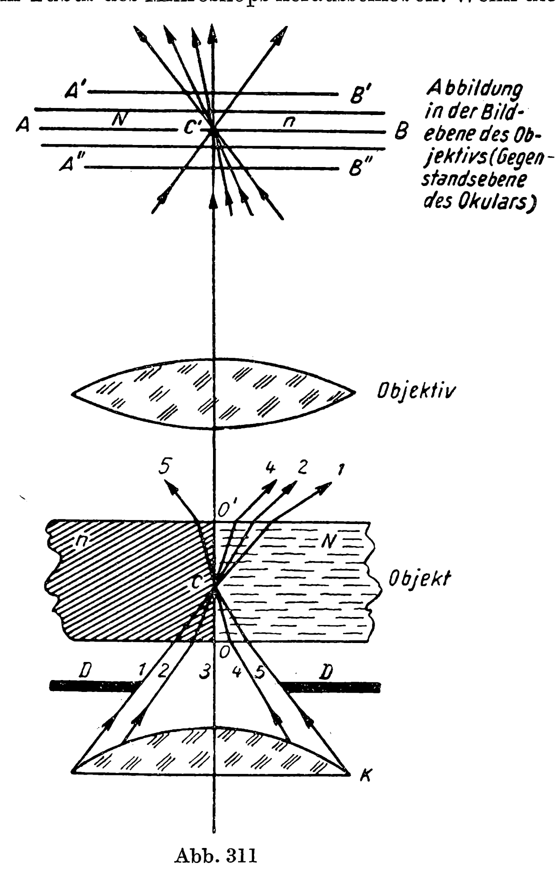


Abb. 311

Die Bestimmung des Brechungsindex beruht auf der Beobachtung der Verschiebung eines Lichtstreifens[1]) an der Grenze zweier Medien mit verschiedenen Brechungsindizes. Der Brechungsindex kann bestimmt werden, wenn die Brechungsindizes beider Medien sich mindestens um 0,001 unterscheiden. Die beobachtete Entstehung und Verschiebung des Lichtstreifens wird durch Erscheinungen hervorgerufen, die an der Grenze zweier verschieden brechender Medien entstehen. Diese Erscheinungen werden im wesentlichen durch die Abb. 311 erklärt.

Wenn die Strahlen 1, 2, 3, 4, 5 aus dem Kondensor K (Abb. 311) in einem konvergenten Bündel auf die Grenze zweier Medien mit den Brechungsindizes n und N fallen, wobei $N > n$, so geht der Strahl 3 längs der Grenzfläche hindurch, die Strahlen 1 und 2 werden an der Grenze OO' gebrochen

[1]) Anm. d. Übers.: Beckesche Linie.

und treten in das Medium mit dem Brechungsindex N ein, der Strahl 5 wird an der Grenze OO' gebrochen und tritt in das Medium mit dem Brechungsindex n ein, und der Strahl 4 erleidet eine totale innere Reflexion an der Grenzfläche und gelangt nicht in das linke Medium. Deshalb wird das Medium mit dem größeren Brechungsindex N heller erscheinen als das Medium mit dem Brechungsindex n. Die Blende DD schneidet die Randstrahlen weg. Damit wird die Intensität der links austretenden Lichtbündel (Strahl 5) geschwächt und der Kontrast der Vergleichsgrenze erhöht. Das Objektiv vereinigt die durch das Präparat laufenden Strahlen in der Bildebene und erzeugt ein verkehrtes reelles Bild, das mit dem Okular betrachtet wird. Bei genauer Fokussierung der Gegenstandsebene des Okulars (Bildebene des Objektivs) geht AB gerade durch den Schnittpunkt C' (Abb. 311). Wenn man den Tubus des Mikroskops hebt, rückt die Bildebene des Objektivs tiefer, und die Gegenstandsebene des Okulars schneidet ein Strahlenbündel, das vom Objektiv höher als der Punkt C' auf der Geraden $A'B'$ gesammelt wird. Dem Beobachter scheint es, als ob auf dem Medium mit dem größeren Brechungsindex ein heller Streifen erscheint, der sich bei dem Anheben des Mikroskoptubus in Richtung des Mediums mit höherem Brechungsindex verschiebt. Wenn der Tubus gesenkt wird, schneidet die Gegenstandsebene das Bündel unterhalb des Punktes C' auf der Geraden $A''B''$, und der helle Streifen verschiebt sich in Richtung des Mediums mit kleinerem Brechungsindex. Offensichtlich kann der helle Streifen benutzt werden als ein einfaches und bequemes Kennzeichen dafür, ob der zu untersuchende Stoff einen größeren oder einen kleineren Brechungsindex hat als das ihn umgebende Medium. Wenn beim Heben des Tubus der Lichtstreifen sich auf das zu untersuchende Medium (ins Innere) und beim Senken des Tubus nach außen, d. h. auf das ihn umgebende Medium, verschiebt, hat der zu untersuchende Stoff einen größeren Brechungsindex als das ihn umgebende Medium. Wenn die Brechungsindizes des zu untersuchenden Stoffes und des ihn umgebenden Mediums genau übereinstimmen, verschwindet der Streifen vollständig, und der Stoff wird unsichtbar, als ob er sich in der Flüssigkeit „aufgelöst" hätte.

Zur Messung des Brechungsindex schüttet man etwas von dem zu untersuchenden Pulver auf den Objektträger. Man benetzt das Pulver mit 1 bis 2 Tropfen einer der Immersionsflüssigkeiten. Dabei notiert man die Nummer der Flüssigkeit und ihren Brechungsindex, der aus der beiliegenden Tabelle entnommen werden kann. Der Tropfen wird mit einem Deckglas bedeckt und das ganze Präparat auf den Objekttisch des Mikroskops gebracht. Zur Beseitigung der Dispersion wird das Präparat mit monochromatischem Licht beleuchtet. Gleichzeitig wird damit die Meßgenauigkeit erhöht. Wenn weißes Licht verwendet wird, verschwindet der Streifen nur, wenn die Dispersion der Flüssigkeit mit der des Stoffes übereinstimmt, was praktisch nur sehr selten vorkommt. Das Mikroskop wird auf die Grenze zwischen Pulverkorn und Flüssigkeit scharf eingestellt. Dann hebt man den Tubus und stellt fest, in welcher Richtung der Lichtstreifen sich verschiebt.

Man fertigt ein Präparat mit einer anderen Flüssigkeit an und beobachtet erneut. Durch systematische Auswahl der Flüssigkeiten erreicht man ein Verschwinden des Lichtstreifens. Kennt man den Brechungsindex der Flüssigkeit

für die vorliegenden Bedingungen (Temperatur und Wellenlänge), so kann man den Brechungsindex des untersuchten Stoffes bestimmen.

Um die frontale Linse des Objektivs nicht zu beschädigen, muß die Beobachtung stets beim Heben des Mikroskoptubus durchgeführt werden. Außerdem muß das Präparat stets mit einem Deckglas versehen werden.

Bei der Messung des Brechungsindex mit der beschriebenen Methode (Immersionsmethode) muß folgendes beachtet werden: Während bei isotropen Medien der Brechungsindex in beliebiger Richtung konstant ist, werden bei anisotropen kristallisierten Stoffen in jedem Kristall zwei Brechungsindizes beobachtet, je nachdem, in welcher Richtung die Schwingungsebene des aus dem Polarisator austretenden Lichtes liegt. Besonders stark unterscheiden sich die Brechungsindizes voneinander, wenn der Kristallit vor der Messung in die Stellung völliger Verdunkelung bei gekreuzten Nicols gebracht wird.

In diesem Fall lassen sich beide Brechungsindizes bestimmen, wenn man zwei Messungen bei Stellungen des Objekttischchens durchführt, die sich um 90° voneinander unterscheiden. Zur Bestimmung des maximalen und des minimalen Brechungsindex muß man im allgemeinen eine große Zahl von Messungen bei verschiedenen Orientierungen der Kristallite eines und desselben Stoffes durchführen.

Übung 2

Die Bestimmung der Dicke von Quarzplättchen und der Größe der Doppelbrechung von Kristallen

Der Gangunterschied R der Strahlen hängt mit der Schichtdicke d und mit der Größe der Doppelbrechung $(n_g - n_p)$ durch folgende Beziehung zusammen:

$$R = d\,(n_g - n_p)$$

(siehe Aufgabe 85).

1. Auf das Objekttischchen des Mikroskops wird zwischen gekreuzte Nicols ein Quarzplättchen so gelegt, daß es eine besonders intensive Färbung erhält. Dazu dreht man das Tischchen mit dem Plättchen, stellt die Lage der größten Verdunkelung des Gesichtsfeldes fest und dreht danach das Mikroskoptischchen um 45° entgegen dem Uhrzeigersinn. Dann schiebt man durch das Fenster e (Abb. 310) einen Quarzkeil und beobachtet die erhaltene Veränderung der Interferenzfarben beim Durchschieben des Keiles. Sie fallen entweder bis zur schwarzen Farbe oder erhöhen ihre Ordnung in der Newtonschen Skala. Im zweiten Fall muß das Tischchen um 90° gedreht werden. Dann ist die Kompensation des Gangunterschiedes (Erhalten der Auslöschung) ohne Schwierigkeiten möglich. Kennt man die Dicke des Keiles für die Farbe der entsprechenden Ordnung (die beim Auflegen auf das Plättchen ausgelöscht wird), so kann man aus der Tabelle 45 (am Ende des Buches) die gesuchte Plättchendicke entnehmen.

2. Zwischen die gekreuzten Nicols wird ein Kristallplättchen bekannter Dicke gebracht. Man führt den Quarzkeil ein und versucht, wie eben beschrieben, die Verdunkelung des Gesichtsfeldes zu erreichen. Kennt man für

den Keil die Ordnung der Interferenzfarbe, die der Auslöschung entspricht, so kann man aus dem farbigen Nomogramm für die Doppelbrechung die Größe der Doppelbrechung des untersuchten Plättchens bestimmen.

Übung 3

Die Bestimmung des optischen Vorzeichens einachsiger Kristalle und des optischen Vorzeichens sowie des Winkels zwischen den optischen Achsen zweiachsiger Kristalle in konvergentem Licht[1])

Um ein stark konvergentes Lichtbündel zu erhalten, wird in den Beleuchtungsapparat des Mikroskops (Abb. 310) der Kondensor P eingeführt. Zur Vergrößerung der Apertur und zur maximalen Ausnutzung des aus dem Kristall austretenden divergenten Strahlenbündels wird ein Objektiv mit maximaler Vergrößerung (60fach) eingesetzt. Das dabei erhaltene Interferenzbild wird entweder unmittelbar bei herausgenommenem Okular oder mit dem Okular und der zusätzlich eingeführten Linse d beobachtet. Das Okular bildet mit der Linse eine Lupe von 2- bis 3facher Vergrößerung.

Man muß beachten, daß bei der Anwendung eines starken Objektivs der Abstand zwischen seiner frontalen Linse und dem Präparat sehr klein wird und die Gefahr entsteht, bei unvorsichtigem Arbeiten sowohl das Präparat als auch die Frontlinse zu zerdrücken. Deshalb muß zuerst das Objektiv bis zur Berührung an das Präparat herangeführt werden, wobei man von der Seite die Stellung des Objektivs beobachtet und erst dann das Bild nur durch Heben des Tubus, d. h. durch Drehen der Schraube h entgegen dem Uhrzeigersinn, scharf einstellt.

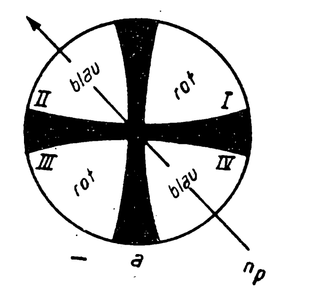
Zur Untersuchung der Kristalle in konvergentem Licht werden Kristallschliffe verwendet, die senkrecht zur optischen Achse (für einachsige) und senkrecht zur spitzen Bisektrix (für zweiachsige) geschnitten sind.

Kurze Theorie. Die Erscheinung in einachsigen Kristallen, die senkrecht zur optischen Achse geschnitten sind. In einem parallelen Strahlenbündel benimmt sich das Plättchen wie ein isotroper Körper und weist keinerlei Anzeichen von Doppelbrechung auf. In einem konvergenten Lichtbündel erzeugt es charakteristische Interferenzfiguren. Wenn diese Erscheinung im monochromatischen Licht bei gekreuzten Nicols beobachtet wird, zeigt sich im Mikroskop eine Interferenzfigur, die aus konzentrischen dunklen und hellen Ringen besteht, welche von einem schwarzen Kreuz geschnitten werden. Die Kreuzarme sind in der Mitte schmaler als am Rande des Gesichtsfeldes. Der Abstand zwischen den dunklen und den hellen Ringen ist für rotes Licht größer als für blaues. Bei der Beobachtung in weißem Licht stellt die Interferenzfigur deshalb farbige Ringe (Isochromaten, d. h. Kurven gleicher Färbung) dar, deren Farbe sich bei dem Übergang von einem Ring zum anderen übereinstimmend mit der Skala der NEWTONschen Ringe ändert. Die sie schneidenden Kreuzarme tragen die Bezeichnung *Isogyren.* Es ist klar, daß sich die Figur bei der Drehung um die Strahlachse nicht verändert. Dreht man jedoch einen der Nicols um 90°, so nehmen die Isochromaten die

[1]) Anm. d. Übers.: Konoskopische Methode.

Komplementärfarben an, und das schwarze Kreuz wird durch ein weißes ersetzt. Je dicker das Plättchen und je größer die Doppelbrechung des Kristalles, desto enger liegen die Isochromaten aneinander.

Zur Bestimmung des optischen Vorzeichens einachsiger Kristalle wird ein Quarzplättchen von empfindlicher Schattierung verwendet. Wie schon gesagt, ist ein solches Plättchen so orientiert, daß die Welle mit der Schwingungsrichtung parallel zur Längsseite des Plättchens die größere Ausbreitungsgeschwindigkeit, d. h. den kleineren Brechungsindex (n_p) besitzt, als auf seiner Fassung angegeben ist. Das Quarzplättchen wird in das Fenster des Mikroskops eingeführt und dabei die Veränderung der Farbe des Interferenzbildes beobachtet: Das Kreuz nimmt violett-rote Farbe an, und die sich gegenüberliegenden Quadranten färben sich blau bzw. rot (orange). Der Kristall ist optisch positiv, wenn die Quadranten, die die Längsseite des Plättchens



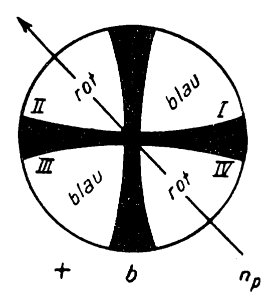


Abb. 312. Die Bestimmung des optischen Vorzeichens einachsiger Kristalle mit Hilfe eines Quarzkompensators. *a* — optisch negativ; *b* — optisch positiv.

schneiden, rot (orange) gefärbt und die beiden anderen blau gefärbt erscheinen (siehe Abb. 312). Dabei beobachtet man bei stark doppelbrechenden oder dicken Plättchen die Färbung nur im mittleren Teil des Kreuzes.

Zur Erklärung dieser Regel muß man sich an zwei Aussagen erinnern: 1. ein einachsiger Kristall gilt als optisch positiv, wenn die Geschwindigkeit der außerordentlichen Welle kleiner ist als die Geschwindigkeit der ordentlichen ($n_0 < n_e$), und umgekehrt. 2. Die außerordentliche Welle schwingt in einer Ebene, die durch die Richtung der einfallenden Welle und der optischen Achse bestimmt ist, d. h. in der beobachteten Interferenzfigur radial. Es ist offensichtlich, daß die Schwingungsrichtung der ordentlichen Welle in jedem beliebigen Punkt der Figur mit den Tangenten an die Isochromaten zusammenfällt.

Auf Grund dieser allgemeinen Aussagen kann man leicht einsehen, worauf die angeführte Regel zur Bestimmung des optischen Vorzeichens einachsiger Kristalle beruht.

Beim Zusammenfallen der Schwingungsrichtung der Lichtwellen im Quarzplättchen, die die größere Ausbreitungsgeschwindigkeit (n_p) besitzen, mit der Schwingungsrichtung der Wellen in dem zu untersuchenden Kristall, die sich mit kleinerer Geschwindigkeit (n_g) ausbreiten, entsteht eine Verkleinerung des

Gangunterschiedes der Wellen, und die entsprechenden Stellen der Interferenzfigur färben sich rot. Wie schon gesagt, entsprechen den Radien der Interferenzfigur die Schwingungen der außerordentlichen Welle. Daher ist die Geschwindigkeit der außerordentlichen Welle kleiner als die Geschwindigkeit der ordentlichen ($n_e > n_0$), und das ist die Bedingung dafür, daß der Kristall optisch positiv ist. Bei den sich gegenüberliegenden Quadranten, für die die Lichtschwingungen, die in Richtung der Längsseite des Quarzplättchens schwingen, mit der Richtung der Lichtschwingungen der ordentlichen Welle in dem zu untersuchenden Plättchen zusammenfallen, beobachtet man eine Vergrößerung des Gangunterschiedes. Diese Quadranten werden daher blau gefärbt. Im Falle eines optisch negativen Kristalles vertauschen die Interferenzfarben natürlich ihre Lage.

Die Erscheinungen in optisch zweiachsigen Kristallen, welche senkrecht zur Halbierenden des spitzen Winkels zwischen den optischen Achsen geschnitten sind. Wenn zwischen die gekreuzten Nicols ein Plättchen aus einem zweiachsigen Kristall gelegt wird, das senkrecht zur Halbierenden des spitzen Winkels zwischen den optischen Achsen (oder wie man auch sagt, senkrecht zur spitzen Bisektrix) geschnitten ist, ändert sich in einem parallelen Strahlenbündel bei Drehung des Objekttischchens die Helligkeit des Gesichtsfeldes und erscheint nur in vier Stellungen des Plättchens dunkel. Die Verdunkelung wird unter der Bedingung beobachtet, daß die Ebene des Hauptschnittes (Ebene durch die optischen Achsen) mit den Hauptschnitten des Polarisators und des Analysators zusammenfällt.

Untersucht man ein solches Plättchen in konvergentem Licht, so beobachtet man unterschiedliche Bilder. Wenn man das Plättchen in konvergentem Licht in einer solchen Lage beobachtet, in der bei parallelem Licht das Gesichtsfeld dunkel erschienen wäre, so sieht man eine Interferenzfigur, die aus hellen und dunklen Lemniskaten besteht. Diese Lemniskaten verlaufen um zwei Brennpunkte, die an den Austrittsstellen der optischen Achsen liegen. Verwendet man weißes Licht, so sind die Lemniskaten wie die Newtonschen Ringe gefärbt. Die Lemniskaten werden von einem dunklen Kreuz geschnitten, dessen Arme ungleich in ihrer Breite sind. In Richtung der Ebene durch die optischen Achsen liegt ein schmaler, und in Richtung senkrecht dazu liegt ein breiterer und verschwommenerer Arm. Bei der Drehung des Objekttischchens gehen die Kreuzarme auseinander und verwandeln sich in zwei Hyperbelzweige. Am weitesten voneinander entfernt liegen die Zweige, wenn der Hauptschnitt unter 45° zu den Hauptschnitten der Nicols verläuft. Die Mitte der Hyperbelzweige fällt mit den Austrittsstellen der optischen Achsen zusammen.

Bei den zweiachsigen Kristallen breiten sich in Richtung der spitzen Bisektrix die Lichtwellen mit der kleinsten und mittleren Geschwindigkeit (n_g und n_m) im Falle optisch negativer Kristalle und mit der größten und mittleren Geschwindigkeit (n_p und n_m) im Falle optisch positiver Kristalle aus.

Zur Bestimmung des optischen Vorzeichens bringt man das zu untersuchende Plättchen in die Lage größter Helligkeit und führt dann in das Fenster ein Quarz-

plättchen von empfindlicher Schattierung so ein, daß die Hyperbelzweige durch seine Längsseite geschnitten werden. Der Kristall ist optisch positiv, wenn sich der Raum zwischen den Hyperbelzweigen blau färbt. In diesem Fall breiten sich die Lichtwellen in Richtung der spitzen Bisektrix mit mittlerer und minimaler Geschwindigkeit aus. Liegt ein optisch negativer Kristall vor, so beobachtet man rote oder orangene Färbung zwischen den Hyperbelzweigen, weil in Richtung der spitzen Bisektrix die Lichtwellen sich mit mittlerer und maximaler Geschwindigkeit ausbreiten (siehe Abb. 313).

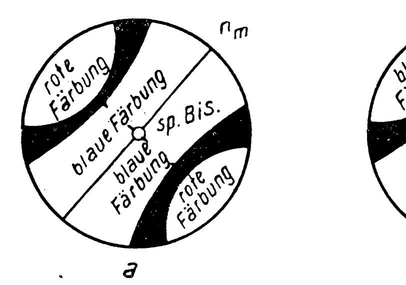


Abb. 313. Die Bestimmung des optischen Vorzeichens zweiachsiger Kristalle mit Hilfe eines Quarzkompensators. *a* — optisch positiv; *b* — optisch negativ.

Man muß hier bemerken, daß außerhalb der Hyperbelzweige die umgekehrte Färbung eintritt, weil im Raum außerhalb der Hyperbelzweige die Schwingungsrichtung der Wellen ihren Platz vertauscht: Dort, wo sich die Wellen mit maximaler Geschwindigkeit ausbreiten, breiten sie sich mit kleinster Geschwindigkeit aus und umgekehrt. Das wird dadurch erklärt, daß der Raum außerhalb der Hyperbelzweige ein Gebiet darstellt, das zum stumpfen Winkel zwischen den optischen Achsen gehört (Gebiet der stumpfen Bisektrix), und hier sind natürlich die Bedingungen für das optische Vorzeichen gerade umgekehrt wie die Bedingungen in dem Gebiet der spitzen Bisektrix.

Benutzt man ein Plättchen, das senkrecht zur spitzen Bisektrix geschnitten ist, so kann man auch die Größe des Winkels zwischen den optischen Achsen bestimmen, sofern der Winkel nicht zu groß ist und es die Apertur des Objektivs zuläßt. Wenn der Winkel zwischen den optischen Achsen, gemessen in Luft ($2E$), bekannt ist, kann man den wahren Winkel zwischen den Achsen ($2V$) berechnen. Fallen nämlich die Strahlen, die im Kristall in den Richtungen OA und OB verlaufen, mit den Richtungen der optischen Achsen zusammen (Abb. 314), dann ist der Winkel AOB, d. h. der Winkel zwischen den optischen Achsen, gleich $2V$. In Luft verlaufen die Strahlen OB und OA in den Richtungen BF und AF', und der Winkel $2V$ wird in Luft zum scheinbaren Winkel zwischen den optischen Achsen,

Abb. 314. Schnitt des Kristalls senkrecht zur spitzen Bisektrix.

Die Hälften der Winkel hängen miteinander durch das Brechungsgesetz zusammen:

$$\sin V = \frac{\sin E}{n_m}.$$

Wenn E und n_m bekannt sind, läßt sich V bestimmen.

Die Messung des scheinbaren Winkels zwischen den optischen Achsen ($2E$) kann angenähert durchgeführt werden, wenn mit dem Okularmikrometer der Abstand zwischen den Scheitelpunkten der Hyperbeln in der Interferenzfigur gemessen wird, die für den Schnitt senkrecht zur spitzen Bisektrix charakteristisch ist. Die Hälfte dieses Abstandes D kann gleich dem Sinus der Hälfte des Winkels E zwischen den optischen Achsen, multipliziert mit einem bekannten Koeffizienten K, der von dem optischen System des Mikroskops abhängt, gesetzt werden. Diesen Koeffizienten kann man eliminieren, wenn man die Größe D für einen Kristall mit bekanntem Winkel zwischen den optischen Achsen (der durch genauere Methoden bestimmt werden kann) mißt. Dann gilt:

$$D = K \sin E,$$

$$D' = K \sin E',$$

$$\sin E = \frac{D}{D'} \sin E'.$$

Diese Proportionalität gilt nur für kleine Winkel zwischen den optischen Achsen. Für stark auseinanderlaufende Achsen kann der Fehler 10 bis 12° betragen.

Aus diesem Grunde braucht man zur Messung des Winkels zwischen den optischen Achsen bei der angegebenen Methode mindestens ein geeichtes Plättchen, von dem dieser Winkel bekannt ist. Am häufigsten wird dafür ein Plättchen aus weißem Glimmer (Muskovit) verwendet, bei dem der Winkel zwischen den optischen Achsen leicht mit genaueren Methoden gemessen werden kann.

Die Messung. Man legt auf das Objekttischchen des Mikroskops nacheinander alle vorhandenen Kristallplättchen, stellt das Mikroskop auf konvergenten Strahlengang ein und trennt die einachsigen Kristalle von den zweiachsigen.

Man bestimmt das optische Vorzeichen der einachsigen Kristalle mit Hilfe eines Quarzplättchens von empfindlicher Schattierung und danach das optische Vorzeichen der zweiachsigen Kristalle mit Hilfe eines Quarzplättchens.

Man bestimmt den scheinbaren und den wahren Winkel zwischen den optischen Achsen mit Hilfe des Okularmikrometers und des geeichten Plättchens. Zu der Umrechnung des scheinbaren Winkels zwischen den optischen Achsen in die Größe $2V$ verwendet man die Tabelle, die den mittleren Wert des Brechungsindex n_m für die verschiedenen Kristalle enthält. (Die Tabelle wird zu Beginn der Aufgabe ausgegeben.)

Spezialliteratur

C. Burri: „Das Polarisationsmikroskop". Verlag Birkhäuser, Basel 1950.

Aufgabe 87

Die Untersuchung der Rotationspolarisation des Lichtes

Zubehör: 1. Halbschattenpolarimeter, 2. Natriumflamme oder Lichtfilter, 3. Anzahl von Röhren mit Zuckerlösung verschiedener Konzentration, 4. Lampe.

Wenn in den Raum zwischen zwei gekreuzten Nicols ein Gefäß mit Zuckerlösung gebracht wird, tritt in monochromatischem Licht eine Aufhellung des Feldes auf, die sich jedoch durch Drehen des Analysators um einen bestimmten Winkel nach links oder rechts leicht beseitigen läßt. Diese Erscheinung wird durch die Fähigkeit der Zuckerlösung, die Polarisationsebene des Lichtes zu drehen, erklärt und trägt die Bezeichnung *Rotationspolarisation* (optisches Drehvermögen). Man kennt viele Stoffe, die diese Eigenschaft besitzen. Sie werden *optisch aktive* Stoffe genannt. Zu ihnen gehört eine Reihe von flüssigen und festen organischen Stoffen, wie Petroleum, Weinsäure u. a., sowie auch einige Mineralien, z. B. Quarz, Zinnober u. a.

Die Drehung wird rechts oder positiv genannt, wenn der Stoff die Polarisationsebene des Lichtbündels, das in das Auge des Beobachters gelangt, im Uhrzeigersinn verdreht, und sie wird links oder negativ genannt, wenn er sie in umgekehrter Richtung verdreht. Bei einem festen Körper ist der Drehwinkel proportional der Dicke des Stoffes, durch den das Licht geht, und bei einer Lösung ist er außer der Schichtdicke auch noch der Konzentration der Lösung proportional. Außerdem hängt der Drehwinkel von der Wellenlänge λ des auffallenden Lichtes ab.

Für eine Lösung gilt:

$$\alpha = [\alpha] c l.$$

Hierin ist α der Drehwinkel, l die Schichtdicke, c die Konzentration der Lösung und $[\alpha]$ ein Koeffizient, der die spezifische Drehung des vorliegenden Stoffes, d. h. die einer Lösung von der Schichtdicke $l = 10$ cm und der Konzentration $c = 1$, angibt. $[\alpha]$ ist ungefähr dem Quadrat der Wellenlänge umgekehrt proportional $\left([\alpha] \sim \frac{1}{\lambda^2}\right)$.

Die Bestimmung des Drehwinkels der Polarisationsebene aus den zwei Einstellungen auf Dunkelheit des Gesichtsfeldes bei Abwesenheit und Anwesenheit eines optisch aktiven Stoffes ist nur angenähert möglich, weil das menschliche Auge den Analysator auf völlige Dunkelheit des Gesichtsfeldes nicht genau einstellen kann. Deshalb werden zur Messung Halbschattenpolarimeter verwendet, die nicht auf Dunkelheit des Gesichtsfeldes, sondern auf gleiche Helligkeit der beiden Gesichtsfeldhälften eingestellt werden, oder auch Polarimeter, die mit einem Doppelquarz und einem Kompensator ausgerüstet sind und auf gleiche Farbe beider Gesichtsfeldhälften eingestellt werden. Die Einstellung auf Gleichheit der Farbe ist nicht objektiv genug. Bei verschiedenen Beobachtern können sich die Ablesungen merklich voneinander unterscheiden. Aus diesem Grunde werden in neuerer Zeit fast ausschließlich Halbschattenpolarimeter verwendet, die es gestatten, die Drehung der Polarisationsebene auf 0,01° genau zu messen.

Kurze Theorie. In dem Halbschattenpolarimeter (Abb. 315) wird das Gesichtsfeld von dem Durchmesser CC' in zwei Hälften unterteilt. In der einen Hälfte schwingt das Licht in der Ebene P_1 und in der anderen in der Ebene P_2. Beide Ebenen bilden einen kleinen Winkel φ miteinander. Wenn man beide Strahlen außerdem durch den Analysator laufen läßt, dessen Schwingungsebene A senkrecht zu P_2 steht, so wird der Strahl der Hälfte *2* ausgelöscht, und diese Gesichtsfeldhälfte bleibt dunkel, während ein Teil des Lichtes der Hälfte *1* von dem Analysator durchgelassen wird und damit dieses Feld mehr oder weniger aufgehellt erscheint. Wenn der Analysator so steht, daß seine Schwingungsebene senkrecht zu der Schwingungsebene P_1 liegt, wird offensichtlich die umgekehrte Erscheinung beobachtet. Es ist klar, daß beide Gesichtsfeldhälften die gleiche Leuchtdichte nur bei der Stellung $A \perp OC$ oder $A \| OC$ besitzen (Abb. 316). Die Gerade OC halbiert den Winkel zwischen

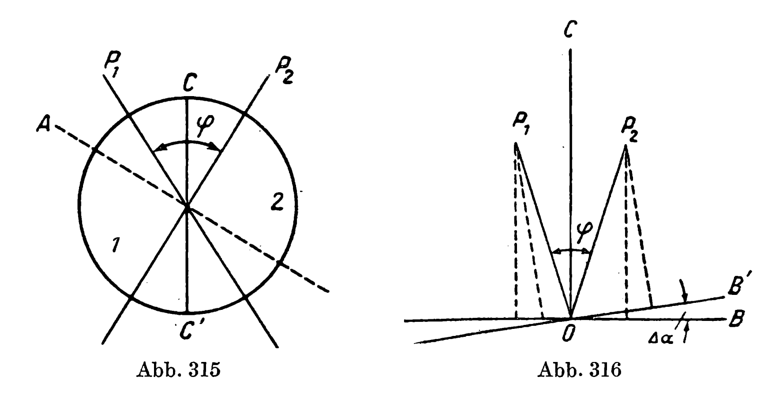


Abb. 315 Abb. 316

den Vektoren OP_1 und OP_2. (Die Vektoren OP_1 und OP_2 stellen die Amplituden der Schwingungen in beiden Gesichtsfeldhälften dar.) Jedoch ist die Stellung $A \perp OC$, die eine schwache Helligkeit (Halbschatten) zuläßt, für die Genauigkeit der Einstellung auf gleiche Leuchtdichte wegen der physiologischen Eigenheiten des Auges viel vorteilhafter. Das Auge reagiert nämlich viel empfindlicher auf die Änderung kleiner Leuchtdichten (bis zu einer gewissen Grenze). Die Einstellung des Analysators auf gleiche Leuchtdichte (Halbschatten) beider Felder läßt sich um so genauer ausführen, je kleiner der Winkel φ zwischen den Schwingungsebenen des Polarisators ist.

Um sich davon zu überzeugen, betrachten wir die Abb. 316. Wenn man die Leuchtdichten beider Gesichtsfeldhälften einander angleichen will, muß man den Analysator in die Stellung $OB \perp OC$ bringen. In Wirklichkeit läßt man aber einen gewissen Fehler zu, und das Gerät gilt z. B. in der Stellung OB' als abgeglichen. Dieser Fehler wird durch den kleinen Winkel $\Delta\alpha$ charakterisiert. Nehmen wir für das Verhältnis der Lichtströme

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = 1$$

an, so erhalten wir bei fehlerhafter Einstellung:

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{\Phi_0 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2} + \Delta\alpha\right)}{\Phi_0 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2} - \Delta\alpha\right)} = \left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2}\cos\Delta\alpha + \cos\frac{\varphi}{2}\sin\Delta\alpha}{\sin\frac{\varphi}{2}\cos\Delta\alpha - \cos\frac{\varphi}{2}\sin\Delta\alpha}\right)^2 = \left(\frac{1 + \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\Delta\alpha}{1 - \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\Delta\alpha}\right)^2.$$

Nehmen wir weiter an, daß $\Delta\alpha$ sehr klein ist, dann können wir angenähert schreiben:

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = 1 + 4\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\Delta\alpha.$$

Folglich erhält man für den prozentualen Fehler:

$$\Delta p = \left(4\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\Delta\alpha \cdot 100\right)\%,$$

wobei $\Delta\alpha$ im Bogenmaß ausgedrückt ist. Bei der Umrechnung in Grade finden wir, daß der Winkelfehler gleich

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta p}{7}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

ist.

Wenn z. B. der Einstellungsfehler (Δp) 2% erreicht, dann ist für

$$\varphi = 1^\circ \quad \Delta\alpha = 0{,}0025^\circ,$$
$$\varphi = 2^\circ \quad \Delta\alpha = 0{,}005^\circ,$$
$$\varphi = 8^\circ \quad \Delta\alpha = 0{,}02^\circ.$$

Hieraus folgt, daß für genügend kleines φ die Ablesung mit einer Genauigkeit von mindestens einem hundertstel Grad erfolgen muß.

Dabei muß man beachten, daß die Leuchtdichte der Felder mit der Verkleinerung von φ abnimmt. Aus diesem Grunde ist es notwendig, starke Lichtquellen zu benutzen. Wenn dies jedoch nicht möglich ist, oder wenn die Lösung das Licht stark absorbiert, muß der Winkel φ vergrößert und damit eine größere Ungenauigkeit in Kauf genommen werden. Deshalb läßt sich in einigen Präzisionsgeräten der Winkel φ verändern.

Die Beschreibung des Gerätes. Das Halbschattenpolarimeter besteht, wie jedes Polarisationsgerät, aus zwei Hauptteilen: dem Polarisator und dem Analysator (Abb. 317). Der Polarisator besteht aus zwei Polarisationsprismen, dem großen P und dem gleich hinter ihm stehenden kleinen p. Die Hauptschnitte dieser Prismen, und damit auch die entsprechenden Schwingungsebenen des Lichtes, bilden einen kleinen Winkel miteinander. Das von der Lichtquelle K ausgehende Licht geht durch das Rohr E, dessen Bedeutung später noch erklärt werden wird, und durch das Prisma P. Ein Teil dieses in einer bestimmten Ebene polarisierten Lichtes geht durch das Rohr H, das mit einem optisch aktiven Stoff gefüllt ist, und fällt endlich auf den Analysator A. Der andere Teil des

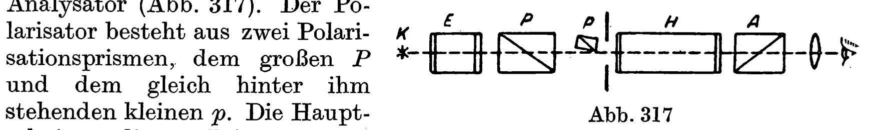


Abb. 317

Lichtes geht, bevor er in das Rohr fällt, durch das Prisma p, welches die Richtung der Polarisationsebene etwas verändert. Wenn daher der Analysator auf völlige Auslöschung eines der Lichtbündel eingestellt ist, wird das andere teilweise hindurchgelassen. Das Gesichtsfeld, das durch eine Blende begrenzt ist, wird infolgedessen in zwei Hälften geteilt. Als Trennungslinie erscheint die Kante des Prismas p.

Der Analysator wird auf Gleichheit der Gesichtsfeldhälften sowohl bei Anwesenheit als auch bei Abwesenheit eines optisch aktiven Stoffes im Rohr H eingestellt. Dabei wird die Schwingungsebene der Strahlen, die beide Gesichtsfeldhälften beleuchten, um den Winkel α gedreht. Um den gleichen Winkel muß auch der Analysator gedreht werden.

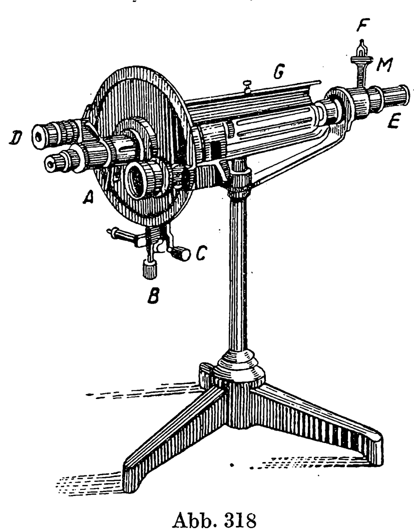


Abb. 318

Der im vorderen Teil des Gerätes liegende Analysator (Abb. 318) läßt sich am Griff A um jeden beliebigen Winkel drehen, wenn vorher die Klemmschraube B gelöst wird. Seine Feineinstellung geschieht jedoch mit der Mikrometerschraube C, nachdem die Klemmschraube B angezogen ist. Die Winkel werden durch die Lupe D an zwei Nonien abgelesen. Diese sitzen an den Enden eines Teilkreisdurchmessers, der mit dem Analysator fest verbunden ist, und die eine Ablesung auf ein hundertstel Grad genau gestatten. Das mit der Zuckerlösung gefüllte Rohr wird zwischen den Analysator und den Polarisator in die Kammer G gelegt.

Der Winkel zwischen den Hauptschnitten der Prismen P und p (Abb. 317) läßt sich durch Drehen des Prismas p um einen kleinen Winkel mit Hilfe des Hebels F (Abb. 318), dessen Ende über die Teilung M gleitet, verändern.

Die Lichtquelle muß bei der Arbeit mit einem Halbschattenpolarimeter monochromatisch sein (Natriumflamme). Wenn sie nicht monochromatisch ist, wird in den Strahlengang (Rohr E) ein Flüssigkeitsfilter gebracht, d. h. eine Flüssigkeit, die nur einen engen Wellenlängenbereich des Lichtes hindurchläßt.

Die Messung. Man nimmt das Rohr H heraus, stellt vor das Gerät eine Lichtquelle und richtet das Okular so ein, daß die Trennungslinie im Gesichtsfeld scharf erscheint. Dann bringt man den Analysator in die Nullstellung, bei der beide Gesichtsfeldhälften gleich dunkel erscheinen. Man liest am Teilkreis ab, verdreht den Analysator, bringt ihn erneut in die Nullstellung und liest wiederum ab. Diese Einstellungen müssen mehrmals wiederholt werden. Aus ihnen bildet man dann den Mittelwert für die Nullstellung des Analysators.

Man legt in die Kammer G das Rohr mit der Zuckerlösung bekannter Konzentration (sie enthalte C Gramm Zucker auf 100 cm³ Lösung) und dreht den Analysator so weit, daß wieder beide Gesichtsfeldhälften gleich dunkel erscheinen. Diese Einstellung wiederholt man ebenfalls mehrmals, wobei man stets den Analysator verdreht und erneut die Nullage einstellt. Bildet man den Mittelwert aus allen Ablesungen, so erhält man den Winkel α, um den die Polarisationsebene durch die Lösung verdreht worden ist.

Die Ausrechnung. Aus den erhaltenen Ergebnissen berechnet man die spezifische Drehung des Zuckers. Die Dicke der Schicht l wird gewöhnlich in Dezimetern und die Konzentration c in Gramm des Stoffes, der sich in 1 cm³ Lösung befindet, angegeben. Häufig verwendet man anstatt der Konzentration c die Menge C des Stoffes, der sich in 100 cm³ der Lösung befindet, so daß $C = 100c$ und damit

$$\alpha = [\alpha]\frac{Cl}{100}, \quad \text{woraus folgt} \quad [\alpha] = \frac{100\alpha}{Cl}. \tag{1}$$

Diese Formel dient zur Bestimmung der spezifischen Drehung der Zuckerlösung, wenn die Größe der Drehung α bei bestimmtem c und l bekannt ist. Anstatt der Konzentration c oder C gibt man manchmal die Dichte d der Lösung und den prozentualen Gehalt des Stoffes p in der Lösung an. Dann kommen auf 100 g Lösung p Gramm Stoff. Folglich enthält 1 cm³ Lösung $\frac{pd}{100}$ Gramm, deshalb ist

$$\alpha = [\alpha]\frac{lpd}{100},$$

woraus folgt

$$[\alpha] = \frac{100\alpha}{dlp}. \tag{2}$$

Man wiederholt die gleichen Messungen auch für unbekannte Konzentrationen der Zuckerlösung und berechnet aus den Ablesungen den prozentualen Gehalt des Zuckers in jeder Lösung nach der Formel (2).

Nach jedem Versuch wird die Zuckerlösung aus dem Rohr in ein mit einem Stopfen verschließbares Gefäß gegossen und das Rohr selbst sorgfältig von innen und von außen mit Wasser abgespült.

Aufgabe 88

Die Untersuchung der Gesetzmäßigkeiten des äußeren lichtelektrischen Effektes

Zubehör: 1. Vakuum-Photozelle mit Cäsium-Antimon-Schicht, 2. Monochromator mit optischen Bänken und einer Anzahl von Kondensoren und Beleuchtungslampen, 3. Röhrenverstärker mit Batteriespeisung, 4. Spiegelgalvanometer, 5. Zeigergalvanometer, 6. Milliamperemeter, 7. Transformator, 8. Schiebewiderstand, 9. Voltmeter, 10. Amperemeter, 11. magnetischer Spannungskonstanthalter.

Die Erscheinung des äußeren lichtelektrischen Effektes (äußeren Photoeffektes) wurde zuerst an der Moskauer Universität von dem Professor der physikalisch-mathematischen Fakultät A. G. Stoletow im Jahre 1888

untersucht[1]). In den Gesetzmäßigkeiten dieser Erscheinung treten die quantenhaften Eigenschaften des Lichtes deutlich hervor. Heutzutage findet die Erscheinung des Photoeffektes eine breite technische Anwendung.

Die Aufgabe ist der Untersuchung der wesentlichen Gesetzmäßigkeiten dieser Erscheinung gewidmet: 1. der Untersuchung der Abhängigkeit der Stärke des Photostromes von der Beleuchtungsstärke der Photokathode, 2. der Untersuchung der Abhängigkeit der Stärke des Photostromes von der Größe der an die Photozelle angelegten Spannung, 3. das Feststellen der langwelligen Grenze des Photoeffektes und die Bestimmung der Austrittsarbeit der Elektronen aus der Oberfläche der Photokathode.

Für die Durchführung dieser Untersuchungen wird in der vorliegenden Aufgabe eine Photozelle mit Cäsium-Antimon-Schicht und einer zentralen Anode verwendet. Diese Photozelle stellt ein evakuiertes kugelförmiges Glasgefäß dar, von dem die eine Hälfte der inneren Oberfläche mit einer Doppelschicht bedeckt ist. Diese Schicht wird erzeugt durch Verdampfen zuerst des Antimons und dann des Cäsiums im Vakuum (Abb. 319). Die dabei entstehende Verbindung Cs_3Sb dient als Photokathode. Sie besitzt eine kleine Austrittsarbeit für Elektronen, und deshalb liegt die langwellige Grenze des Photoeffektes im sichtbaren Spektralbereich. In praktischer Hinsicht ist diese Eigenschaft sehr wichtig, und in unserem Falle wird die. Beobachtung des Ganges des Effektes dadurch erleichtert, daß die langwellige Grenze im sichtbaren Spektralbereich liegt. Die metallische Anode der Photozelle ist kugelförmig und sitzt in der Mitte des Glaskolbens. Die Ausführungen von der Kathode und der Anode sind in dem unteren Teil des Kolbens eingeschmolzen und an die Sockelstifte der Photozelle gelötet.

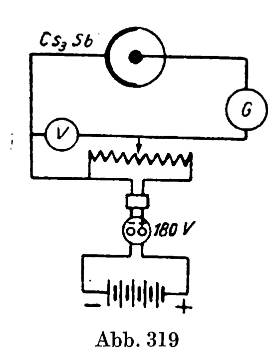


Abb. 319

Die von dem Licht aus der Kathode herausgeschlagenen Elektronen werden von dem elektrischen Feld, das durch Anlegen einer Spannung an die Photozelle erzeugt wird, beschleunigt und fliegen zur Anode. Der in dem Kreis der Photozelle und der Batterie fließende Photostrom kann durch das Galvanometer G gemessen werden. Die einfachste Schaltung einer Vakuumphotozelle, wie sie in den ersten beiden Übungen verwendet wird, ist in Abb. 319 dargestellt. Praktisch wird die Batterie durch ein stabilisiertes Netzgerät ersetzt.

Übung 1

Die Untersuchung der Abhängigkeit der Stärke des Photostromes von der Beleuchtungsstärke der Photokathode

Diese Übung wird mit einer Photozelle durchgeführt, die von spektral unzerlegtem Licht beleuchtet wird.

[1]) Anm. d. Übers.: Unabhängig davon wurde dieser Effekt im Jahre 1888 von W. HALLWACHS entdeckt.

Die Photozelle (die zur Ausschaltung des Streulichtes in einem metallischen Gehäuse steckt, welches nur in einer Richtung eine Öffnung hat) wird auf das längere Stück der optischen Bank des Monochromators so gesetzt, daß der Teil des Gehäuses ohne Öffnung zum Eingangsspalt des Monochromators weist (Abb. 320). Auf dem Gehäuse der Photozelle ist angegeben, daß diese Photozelle für die Übungen 1 und 2 verwendet werden soll. Vor die Photozelle wird auf die optische Bank ein Tubus gesetzt, der ebenfalls das Streulicht von der Photozelle abhalten soll. Die Photozelle wird an die Schaltung, die in Abb. 319 dargestellt ist, angeschlossen und erhält ihre Spannung von einem stabilisierten Netzgerät (mit einem magnetischen Spannungskonstanthalter). Die Spannung wird einer Steckdose am Tisch zugeführt, an der ± 180 V steht.

Beim Hineinstecken müssen die Bananenstecker an den Isolierhüllen gefaßt werden und nicht an den Metallteilen, damit der Arbeitende nicht unter Spannung gerät. Außerdem darf man nicht vergessen, daß während der Messung sowohl die Photozelle als auch das Galvanometer unter Spannung stehen. Aus diesem Grunde sind Umschaltungen des Kreises unzulässig, solange die Spannung nicht abgeschaltet ist. Ob Spannung an der Steckdose liegt, darf nur der Assistent des Praktikums mit einem Voltmeter prüfen. An dem entgegengesetzten Ende der optischen Bank wird eine Glühlampe von 12 V aufgestellt, die in einem besonderen Gehäuse steckt. Auf dem Gehäuse der Lampe ist angemerkt, daß sie für die erste Übung verwendet wird. Die Lampe muß gegenüber der Mitte der Öffnung des Photozellengehäuses aufgestellt werden. Die Stromstärke der Lampe, welche über einen Transformator gespeist wird, wird von einem Schiebewiderstand geregelt und von einem Amperemeter kontrolliert. Die Lampe besitzt eine sehr kleine Glühwendel (im Vergleich zu den Abständen auf der optischen Bank) und wird in dieser Übung als punktförmige Lichtquelle angesehen.

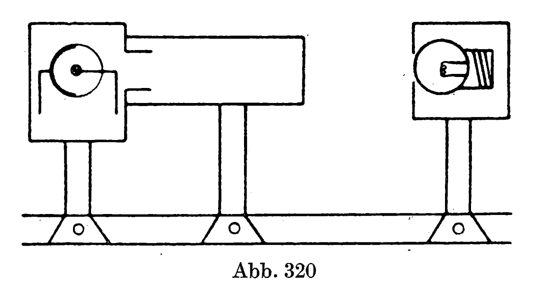


Abb. 320

Der Transformator wird an das Netz über einen magnetischen Spannungskonstanthalter angeschlossen. Der Transformator ist mit dem magnetischen Spannungskonstanthalter fest verbunden. Daher wird in die Netzsteckdose nur der Stecker vom Stabilisator gesteckt.

Das Wesen der Arbeit, die in dieser Übung ausgeführt wird, besteht darin, daß man durch Veränderung des Abstandes zwischen Lampe und Photozelle nach einem bestimmten Gesetz die Beleuchtungsstärke der Photokathode verändert und gleichzeitig die Stärke des Photostromes mißt.

Die Messung. 1. Man schaltet die Beleuchtung des Galvanometers ein (über einen Transformator), entarretiert das Galvanometer (dazu muß ein Assistent des Praktikums zugegen sein) und versucht, auf der vor dem Galvanometer aufgestellten Skala ein scharfes Bild des Lichtzeigers einzustellen.

2. Man legt an die Photozelle eine Spannung von 150 V (bei dieser Spannung arbeitet die in dieser Übung verwendete Photozelle im Sättigungsgebiet des Stromes) und beobachtet den Ausschlag des Galvanometers bei abgedeckter Öffnung der Photozelle. Dabei wird die Öffnung vor der Photozelle in diesem Fall von einem kleinen undurchsichtigen Schirm abgedeckt, der an dem Gehäuse der Photozelle befestigt ist. Danach entfernt man den Schirm aus dem Strahlengang und beobachtet erneut den Galvanometerausschlag.

Man muß zu erreichen suchen, daß die Differenz der Galvanometerausschläge (bei abgedecktem und freiem Strahlengang), die durch das Streulicht im Zimmer erzeugt wird, 1 bis 2 Skalenteile nicht überschreitet. Es ist außerdem notwendig, sich davon zu überzeugen, daß diese Differenz nicht von zufälligen Veränderungen der Zimmerbeleuchtung abhängt.

3. Man läßt die Öffnung vor der Photozelle unbedeckt, schaltet die oben beschriebene punktförmige Lichtquelle ein und stellt sie in einem Abstand von 30 cm von der Photozelle auf[1]). Man regelt durch den Schiebewiderstand den Lampenstrom so ein, daß der Lichtzeiger des Galvanometers bis zum Ende der Skala ausschlägt.

Man verdeckt die Öffnung vor der Photozelle und läßt die Lampe einige Minuten bei dem eben eingestellten Strom einbrennen.

Nach dem Einbrennen der Lampe schreibt man die Ausschläge des in ihrem Zweig liegenden Amperemeters auf, hält diese mit Hilfe des Widerstandes konstant, was durch den Spannungskonstanthalter erleichtert wird, und beginnt mit folgenden Messungen:

Man entfernt etappenweise (jedesmal um 5 cm) die Lampe von der Photozelle bis zu dem freien Ende der optischen Bank und schreibt die Anzeige des Galvanometers für jede Lampenstellung auf. Dann wiederholt man die gleichen Ablesungen beim Heranbringen der Lampe an die Photozelle nach den gleichen Abständen. Bei der nachfolgenden Auswertung der Meßergebnisse werden die Mittelwerte der Galvanometeranzeigen aus beiden Meßreihen verwendet.

Nach der Messung deckt man die Photozelle wieder ab und überzeugt sich davon, daß sich der Nullpunkt des Galvanometers nicht verschoben hat. Bei etwaiger Änderung des Nullpunktes muß das auf die Photozelle fallende Streulicht beseitigt und die ganze Meßreihe wiederholt werden.

Die Auswertung der Meßergebnisse. Nimmt man die Lampe als eine punktförmige Lichtquelle an, so kann man annehmen, daß sich die Beleuchtungsstärke der Photokathode umgekehrt proportional zu dem Quadrat des Abstandes zwischen Lampe und Photozelle ändert. Nimmt man die Beleuchtungsstärke E_1 der Photokathode bei maximalem Abstand zwischen Lampe und Photozelle als Einheit an, so findet man leicht, daß die Beleuchtungsstärke der Photokathode bei irgendeiner n-ten Stellung der Lampe gleich

$$E_n = n \frac{R_1^2}{R_n^2}$$

[1]) Zur Ablesung des Abstandes für diese und die folgende Übung ist an der optischen Bank des Monochromators eine Skala befestigt.

ist, wobei R_1 der maximale Abstand zwischen Photozelle und Lampe und R_n der neue Wert dieses Abstandes ist.

Trägt man auf der Abszissenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems Zahlen ab, die gleich $\frac{R_1^2}{R_n^2}$ sind, und auf der Ordinatenachse die Stärke des Photostromes, der diesen Werten entspricht, und verbindet man die Meßpunkte durch eine stetige Linie, so erhält man eine graphische Darstellung der Abhängigkeit der Stärke des Photostromes von der Beleuchtungsstärke der Photokathode.

Man kann die erhaltenen Ergebnisse auch in einem logarithmischen Maßstab graphisch darstellen, indem man auf der Ordinatenachse den Logarithmus der Stärke des Photostromes und auf der Abszissenachse den Logarithmus der Größen R_n abträgt.

Übung 2

Die Aufnahme der Strom-Spannungskennlinie einer Vakuumphotozelle

Die Abhängigkeit der Stärke des Photostromes in der Photozelle von der Größe der an sie angelegten Spannung (bei unveränderter Beleuchtungsstärke der Photokathode) wird als die *Strom-Spannungskennlinie der Photozelle* bezeichnet.

Diese Übung wird mit der gleichen Anordnung der Geräte ausgeführt wie auch die erste Übung der vorliegenden Aufgabe. Mit dem oben angeführten Verfahren wird das normale Arbeiten der Photozelle (bei Nichtvorhandensein von Streulicht) kontrolliert und ein konstanter Brennbereich der Glühlampe eingehalten.

Die Messung. Man stellt nacheinander die Lampe in Entfernungen von 30, 40, 50 cm vor der Photozelle auf und führt für jede dieser Stellungen folgende Messungen durch:

Man gibt die Öffnung von der Photozelle frei, hält die Stromstärke der Glühlampe konstant und verändert die Spannung an der Photozelle von dem Grenzwert bis null. Man schreibt die Galvanometerausschläge auf, die jedem Spannungswert entsprechen. Dann erhöht man die Spannung in den gleichen Intervallen und schreibt erneut die Galvanometerausschläge auf. Man deckt die Photozelle ab und kontrolliert die Konstanz des Nullpunktes des Galvanometers.

Die Meßergebnisse werden in Form von Kurven dargestellt, die die Abhängigkeit der Stärke des Photostromes von der Größe der an die Photozelle angelegten Spannung wiedergeben. In die graphische Darstellung werden die Mittelwerte aus den beiden Meßreihen eingetragen. Für Spannungen unter 40 V werden die Punkte in Intervallen von 2 V und für größere Werte der Spannung in Intervallen von 5 V aufgenommen.

Nach Beendigung dieser Übung werden alle auf der optischen Bank vor dem Eingangsspalt des Monochromators stehenden und in der ersten Übung verwendeten Geräte heruntergenommen.

Übung 3

Die Bestimmung der langwelligen Grenze des Photoeffektes und der Austrittsarbeit der Elektronen

Das Ziel dieser Übung ist die Bestimmung der Wellenlänge des auf die Photokathode fallenden Lichtes, bei der die Elektronenemission aus der Kathode aufhört.

Um die Wellenlänge des auf die Photozelle fallenden Lichtes ändern zu können, wird ein *Monochromator* verwendet. Das prinzipielle Schema eines Prismenmonochromators ist in Abb. 321 dargestellt. Durch Drehen des Prismas, das auf einem Tischchen in der Mitte des Gerätes steht, kann man durch den Ausgangsspalt des Monochromators das Licht verschiedener Spektralbereiche schicken. Setzt man die Photozelle hinter den Ausgangsspalt des Monochromators, so kann man die Photokathode mit dem Licht eines schmalen Spektralbereiches bestrahlen.

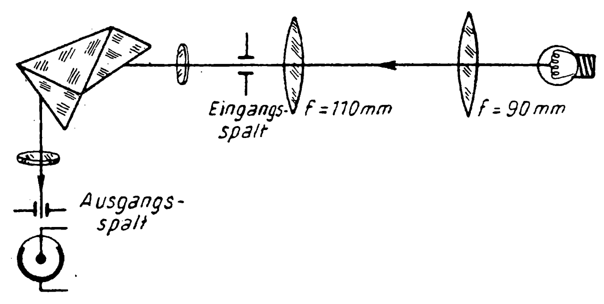


Abb. 321

Die in der dritten Übung verwendete Photozelle (auf ihrem Gehäuse ist dies vermerkt) befindet sich ständig auf der optischen Bank hinter dem Ausgangsspalt des Monochromators. Sie ist durch Schnüre mit dem in dieser Übung verwendeten Gleichstromverstärker verbunden. Die Länge der Schnüre gestattet es, die Photozelle auf der optischen Bank von dem Ausgangsspalt des Monochromators weg in den notwendigen Grenzen zu verschieben.

Der Eingangsspalt des Monochromators wird mit dem Licht einer Glühlampe von 12 V beleuchtet, die einen langen geraden Faden besitzt und in einer besonderen Halterung auf die optische Bank gestellt wird. Auf dem Gehäuse dieser Lampe ist vermerkt, daß sie für die dritte Übung verwendet wird. Die Lampe wird von einem Transformator gespeist, der über einen magnetischen Spannungskonstanthalter an das Netz angeschlossen wird. Die Stromstärke wird von einem Amperemeter kontrolliert und mit einem Schiebewiderstand verändert. Das Licht der Lampe wird mit Hilfe zweier Kondensorlinsen auf den Eingangsspalt des Monochromators fokussiert.

Die richtige Justierung der Lampe und der Kondensorlinsen in die optische Achse des Kollimators vor dem Eingangsspalt des Monochromators wird folgendermaßen durchgeführt: Man öffnet den Schieber, der das in den Eingangsspalt gelangende Lichtbündel zu schwächen gestattet. Dieser Schieber

befindet sich im Kollimatorrohr, unmittelbar hinter dem Eingangsspalt. Ein Griff, an dem der Schieber bewegt werden kann, ragt an der unteren Seite des Kollimatorrohres neben dem Eingangsspalt heraus. Auf dem Griff sind Markierungen angebracht, die anzeigen, in welcher Stellung der Schieber steht.

Man öffnet Ein- und Ausgangsspalt des Monochromators vollständig (durch Drehen an den Spalttrommeln im Uhrzeigersinn), stellt die beleuchtende Lampe in einem Abstand von ungefähr 20 cm von dem freien Ende der optischen Bank auf und klemmt sie in dieser Stellung fest. Man hält das Auge direkt an den Ausgangsspalt des Monochromators, verschiebt die Lampe in vertikaler Richtung und dreht sie in ihrer Halterung (dazu ist in dem Boden des Lampengehäuses ein Schlitz angebracht, längs dem die Lampe verschoben und mit einer Schraube festgestellt werden kann), bis der Glühfaden der Lampe in der Mitte des Gesichtsfeldes, auf das das Auge durch den Ausgangsspalt gerichtet ist, zu sehen ist.

Dann stellt man auf die Bank den ersten Kondensor (Brennweite 90 mm) in einem Abstand von ≈ 30 cm von dem freien Ende der optischen Bank auf und verändert seine Stellung in der Ebene senkrecht zu der Kollimatorachse, bis das Auge des Beobachters am Ausgangsspalt einen hellen Fleck in der Mitte der Prismenfläche des Monochromators erblickt. Der Eingangsspalt des Kollimators muß dabei selbstverständlich in der Mitte eines hellen, vom Kondensor erzeugten Lichtfleckes liegen.

Der zweite Kondensor (Brennweite 110 mm) wird in einem Abstand von 12 cm vom Eingangsspalt des Gerätes entfernt aufgestellt und seine Stellung in der Ebene senkrecht zu der Kollimatorachse verändert, bis das Auge am Ausgangsspalt des Monochromators die ganze Prismenfläche in blendend helles Licht getaucht sieht. Es ist klar, daß dabei der Eingangsspalt des Gerätes in der Mitte eines grellen vom Kondensor erzeugten Lichtfleckes liegen muß.

Danach werden sowohl der Ein- als auch der Ausgangsspalt verengt (durch Drehen an den Spalttrommeln entgegen dem Uhrzeigersinn) bis zu einer Breite von nicht mehr als 0,1 mm.

Die Spaltbreite wird an Trommeln abgelesen, die an den die Spaltbreite verändernden Schrauben sitzen. Ein Teilstrichabstand der Trommel entspricht einem hundertstel Millimeter. Die Spalte müssen unter größter Vorsicht geschlossen werden. Die Spaltbacken dürfen sich nicht berühren, weil sie dabei beschädigt werden. Dabei braucht man nicht unbedingt den wahren Wert des Nullpunktes zu kennen, der einer Ablesung bei völlig geschlossenem Spalt entspricht, weil die aufgetragene Trommelteilung eine Genauigkeit des Nullpunktes bis auf 0,01 mm garantiert. Eine Veränderung der Spaltbreite um 0,01 bis 0,02 mm spielt jedoch keine wesentliche Rolle bei der Arbeit mit dem Monochromator.

Die angegebene Spaltbreite gewährleistet, daß das aus dem Monochromator (in dem Spektralbereich, der nahe der langwelligen Empfindlichkeitsgrenze der untersuchten Photozelle liegt) austretende Lichtbündel eine spektrale Breite von ungefähr 50 Å besitzt.

Die das Prismentischchen drehende Trommel ist in Grade eingeteilt. Die Umrechnung von den an der Trommel abgelesenen Graden auf die entsprechende

Wellenlänge wird nach der der Aufgabe beigegebenen Eichkurve der Trommel vorgenommen. Zur bequemeren Ablesung wird die Trommel von einem 3,5-V-Lämpchen beleuchtet, welches von dem gleichen Transformator gespeist wird wie auch die übrigen bei dem Versuch benutzten Lampen.

Nach der Justierung des Monochromators und des Beleuchtungssystems wird die für die dritte Übung bestimmte Photozelle, die von einem Schutzgehäuse umgeben ist, dicht an den Ausgangsspalt des Monochromators herangeschoben.

Die ganze Justierung des Beleuchtungssystems ist deshalb notwendig, weil durch den Monochromator auf die Photozelle ein winziger Bruchteil des Lampenlichtes fällt und auch kleine Verschiebungen des Beleuchtungssystems den Photostrom so erniedrigen, daß er mit einfachen Mitteln nicht mehr gemessen werden kann. Aber auch bei richtiger Justierung des Beleuchtungssystems wird der Photostrom nicht direkt mit dem Galvanometer, sondern über einen Röhrenverstärker gemessen. Die Schaltung des Röhrenverstärkers für die Messung des Photostromes ist in Abb. 322 dargestellt.

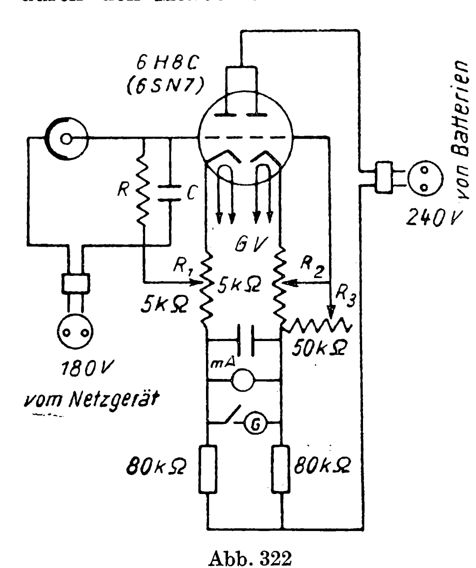


Abb. 322

Der Photostrom wird zuerst auf eines der Gitter der Doppeltriode 6H8C (6SN7) gegeben. Der große Eingangswiderstand $R = 12\,\mathrm{M}\Omega$ gewährleistet eine wesentliche Änderung der Gitterspannung bei schwachen Photoströmen. Die parallel zum Widerstand liegende Kapazität C wirkt glättend für kurzzeitige zufällige Hochfrequenzspannungen zwischen Gitter und Kathode, die durch verschiedene Störungen hervorgerufen werden können.

Der Verstärker ist als eine symmetrische Brücke zusammengeschaltet. Die Parameter der Schaltung sind in der Abbildung angegeben. Die Potentiometer R_1, R_2 und R_3 dienen zur voneinander unabhängigen Veränderung der Spannung an den Gittern der Röhre. Die Potentiometer R_1 und R_2 dienen zur Grobeinstellung und das Potentiometer R_3, das parallel zu R_2 liegt und 10mal größer ist als R_2, dient zur Feinabstimmung der Spannung an einem der Gitter. Die Potentiometer R_2 und R_3 sind mit Drehknöpfen versehen, die auf der oberen Platte des Verstärkers sitzen. Neben ihnen stehen die Bezeichnungen „Grob“ und „Fein“. Der Wert des Widerstandes von R_1 ist bei der ersten Überprüfung des Verstärkers eingestellt worden und wird bei den Messungen nicht mehr verändert.

Das Prinzip der Arbeitsweise dieser Schaltung ist folgendes: Man verändert mit Hilfe der Potentiometer die Spannung an dem einen Gitter und

versucht dann damit die beiden Punkte, zwischen denen das Galvanometer G liegt, auf gleiches Potential zu bringen, d. h. das Galvanometer stromlos zu machen. Beleuchtet man die Photozelle, so fließt ein Photostrom durch den Eingangswiderstand, der die Spannung an einem Gitter der Röhre verändert. Damit ändert sich der Anodenstrom dieser Hälfte der Röhre und hiermit auch das Potential eines der Punkte, zwischen denen das Galvanometer liegt. Das Galvanometer schlägt aus und zeigt einen Strom an, der größer ist als der Photostrom selbst. Dabei ist der Strom, der durch das Galvanometer fließt, dem Photostrom in der Photozelle proportional.

Um die von Störungen hervorgerufenen Ströme auszuschließen, ist der Ausgang des Verstärkers mit einer großen Kapazität geshuntet. Aus dem gleichen Grunde wird die ganze Verstärkeranordnung und die Photozelle von Batterien gespeist. Der Verstärker, die Batterien und alle Verbindungen zwischen ihnen sind abgeschirmt. Die Messungen werden mit dem Zeigergalvanometer G ausgeführt. (Das Spiegelgalvanometer wird nur in der ersten und der zweiten Übung dieser Aufgabe verwendet.)

Zu dem Zeigergalvanometer liegt ein Milliamperemeter parallel (unter den Bedingungen dieser Aufgabe wird ein Voltmeter dafür verwendet). Zuerst (siehe unten, die Beschreibung der Messung) wird die Messung mit dem Milliamperemeter (Voltmeter) durchgeführt, und der Galvanometerkreis ist geöffnet. Das Galvanometer wird erst benutzt (eingeschaltet), wenn das Milliamperemeter beim Abgleich keinen Strom mehr anzeigt. Darüber wird weiter unten ausführlicher gesprochen.

Die Messung. Man stellt alle Geräte so ein, wie es die Schaltung und die Beschreibung angeben, legt an die Photozelle eine Spannung an und schaltet die Heizung und die Spannung des Verstärkers ein. Diese Spannungen sind von den abgeschirmten Batterien zu den Steckdosen neben dem Verstärker geführt und entsprechend bezeichnet. Es ist klar, daß, wie auch bei anderen Schaltungen, ein Umschalten der Geräte oder die Überprüfung der Kontakte nur bei abgeschalteten Spannungen an der Photozelle und dem Verstärker vorgenommen werden darf. Ob Spannung an den Steckdosen liegt, darf nur von dem Assistenten des Praktikums mit Hilfe eines Voltmeters überprüft werden.

Nach einigen Minuten (Einbrennzeit und Einstellung der Batterien auf konstanten Arbeitsbereich) bringt man den Ausschlag des Milliamperemeters (Voltmeters), das in den Ausgang des Verstärkers geschaltet ist, durch Drehen an den Potentiometerknöpfen von R_2 und R_3 auf null. Dabei ist der Galvanometerkreis geöffnet. Nachdem das Milliamperemeter keinen Strom mehr anzeigt, schließt man den Galvanometerkreis und bringt seinen Zeiger auch in die Nullage. Dazu genügt es meistens, nur das Potentiometer R_3 zu verändern, das für den Feinabgleich der Gitterspannungen vorgesehen ist. Dabei ist die ganze Zeit der Schieber, der die Lichtstärke am Eingang des Monochromators verändert, geschlossen.

Man stellt die Trommel des Monochromators auf den Teilstrich 2350 ein, was einer Wellenlänge $\lambda \approx 5700$ Å entspricht, bei der die benutzte Photozelle ihr Empfindlichkeitsmaximum hat. Der Monochromator muß vorher für die Messung vorbereitet und seine Spaltbreite auf 0,1 bis 0,12 mm eingestellt sein. Man öffnet den Schieber am Eingang des Monochromators, und dann

muß bei normaler Arbeit der gesamten Anordnung das Zeigergalvanometer einen Ausschlag von 80 bis 100 Teilstrichen aufweisen.

Hiernach geht man unmittelbar zur Messung der langwelligen Grenze des Photoeffektes über. Man dreht die Monochromatortrommel in Richtung zunehmender Wellenlänge des aus dem Monochromator austretenden Lichtes. Der Übergang zu längeren Wellen entspricht größeren Zahlenwerten auf der Trommel.

Man dreht an der Monochromatortrommel, bis die durch das Zeigergalvanometer fließende Stromstärke nur noch einen Ausschlag von 5 bis 8 Skalenteilen erzeugt. Die dieser Ablesung auf der Trommelskala entsprechende Wellenlänge entspricht gerade der langwelligen Grenze des Photoeffektes der untersuchten Photozelle.

Die langwellige Grenze muß mehrmals bestimmt werden. Man geht dazu jedesmal wieder auf den Teilstrich 2350 ($\lambda \approx 5700$ Å) zurück, das dem Empfindlichkeitsmaximum der Photozelle entspricht, und überzeugt sich davon, daß der Ausschlag des Galvanometers unter diesen Bedingungen konstant geblieben ist. Man muß sich durch Schließen des Schiebers am Eingang des Monochromators davon überzeugen, daß sich der Nullpunkt des Galvanometers nicht verändert hat.

Die Trommel muß langsam gedreht werden, weil das Galvanometer eine große Trägheit besitzt.

Die Auswertung der Meßergebnisse. Um die Austrittsarbeit der Elektronen aus der langwelligen Grenze zu berechnen, muß man folgendermaßen vorgehen: Für die langwellige Grenze gilt die Gleichung

$$h\nu = A\,,$$

d. h., die Energie des Photons ist gleich der Austrittsarbeit. Hierin ist h die Plancksche Konstante, ν die Frequenz des auffallenden Lichtes und A die Austrittsarbeit. Gehen wir von der Frequenz zur Wellenlänge über, so erhalten wir:

$$h\frac{c}{\lambda} = A\,,$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Bekanntlich wird die Austrittsarbeit in Elektronenvolt angegeben. Um die äquivalente Potentialdifferenz, ausgedrückt in Volt, zu erhalten, müssen wir folgende Berechnung ausführen:

$$V = \frac{hc}{e\lambda} \cdot \frac{10^{12}}{1{,}59}\,,$$

wobei e die Ladung eines Elektrons bedeutet. Der Umrechnungsfaktor ist für den Übergang von Elektronenvolt in erg eingeführt ($1\,\mathrm{eV} = 1{,}59 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{erg}$).

Spezialliteratur

1. P. Görlich: „Photozellen". Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, Leipzig 1951.
2. P. Görlich: „Die Anwendung der Photozellen". Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, Leipzig 1954.

Aufgabe 89

Die Kombinationsstreuung des Lichtes[1]

Zubehör: 1. Quecksilberlampe, 2. Spiegel, 3. Gefäß mit dem zu untersuchenden Stoff, 4. Spektrograph nach TSCHULANOWSKI, 5. Photomaterial.

Einführung. Trifft ein Lichtbündel auf einen Stoff, so geht ein Teil des Bündels hindurch, ein anderer wird absorbiert, und ein dritter wird gestreut. Die Streuung des Lichtes ist gewöhnlich gering. Sie kann an Inhomogenitäten des Stoffes auftreten, besonders, wenn diese Inhomogenitäten größenordnungsmäßig die Ausmaße der Wellenlänge des auffallenden Lichtes annehmen. Wenn Inhomogenitäten der Dichte des Stoffes, an dem das Licht gestreut wird, durch die Wärmebewegung der Moleküle hervorgerufen werden, so nennt man diese Streuung die *Molekülstreuung*[2]. Bei dieser Streuung ändert sich die Frequenz des gestreuten Lichtes nicht.

Es existiert aber auch eine andere Art der Lichtstreuung, bei der sich die Frequenz des gestreuten Lichtes ändert, d. h., es treten Frequenzen auf, die im auffallenden Licht nicht enthalten waren. Diese Erscheinung wird *Kombinationsstreuung des Lichtes*[3] genannt. Sie wurde im Jahre 1928 von G. S. LANDSBERG und L. S. MANDELSTAM im Physikalischen Institut der Moskauer Staatsuniversität entdeckt. Der RAMAN-Effekt entsteht, weil das auffallende Lichtquant der Frequenz ν, das dem Molekül die Energie $h\nu$ zuführt, mit dem Molekül in Wechselwirkung tritt und in ihm eine Eigenschwingung der Frequenz ν_i anregt. Dafür wird die Energie $h\nu_i$ verbraucht. Aus diesem Grunde wird ein verändertes Quant gestreut, dessen Energie gleich

$$h(\nu - \nu_i) = h\nu'$$

ist, wobei

$$\nu' = \nu - \nu_i$$

die Frequenz des veränderten Quantes bezeichnet *(langwelliger Satellit)*. Wenn jedoch das Licht mit einem Molekül, das sich in einem angeregten Zustand befindet, in Wechselwirkung tritt, kann sich die Energie dieser Schwingung zu der des auffallenden Quantes addieren, und man erhält für die Frequenz des gestreuten Quantes:

$$\nu'' = \nu + \nu_i$$

(kurzwelliger Satellit).

Diese Erscheinung kann auch auf Grund der Vorstellungen von modulierten Schwingungen gedeutet werden. Wenn die Frequenz des auffallenden Lichtes ω und die Frequenz der Eigenschwingungen des Moleküls Ω ist, so tritt bei der Wechselwirkung zwischen Licht und Molekül eine Modulation der Schwingungen auf, als deren Ergebnis im Spektrum des gestreuten Lichtes außer der Frequenz ω auch noch die Frequenzen $\omega + \Omega$ und $\omega - \Omega$ auftreten.

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines lang- und eines kurzwelligen Satelliten ist den entsprechenden Konzentrationen der Moleküle proportional,

---

[1]) Anm. d. Übers.: RAMAN-Effekt.

[2]) Anm. d. Übers.: RAYLEIGH-Streuung.

[3]) Anm. d. Übers.: RAMAN-Effekt. Dieser Effekt wurde im Jahre 1928 von RAMAN an Molekülen und, unabhängig davon, von LANDSBERG und MANDELSTAM an festen Körpern entdeckt.

die sich in nicht angeregten und in angeregten Zuständen befinden. Da bei Zimmertemperatur die Zahl der Moleküle, die sich in angeregten Zuständen befinden, klein ist, ist auch die Intensität der kurzwelligen Satelliten, im Vergleich zu der Intensität der langwelligen Satelliten, gering.

Die Frequenz der RAMAN-Linien, ihre Zahl, ihre relative Intensität und ihre Polarisation geben die Grundlage für die Beurteilung des Charakters der einzelnen Molekülschwingungen, der räumlichen Verteilung der Atome und der Größenordnung der Kräfte, die zwischen den Atomen in den Molekülen vorhanden sind. Deshalb ist der RAMAN-Effekt eine Methode zur Untersuchung des Molekülaufbaus. Jeder Stoff besitzt ein für ihn charakteristisches RAMAN-Spektrum, und dieses kann zur Analyse herangezogen werden. Das RAMAN-Spektrum eines Gemisches aus mehreren Komponenten erscheint als einfache Überlagerung der Spektren jeder Komponente des Gemisches. Die Intensität

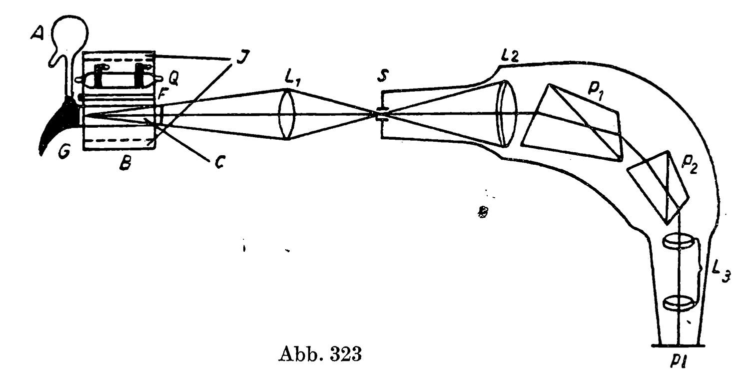


Abb. 323

der RAMAN-Linien ist gewöhnlich der Konzentration des Stoffes proportional. Damit hat man eine Möglichkeit, komplizierte organische Gemische qualitativ und quantitativ zu analysieren.

Die Beschreibung der Anordnung. Der optische Strahlengang der Anordnung ist in Abb. 323 dargestellt. Die Quecksilberlampe Q, die in einem der Brennpunkte eines zylindrischen Spiegels von elliptischem Querschnitt B (Abb. 324) steht, sendet das Licht aus, welches durch diesen Spiegel in dem anderen Brennpunkt konzentriert wird. In diesem Brennpunkt steht das Gefäß C mit dem zu untersuchenden Stoff (gewöhnlich irgendeine organische Flüssigkeit). Das von dem Stoff gestreute Licht wird durch den Kondensor L_1 gesammelt und auf den Spalt S des Spektrographen konzentriert. Das Kollimatorobjektiv L_2 erzeugt ein paralleles Lichtbündel, das bei dem Durchgang durch das dispergierende System (Prisma P_1 und P_2) in ein Spektrum zerlegt wird. Danach wird das zerlegte Lichtbündel durch das Kameraobjektiv L_3 auf die Photoplatte Pl fokussiert.

Zur Anregung der RAMAN-Spektren wird gewöhnlich eine Quecksilberlampe verwendet, da ihr Spektrum aus einzelnen sehr starken Spektrallinien besteht, welche genügend weit auseinanderliegen. (Die Beschreibung der Quecksilberlampe ist in Aufgabe 73 gegeben worden.)

Da die Intensität der RAMAN-Linien sehr schwach ist, verwendet man einen besonders geformten Spiegel. In der vorliegenden Aufgabe wird eine intensive Anregung durch die Vorrichtung *B* erreicht, die, wie schon gesagt, einen Zylinder von elliptischem Querschnitt darstellt, dessen Innenwand verspiegelt ist (Abb. 324). In dem einen Brennpunkt des Spiegels steht die Quecksilberlampe *Q* und in dem anderen das Gefäß *C* mit dem zu untersuchenden Stoff. Um den zu untersuchenden Stoff vor Erwärmung zu schützen, ist die Beleuchtungseinrichtung von dem Wassermantel *J* umgeben, in dem während des Versuches Wasser zirkuliert. Außerdem wird zwischen die Lampe und das untersuchte Medium ein Gefäß *F* mit planparallelen Wänden gestellt, durch das ebenfalls Wasser fließt.

Das Gefäß für die Untersuchung von Flüssigkeiten hat die in Abb. 325 dargestellte Form. Die Flüssigkeit wird in den Kolben *A* gegossen, das Gefäß bei eingefrorenem Zustand der Flüssigkeit evakuiert und an der Stelle *M* ab-

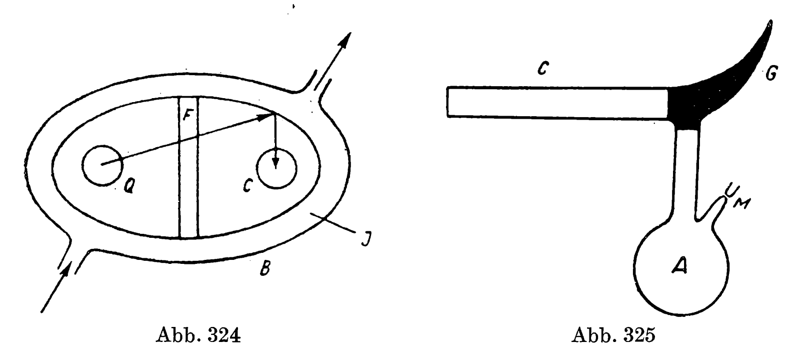


Abb. 324 Abb. 325

gezogen. Das Auspumpen des Gefäßes wird deshalb durchgeführt, damit die Verunreinigungen beseitigt werden, die bei Bestrahlung mit Quecksilberlicht fluoreszieren könnten. Das Horn *G*[1]) des Gefäßes ist geschwärzt und bildet einen dunklen Hintergrund. Für diese Aufgabe liegt das Gefäß mit der zu untersuchenden Flüssigkeit schon in evakuiertem und abgezogenem Zustand vor.

Der für diese Aufgabe benutzte Spektrograph ist von Professor W. M. TSCHULANOWSKI konstruiert und in der Werkstatt der Leningrader Universität angefertigt worden. Die Besonderheit dieses Spektrographen besteht darin, daß in ihm zur Vergrößerung der Dispersion die Prismen nicht im Minimum der Ablenkung aufgestellt sind und für die Vergrößerung der Lichtstärke ein kurzbrennweitiges Kameraobjektiv verwendet wird. Damit kann man in verhältnismäßig kurzen Belichtungszeiten RAMAN-Spektren aufnehmen. Die Gesamtansicht des Spektrographen ist in Abb. 326 dargestellt. Die Spaltbreite wird durch Drehen an der Trommel *1* verändert, die über dem Spalt angebracht ist. Die Fokussierung des Kameraobjektivs geschieht durch Drehen an dem Ring *2*. Die Kassette *3* wird durch Drehen des Rädchens *4*, das unter der Kassette angebracht ist, in vertikaler Richtung verschoben.

[1]) Anm. d. Übers.: WOODsches Horn.

Die Messung. Da der Spektrograph justiert ist und die Entfernungen zwischen der Beleuchtungseinrichtung und dem Spalt einerseits und dem Kondensor und dem Spalt andererseits eingestellt sind, empfiehlt es sich nicht, die Schrauben der Beleuchtungseinrichtung und des Spektrographen anzurühren. Vor Beginn der Arbeit muß die Kühlvorrichtung in Gang gesetzt und hiernach die Quecksilberlampe gezündet werden.

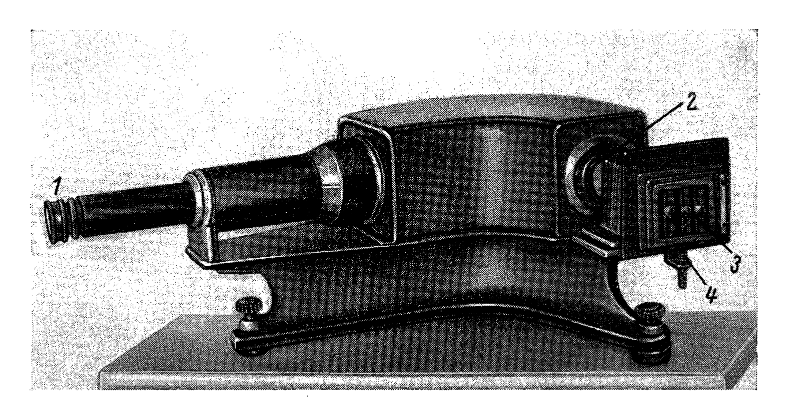


Abb. 326

Das Einschalten der Lampe geschieht bei vollständig hereingenommenen Widerständen. Es dauert ungefähr 10 bis 15 Minuten, bis sich ein konstanter Brennbereich eingestellt hat. Während dieser Zeit muß durch langsames Herausnehmen der Widerstände die Stromstärke der Lampe auf 3,5 A gehalten werden.

Nachdem sich ein konstanter Brennbereich eingestellt hat, muß das Spektrum des zu untersuchenden Stoffes und danach das Spektrum des Quecksilbers aufgenommen werden.

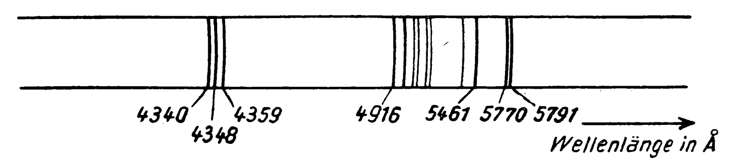


Abb. 327

Hierzu wird die Kassette in vertikaler Richtung verschoben. Das Gefäß mit dem zu untersuchenden Stoff wird aus dem zylinderförmigen Spiegel genommen und statt dessen an dieselbe Stelle ein mit weißem Papier beklebter Deckel gestellt. Die Belichtungszeit hängt von den verwendeten Photomaterialien ab und liegt für das RAMAN-Spektrum zwischen 30 und 60 Minuten. Für das Quecksilberspektrum beträgt die Belichtungszeit 10 bis 15 Sekunden.

Nachdem die Platte entwickelt, fixiert und getrocknet worden ist, muß sie ausgewertet werden, d. h., die Wellenlänge der RAMAN-Linien muß bestimmt werden. Das geschieht nach der Formel

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{c}{l - l_0},$$

wobei l die Ablesung am Komparator für die entsprechende Linie der Wellenlänge λ bedeutet. λ_0, c und l_0 sind drei Konstanten, die aus drei bekannten Quecksilberlinien bestimmt werden. (Die Wellenlängen der Quecksilberlinien können der Abb. 327 entnommen werden.) Die Bestimmung von l geschieht mit Hilfe eines Komparators (Meßmikroskops).

Spezialliteratur

1. CL. SCHAEFER: „Einführung in die theoretische Physik", Bd. III/2. Verlag W. de Gruyter, Berlin 1951.
2. K. W. F. KOHLRAUSCH: „Der Smekal-Raman-Effekt". Verlag Springer, Berlin 1938.

Aufgabe 90

Zählrohr für geladene Teilchen[1])

Kurze Einführung. In letzter Zeit finden Geräte eine immer breitere Verwendung, für die sich die Bezeichnung GEIGER-MÜLLER-Zählrohr eingebürgert hat. Mit diesen Geräten wird die Intensität der kosmischen Strahlung, künstliche und natürliche Radioaktivität, Absorption von Teilchen beim Durchgang durch Materie usw. untersucht.

Die Zählrohre sind wesentlich empfindlicher als die Photoelemente und die Ionisationskammern. Während letztere Strahlungsintensitäten zu messen gestatten, die Ströme von mindestens 10^{-16} A hervorrufen, sind mit Zählrohren Ströme der Größenordnung 10^{-20} A zu messen. Das entspricht dem Auftreten einiger Elektronen pro Minute in dem Zählrohr. Man kennt verschiedene Typen von Zählrohren und unterscheidet sie sowohl nach ihrem Verwendungsgebiet (α-, β-, γ-Zählrohr, Neutronenzählrohr u. a.) und dem Mechanismus der physikalischen Erscheinungen in ihnen, als auch nach ihrer konstruktiven Ausführung.

Eines der verbreitetsten Zählrohre stellt einen zylindrischen Kondensator dar, dessen innere Elektrode aus einem Metallfaden von etwa 0,1 bis 0,2 mm Durchmesser und dessen äußere Elektrode aus einem metallischen Zylinder von 20 bis 30 mm Durchmesser besteht. Beide Elektroden stecken in einem Glasrohr, das mit einem verdünnten Gas (Luft, Stickstoff, Wasserstoff, Argon u. a.) gefüllt ist. An die zylindrische Elektrode wird eine negative Spannung von 1000 bis 1500 V gelegt und der Faden über einen Widerstand der Größenordnung $10^9\,\Omega$ mit der Erde verbunden.

---

[1]) Anm. d. Übers.: GEIGER-MÜLLER-Zählrohr.

Schnelle Teilchen, die in den Raum zwischen den Elektroden des Zählrohres gelangen, ionisieren das Füllgas. Der dabei auftretende Stromimpuls wird durch eine besondere elektrische Schaltanordnung registriert. Das Prinzipschaltbild für den Anschluß eines Zählrohres ist in Abb. 328 dargestellt.

Wenn man die Spannung an den Elektroden eines Zählrohres verändert, ändert sich auch sein Arbeitsbereich und damit ebenfalls seine Eigenschaften als registrierendes Gerät.

Wir wollen sehen, wie die Größe des von geladenen Teilchen im Zählrohr erzeugten Stromimpulses von der an die Elektroden angelegten Spannung abhängt.

Bei kleinen Spannungen wächst zuerst die Größe des Impulses mit zunehmender Spannung, erreicht dann eine Sättigung und bleibt konstant bis zu einer gewissen Spannung V_p. Das wird damit erklärt, daß in diesem Falle alle erzeugten Ionen die Elektroden erreichen. Die Größe des Stromimpulses ist damit ein Maß für die Zahl der erzeugten Ionen. Aus diesem Grunde kann man unterscheiden, welche Teilchen in das Gerät einfallen, weil diese Teilchen verschieden viel Ionenpaare erzeugen. Beispielsweise erzeugt ein α-Teilchen einige 10^4 Ionenpaare, dagegen ein schnelles kosmisches Teilchen nur einige Ionenpaare. In diesem Bereich arbeiten die üblichen *Ionisationskammern.*

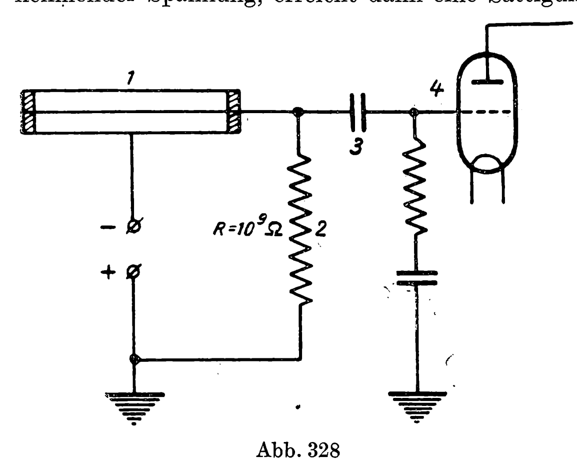


Abb. 328

Bei weiterer Steigerung der Spannung bis zu Werten über V_p hinaus vermögen die gebildeten Ionen bei ihrer Bewegung genügend Energie zur Stoßionisation der Gasmoleküle aufzunehmen, und man erhält anstatt der anfänglichen k Ionen $k \cdot N$ Ionen. Die Zahl N wird als der *Gasverstärkungsfaktor* bezeichnet. Er kann Werte bis zu der Größenordnung 10^7 annehmen.

In einem bestimmten Spannungsbereich zwischen V_p und V_p' hängt der Gasverstärkungsfaktor nicht von der Anfangszahl der Ionen ab. Deshalb ist dabei der Stromimpuls proportional der Zahl der anfänglich gebildeten Ionenpaare. Das in diesem Bereich arbeitende Zählrohr nennt man *Proportionalitätszählrohr.*

Bei weiterer Vergrößerung der Spannung, etwa bis zu einer Größe V_g, wird der Gasverstärkungsfaktor zu einer Funktion der Anzahl der anfänglich gebildeten Ionen. Diesen Arbeitsbereich des Zählers nennt man den Bereich der *teilweisen Proportionalität.*

Für die bisher angeführten Bereiche ist die sogenannte *unselbständige Entladung*, d. h. eine Entladung, die nach der Wirkung des Ionisators von selbst aufhört, charakteristisch.

Wenn man die Spannung noch weiter erhöht, erreicht die Arbeitsweise des Zählrohres einen qualitativ neuen Bereich. Dieser Bereich ist dadurch charakterisiert, daß *selbständige Entladung* auftritt. Unter gewöhnlichen Bedingungen reißt die Entladung dabei, auch nach der Wirkung des von außen kommenden Ionisators, nicht ab, und es sind zur Löschung besondere Vorkehrungen notwendig. Die Größe des Impulses hängt in diesem Bereich nicht von der Stärke der anfänglichen Ionisation ab. In diesem Bereich arbeiten die GEIGER-MÜLLER-*Zählrohre*. Der Arbeitsbereich des Zählrohres dehnt sich

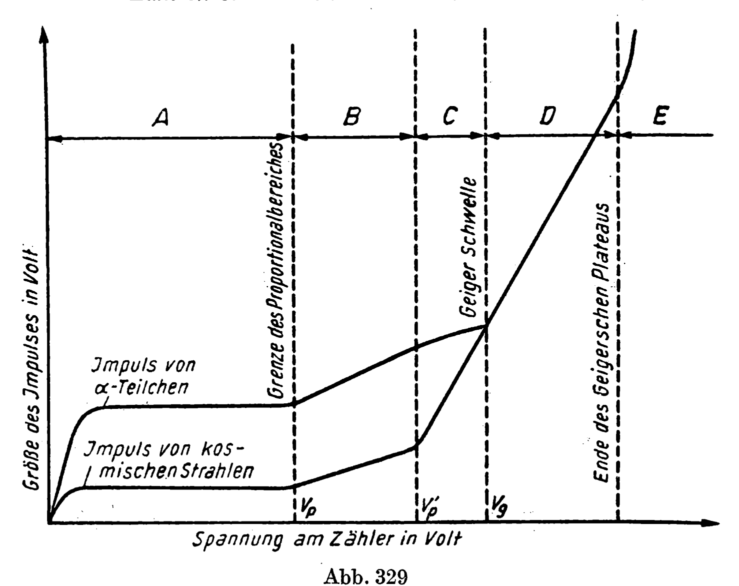


Abb. 329

bis zu einer bestimmten Spannung aus, oberhalb derer sich ein Gebiet der selbständigen Entladung anschließt, die durch keinen inneren oder äußeren Mechanismus mehr gelöscht werden kann und zur Zerstörung des Zählrohres (Zünden des Zählrohres) führt.

Die besprochenen Bereiche des Zählrohres lassen sich in einem Diagramm darstellen (Abb. 329), worin auf der Abszissenachse die Zählrohrspannung und auf der Ordinatenachse die Größe der Impulse aufgetragen sind.

Je nach dem verwendeten Füllgas werden die Zählrohre mit selbständiger Entladung in zwei Gruppen unterteilt: 1. *langsame Zählrohre* („nicht selbstlöschende"), deren Entladungsdauer von den äußeren Parametern der Registrieranordnung abhängt, und 2. *schnelle Zählrohre* („selbstlöschende"), deren Entladungsdauer bedingt ist durch besonderes Verhalten mehratomiger Gase, die zu der normalen Gasfüllung hinzugesetzt werden.

In nicht selbstlöschenden Zählrohren wird die Löschung durch einen hochohmigen Widerstand R und eine Kapazität C in der Schaltung bewirkt. Bei einer Gasentladung sinkt die Spannung an den Elektroden unter eine kritische Größe, und wenn das Produkt RC genügend groß ist, stellt sich der alte Spannungswert erst wieder ein, nachdem die Gasentladung erloschen ist.

In selbstlöschenden Zählrohren werden zu der Grundfüllung ungefähr 10% eines mehratomigen Gases (Äthylen, Äthan, Ätherdampf und andere) zugesetzt. Das führt zu der Löschung der Entladung und zu einer Verminderung ihrer Dauer um das ungefähr 100fache. Solche Zählrohre haben eine breite Verwendung gefunden, weil sie keinen großen Widerstand erfordern und die Impulse wesentlich erhöhen. Der Prozeß des Löschmechanismus ist hierbei ziemlich kompliziert. (Siehe Spezialliteratur zu dieser Aufgabe.)

Die Zählrohrcharakteristik. Die Hauptcharakteristik des Zählrohres ist die Abhängigkeit der Zahl der registrierten Teilchen von der Spannung. Solange die Spannung am Zählrohr kleiner ist als ein bestimmter Wert V_z (Abb. 330), „zählt" das Zählrohr nicht. Wenn man die Spannung zwischen den Elektroden erhöht, ohne die Intensität der Bestrahlung zu ändern, kann man drei Arbeitsbereiche des Zählrohres unterscheiden.

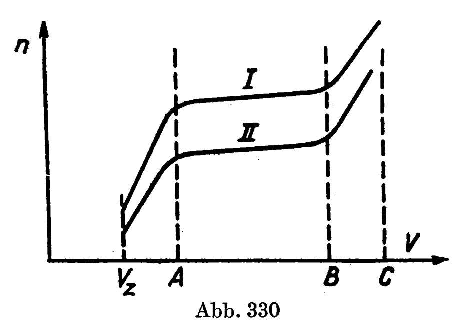


Abb. 330

Läßt man die Spannung von V_z bis A anwachsen (Abb. 330), so nimmt die Zahl der Impulse pro Sekunde mit zunehmender Spannung zu. In diesem Bereich registriert das Zählrohr nicht jedes einfallende Teilchen. Nimmt die Spannung weiter zu, so bleibt in dem Bereich AB die Zahl der Impulse konstant oder fast konstant. Hierbei registriert das Zählrohr alle Teilchen, die es durchdringen. Der Bereich AB wird das Plateau genannt. (Die Kurve I entspricht einem stärkeren Präparat.) Die Steigung und die Größe des Plateaus hängen von der Anzahl der falschen Entladungen ab, d. h. von solchen, die nicht durch den Einfall eines Teilchens verursacht werden. Ihre Zahl hängt in erster Linie von dem Material und der Bearbeitung der Elektroden, aber auch von der Füllung des Zählrohres, dem Material und der Form der Isolatoren und anderem ab. Rechts von B nimmt die Zahl der falschen Entladungen zu, und wenn die Spannung C erreicht ist, reißt die Entladung im Zählrohr nicht mehr ab. Es ist völlig klar, daß ein Zählrohr um so besser ist, je länger das Plateau und je geringer die Steigung ist. Bei guten Zählrohren verläuft das Plateau horizontal und hat eine Länge von einigen hundert Volt.

Jedes Zählrohr besitzt einen Untergrund[1]), d. h., auch ohne Bestrahlung gehen in ihm Entladungen vor sich. Sie werden durch kosmische Strahlung, durch

[1]) Anm. d. Übers.: Nulleffekt.

radioaktive Beimengungen in den Stoffen, aus denen das Zählrohr gefertigt ist, und durch selbständige Entladungen ausgelöst.

Ziel der Aufgabe ist das Auffinden des Zählrohr-Plateaus, die Bestimmung der Größe des Untergrundes und die Bestimmung des Absorptionskoeffizienten von Blei für γ-Strahlen.

Die Beschreibung der Anordnung. Die Anordnung ist in einem Blockdiagramm in Abb. 331 dargestellt. Darin bedeuten *A* — Zählrohr mit Löschkreis, *B* — Hochspannungsgleichrichter mit Stabilisator, *C* — Verstärker und Oszillograph und *D* — Behälter mit Präparat.

Das Zählrohr mit Löschkreis (*A*). In dieser Aufgabe wird ein zylinderförmiges selbstlöschendes Zählrohr mit Äthylen-Argon-Füllung verwendet. Der Löschkreis dient zur Verlängerung der Lebensdauer des Zählrohres. Von dem Block *A* gehen folgende Verbindungsschnüre aus: einadriges Kabel *1* (Abb. 331) mit Stecker zum Anschluß an die Hochspannung; dreiadriges Kabel *2*, von dem über zwei Drähte die Röhre 6H8 geheizt wird und der dritte an dem Pluspol der Hochspannung liegt; ein abgeschirmtes Kabel *3* führt zu dem Eingang des Verstärkers.

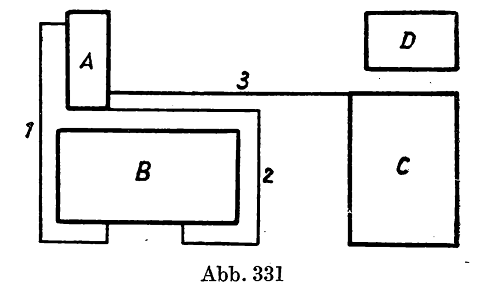


Abb. 331

Hochspannungs-Gleichrichter mit Stabilisator (*B*). Von dem Zweiweg-Röhrengleichrichter 2 × 2 (siehe Aufgabe 59) wird das Zählrohr gespeist. Der Stabilisator erlaubt es, am Ausgang eine Spannung von 1,5 kV konstant zu halten, auch wenn die Netzspannung sich um ± 20% verändert. An den Ausgang des Gleichrichters sind zwei Spannungsteiler angeschlossen. Der erste Spannungsteiler „Grob" erlaubt es, die Spannung in Stufen von 75 V und der zweite Spannungsteiler „Fein" in solchen von 3,75 V abzunehmen.

Die Frontplatte des Gleichrichters ist in Abb. 332 dargestellt. Auf ihr befinden sich: Spannungsteiler, Netz- und Hochspannungsschalter, Signallämpchen und Buchsen für den Anschluß des dreiadrigen Kabels. Der Spannungsteiler „Fein" wird durch einen besonderen Gabelstecker (dieser wird mit dem farbigen Ende nach oben in die Teilerbuchsen gesteckt) an den Spannungsteiler „Grob" angeschlossen. Der Gleichrichter wird mit einer Geräteschnur mit dem Wechselstromnetz verbunden.

Verstärker und Oszillograph (*C*). Zu dem Block *C* gehören der Verstärker der vom Zählrohr ankommenden Impulse, das Oszillographenrohr, der Gleichrichter zur Speisung des Verstärkers und des Oszillographenrohrs, das Zeitablenkgerät und das Zählrohr.

Die vom Zähler kommenden Impulse sind zu schwach und zu kurzzeitig, um das mechanische Zählwerk zu betätigen. Daher enthält die Verstärkerschaltung eine Untersetzerstufe, die eine bestimmte Anzahl von Impulsen speichert und als einen erhöhten Impuls weitergibt. An dem Ausgang des Verstärkers liegt im Anodenkreis der letzten Röhre ein elektromagnetisches

Zählwerk. Der die Spule des Elektromagneten durchfließende Stromimpuls zieht einen Anker an und dreht damit ein Zahnrad um einen Zahn weiter. Die übrigen Zahnräder sind mit dem Übersetzungsverhältnis 1 : 10 miteinander

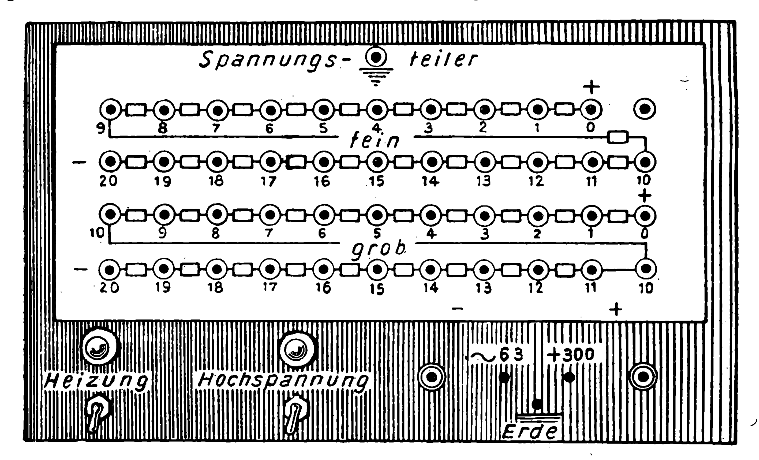


Abb. 332

gekoppelt. Daher kann man an der Trommel des mechanischen Zählwerkes die Zahl der Impulse, d. h. die Zahl der durch das Zählrohr hindurchtretenden Teilchen, ablesen.

Die Impulse werden vom Zählrohr nach ihrer Verstärkung auf die horizontalen Platten des Oszillographen gegeben (siehe Aufgabe 64). Auf die vertikalen Platten gibt man über einen Verstärker die sägezahnförmige Spannung vom Zeitablenkgerät. Bei der Beobachtung der Form des Impulses muß der „Zählwerkschalter" auf „Aus" stehen, weil sonst die Form des Impulses durch die Arbeitsweise der Untersetzerstufe stark verzerrt wird. Die Frontplatte des Verstärkers und des Oszillographen ist in Abb. 333 dargestellt. Sie trägt folgende Teile: Netzschalter, Zählwerkschalter, Scharfeinstellung des Elektronenstrahls und Helligkeitsregulierung des Elektronenstrahls. Unter dem Oszillographenschirm sitzt das Fenster des mechanischen Zählwerkes.

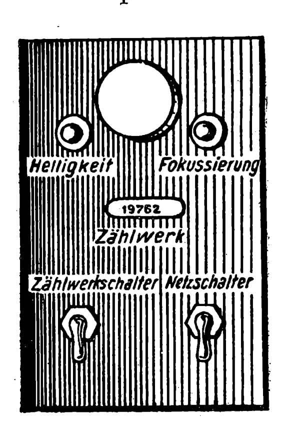


Abb. 333

Behälter mit Präparat (D). In dieser Aufgabe wird ein radioaktives Präparat verwendet, das in einem Behälter aus Blei untergebracht ist. Der Behälter ist ein dickwandiger Zylinder mit einem dünnen Kanal längs seiner Achse. Dieser Kanal ist von der einen Seite mit einem dünnen Bleiplättchen bedeckt. Im Inneren des Kanals steckt eine Ampulle mit dem radioaktiven Präparat. Der Behälter dient dazu, ein schmales

Bündel von γ-Strahlen auszublenden und gleichzeitig die sich in der Umgebung aufhaltenden Personen vor der Strahlenwirkung zu schützen.

Die Messung. Der Gleichrichter liefert eine Spannung von 1500 V. Deshalb ist größte Vorsicht geboten, und es dürfen die metallischen Teile der Stecker nicht berührt werden.

Man prüft, ob alles eingeschaltet ist (die Stellung der Schalter nach unten bedeutet „Ein"). Der Stecker für die Speisung des Zählrohres muß in der Erdbuchse auf der Frontplatte des Gleichrichters (Abb. 332) stecken. Der Gleichrichter und der Oszillograph werden mit den Steckdosen verbunden.

Man schaltet die „Heizung" des Gleichrichters und den „Netzschalter" des Oszillographen ein. Dabei müssen das Signallämpchen und das Beleuchtungslämpchen des Zählwerkes brennen. Danach wartet man zwei Minuten, bis die Röhren sich erwärmt haben, stellt die Schärfe und die benötigte Helligkeit des Elektronenstrahles ein und schaltet das Zählwerk ein. Man stellt den Hochspannungsschalter an der Frontplatte des Stabilisators auf „Ein". In diesem Moment muß auf dem Oszillographenschirm ein Zacken erscheinen.

Die Hochspannung darf nicht bei kalten Röhren eingeschaltet werden, weil das zu einem Durchschlag der Röhren des Stabilisators führen kann. Wird die Kathode geheizt, so bildet sich um sie eine Elektronenwolke, die sie vor Bombardierung durch positive Ionen schützt, welche sonst die Oxydschicht der Kathode zerstören würden.

Übung 1

Aufnahme der Charakteristik des Zählrohres

Man nimmt von dem Präparat den ersten Bleideckel ab und dreht die den Strahlengang bedeckende Bleiplatte um 90°. Dann legt man an das Zählrohr eine Spannung von 1275 V. Das geht folgendermaßen vor sich:

Die Größe der Spannung an der Frontplatte des Gleichrichters (Abb. 332) nimmt von Buchse zu Buchse in Richtung zunehmender Numerierung zu. Wenn der Bügel des Spannungsteilers „Grob" in den Buchsen *0* und *1* steckt und der Stecker nacheinander in die Buchsen *0* bis *20* des Spannungsteilers „Fein" gesteckt wird, dann ändert sich die Spannung am Zählrohr von 0 bis 75 V in Stufen von 3,75 V. Wenn der Bügel in der zweiten und ersten Buchse des Spannungsteilers „Grob" steckt und man den Stecker von der Buchse 0 bis zur Buchse 20 umsteckt, so ändert sich die Spannung am Zählrohr von 75 bis 150 V in Stufen von 3,75 V. Steckt beispielsweise der Bügel in den Buchsen 16 und 17 des Spannungsteilers „Grob" und der Stecker in der Buchse 8 des Spannungsteilers „Fein", dann liegt am Zählrohr eine Spannung von $16 \cdot 75 + 8 \cdot 3{,}75 = 1230$ V. (Die Richtung der Spannungsänderung entspricht der Bügelstellung mit der farbigen Seite nach oben.)

Wenn auf dem Oszillographenschirm keine Impulse zu sehen sind, vergrößert man allmählich die Spannung, bis Impulse erscheinen und das Zählwerk zu zählen beginnt.

Danach wird das Zählwerk ausgeschaltet, die Zahl und die Spannung notiert, die Stoppuhr in Gang gesetzt und das Zählwerk wieder eingeschaltet.

Es empfiehlt sich, die Ergebnisse in folgender Tabelle zusammenzuschreiben:

Spannungsteiler		Spannung	Anzeige des Zählwerkes vor dem Zählen	Anzeige des Zählwerkes nach dem Zählen	Zahl der Impulse	Zahl der Impulse pro Minute
Grob	Fein					

Für jeden Punkt werden die Impulse fünf Minuten lang beobachtet. Die Gesamtzahl der Impulse muß für jeden Punkt mindestens 1000 betragen.

Um Fehler zu vermeiden, muß bei jedem Umstecken des Steckers das Zählwerk ausgeschaltet werden.

Anmerkung. Man muß aufmerksam den Oszillographen beobachten. Wenn das Zählrohr zündet, muß der Stecker in die Erdbuchse gesteckt werden. Beim Zünden des Zählrohres können auf den Oszillographenschirm keine einzelnen Impulse mehr unterschieden werden. Sie verschwimmen in einem breiten Streifen, was man nur bei ausgeschaltetem Zählwerk bemerken kann.

Aus den erhaltenen Werten zeichnet man die Charakteristik des Zählrohres und bestimmt seine Arbeitsspannung. Die Arbeitsspannung, d. h. die Spannung, bei der es sich am vorteilhaftesten arbeiten läßt, entspricht der Spannung des mittleren Teiles des Zählrohrplateaus.

Nach der Wahrscheinlichkeitstheorie ist die mittlere Abweichung der Zahl der Impulse gleich $\sqrt{N}$, wobei N die Gesamtzahl der Impulse angibt. Deshalb ist der prozentuale Fehler des Versuches gleich $\frac{100}{\sqrt{N}}\,\%$.

Übung 2

Die Bestimmung des Untergrundes des Zählrohres

Man legt an das Zählrohr die Arbeitsspannung und bedeckt das Präparat mit allen Bleiplatten und dem Bleideckel. Dann bestimmt man die Zahl der Impulse pro Minute, d. h. den Untergrund. Dazu zählt man mindestens 1000 Impulse und mißt die Zählzeit mit der Stoppuhr.

Übung 3

Die Bestimmung des Absorptionskoeffizienten für γ-Strahlen

γ-Strahlen radioaktiver Elemente haben die Eigenschaft, in starkem Maße Stoffe zu durchdringen. Bei dieser Durchdringung verlieren sie durch Wechselwirkung mit der Materie ihre Energie auf dreierlei Arten: durch Hervorrufen des Photoeffektes und des Comptoneffektes und durch Paarerzeugung (Elektron-Positron). Der Anteil jedes dieser Prozesse bei der Absorption elektromagnetischer Strahlung hängt von der Ordnungszahl des absorbierenden Mediums und der Wellenlänge der Strahlung ab.

Die Gesamtabsorption von γ-Strahlen, womit die von ihnen verlorene Energie gemeint ist, die für alle drei Prozesse verbraucht wird, geht nach einem Exponentialgesetz vor sich. Wenn also die Strahlungsintensität bis zur Wechselwirkung mit der Materie gleich J_0 ist, so wird ihre Intensität nach dem Durchgang durch eine Schicht irgendeines Stoffes der Dicke x nach der Formel bestimmt:

$$J = J_0 e^{-kx}, \tag{1}$$

wobei mit k der *Absorptionskoeffizient* bezeichnet ist. Die Größe des Absorptionskoeffizienten hängt von der Ordnungszahl des absorbierenden Stoffes und der Wellenlänge der auffallenden Strahlung ab.

Zur Bestimmung des Absorptionskoeffizienten für die Strahlung geht man folgendermaßen vor: Man nimmt die Bleideckel herunter, legt die Arbeitsspannung an das Gerät und beobachtet während einer Zeitdauer von 10 Minuten das Zählwerk. Von den erhaltenen Ergebnissen subtrahiert man den in der vorigen Übung gemessenen Untergrund des Zählrohres. Dann bedeckt man die Öffnung des Präparates mit einem, zwei usw. Bleiplättchen und bestimmt jedesmal die Zahl n der Impulse pro Minute. Aus den erhaltenen Werten zeichnet man die Absorptionskurve für γ-Strahlen in Blei.

Zur Bestimmung des Absorptionskoeffizienten benutzt man die Formel (1). Man setzt darin den Wert n ein, der zwei Dicken des absorbierenden Stoffes entspricht. Dann logarithmiert man den erhaltenen Ausdruck und bestimmt k nach der Formel

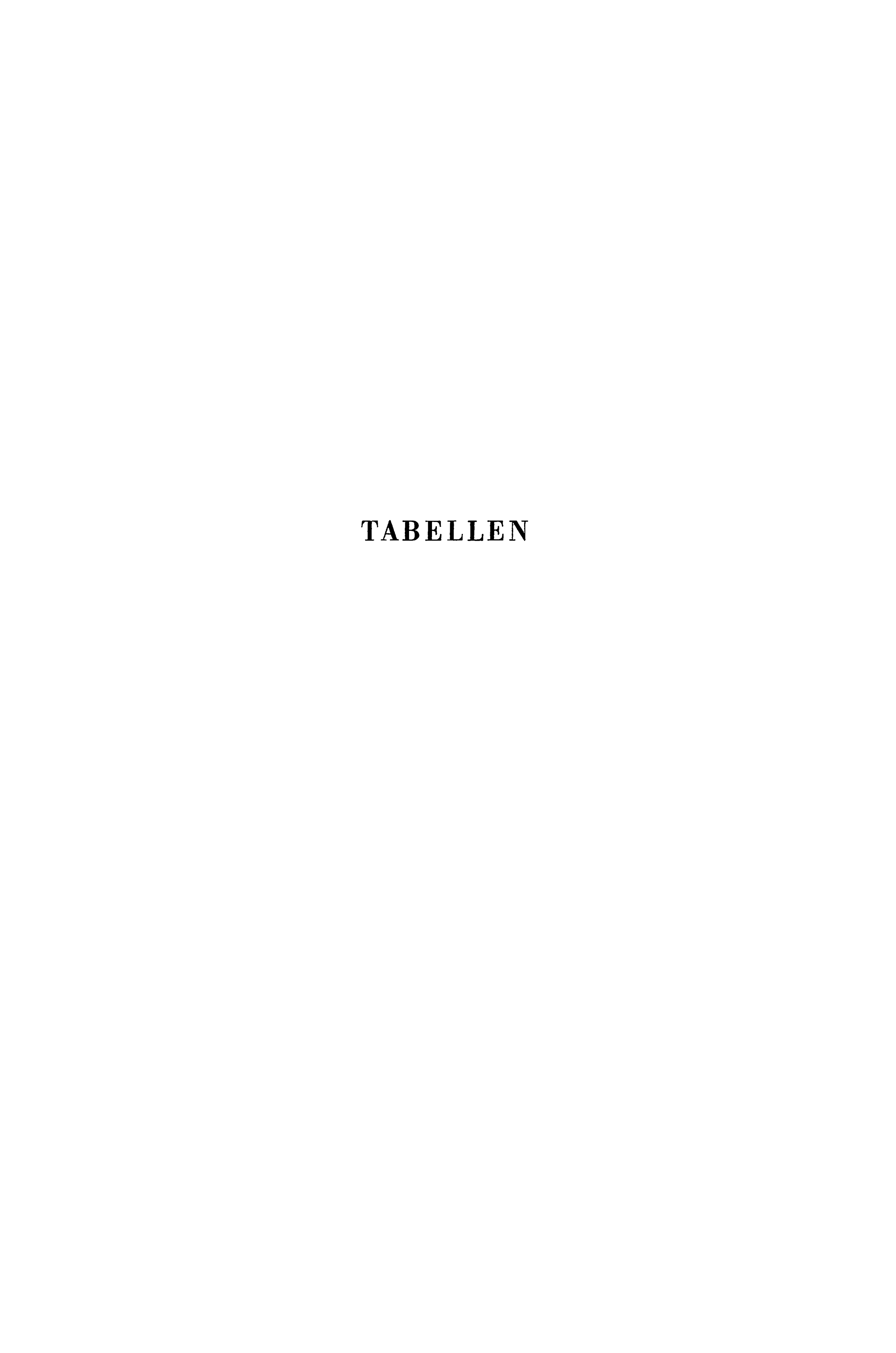
$$k = \frac{\ln n_{x_1} - \ln n_{x_2}}{x_2 - x_1}$$

oder aus der Neigung der Geraden, die die Abhängigkeit des Logarithmus der Zahl der Impulse (nach Abzug des Untergrundes) pro Minute von der Bleidicke darstellt.

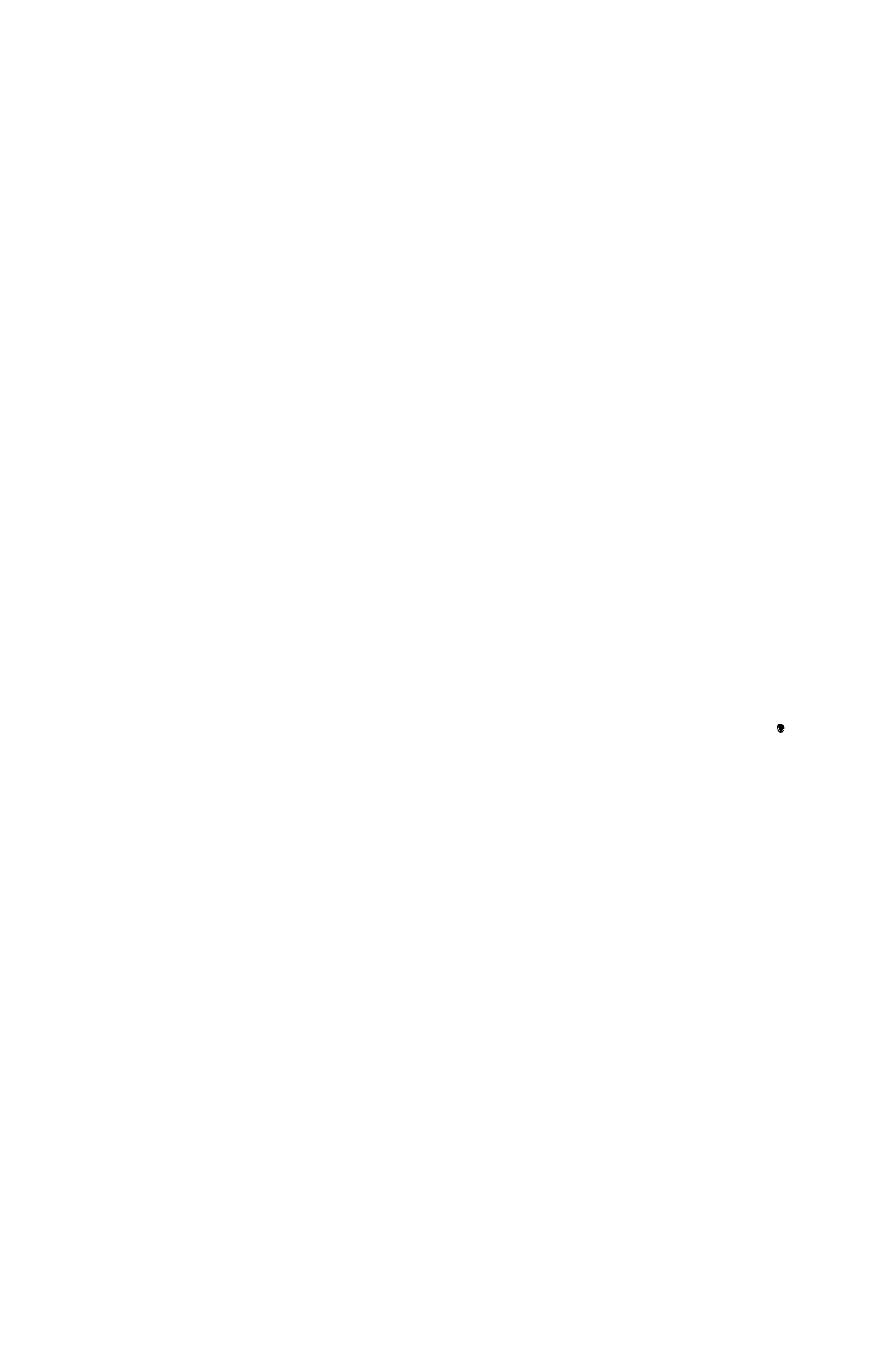
Abweichungen der Meßpunkte von einer Geraden können aus folgenden Gründen auftreten: 1. das Präparat strahlt ein Strahlengemisch aus, das verschieden stark vom Blei absorbiert wird; 2. bei starker Bestrahlung läßt das Zählwerk einen Teil der Impulse aus.

Spezialliteratur

V. Kment und A. Kuhn: „Das Geiger-Müller-Zählrohr“. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, Leipzig 1953.



TABELLEN



I. TABELLEN PHYSIKALISCHER GRÖSSEN

1. Reduktion der Barometerablesung auf 0° C

Von der Höhe H des Barometers, die bei $t°$ an einem für 0° C geeichten Maßsta bgelesen wurde, sind $(0{,}000182 - \beta) \cdot Ht$ abgezogen. Der Ausdehnungskoeffizient β de aßstabes (Messing) ist gleich 0,000019 angenommen. Für einen Glasmaßstab müsse ie Zahlen um $0{,}008t$ erhöht werden (siehe letzte Spalte).

	Abgelesene Höhe H in mm											0,008 × t
t° C	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	780	
1	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,13	0,13	0,01
2	0,22	0,22	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,25	0,02
3	0,33	0,34	0,34	0,35	0,35	0,36	0,36	0,37	0,37	0,38	0,38	0,02
4	0,44	0,45	0,46	0,46	0,47	0,48	0,48	0,49	0,50	0,50	0,51	0,03
5	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59	0,59	0,60	0,61	0,62	0,63	0,64	0,04
6	0,67	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,05
7	0,78	0,79	0,80	0,81	0,82	0,83	0,84	0,86	0,87	0,88	0,89	0,06
8	0,89	0,90	0,91	0,93	0,94	0,95	0,96	0,98	0,99	1,00	1,02	0,06
9	1,00	1,01	1,03	1,04	1,06	1,07	1,09	1,10	1,11	1,13	1,14	0,07
10	1,11	1,12	1,14	1,16	1,17	1,19	1,21	1,22	1,24	1,26	1,27	0,08
11	1,22	1,24	1,26	1,27	1,29	1,31	1,33	1,34	1,36	1,38	1,40	0,09
12	1,33	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43	1,45	1,47	1,49	1,51	1,53	0,10
13	1,44	1,46	1,48	1,50	1,53	1,55	1,57	1,59	1,61	1,63	1,65	0,10
14	1,55	1,57	1,60	1,62	1,64	1,67	1,69	1,71	1,73	1,76	1,78	0,11
15	1,66	1,69	1,71	1,74	1,76	1,78	1,81	1,83	1,86	1,88	1,91	0,12
16	1,77	1,80	1,83	1,85	1,88	1,90	1,93	1,96	1,98	2,01	2,03	0,13
17	1,88	1,91	1,94	1,97	2,00	2,02	2,05	2,08	2,11	2,13	2,16	0,14
18	2,00	2,02	2,05	2,08	2,11	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29	0,14
19	2,11	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29	2,32	2,35	2,38	2,42	0,15
20	2,22	2,25	2,28	2,31	2,35	2,38	2,41	2,45	2,48	2,51	2,54	0,16
21	2,33	2,36	2,40	2,43	2,46	2,50	2,53	2,57	2,60	2,64	2,67	0,17
22	2,44	2,47	2,51	2,55	2,58	2,62	2,65	2,69	2,73	2,76	2,80	0,18
23	2,55	2,59	2,62	2,66	2,70	2,74	2,77	2,81	2,85	2,89	2,92	0,18
24	2,66	2,70	2,74	2,78	2,82	2,86	2,89	2,93	2,97	3,01	3,05	0,19
25	2,77	2,81	2,85	2,89	2,93	2,97	3,02	3,06	3,10	3,14	3,18	0,20
26	2,88	2,92	2,97	3,01	3,05	3,09	3,14	3,18	3,22	3,26	3,31	0,21
27	2,99	3,04	3,08	3,12	3,17	3,21	3,26	3,30	3,34	3,39	3,43	0,22
28	3,10	3,15	3,19	3,24	3,29	3,33	3,38	3,42	3,47	3,51	3,56	0,22
29	3,21	3,26	3,31	3,36	3,40	3,45	3,50	3,55	3,59	3,64	3,69	0,23
30	3,33	3,37	3,42	3,47	3,52	3,57	3,62	3,67	3,72	3,77	3,81	0,24
31	3,44	3,49	3,54	3,59	3,64	3,69	3,74	3,79	3,84	3,89	3,94	0,25
32	3,55	3,60	3,65	3,70	3,76	3,81	3,86	3,91	3,96	4,02	4,07	0,26
33	3,66	3,71	3,77	3,82	3,87	3,93	3,98	4,03	4,09	4,14	4,20	0,26
34	3,77	3,82	3,88	3,93	3,99	4,05	4,10	4,16	4,21	4,27	4,32	0,27
35	3,88	3,94	3,99	4,05	4,11	4,16	4,22	4,28	4,34	4,39	4,45	0,28

2. Korrektur der Barometerablesung bei Berücksichtigung der Kapillarität
(Die Korrektur ist in mm angegeben. Sie muß zur abgelesenen Höhe stets zugezäl
›rden.)

Durchmesser der Höhe in mm	Höhe des Meniskus in mm							
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,9
4	0,83	1,22	1,54	1,98	2,37	—	—	—
5	0,47	0,65	0,86	1,19	1,45	1,80	—	—
6	0,27	0,41	0,56	0,78	0,98	1,21	1,43	—
7	0,18	0,28	0,40	0,53	0,67	0,82	0,97	1,13
8	—	0,20	0,29	0,38	0,46	0,56	0,65	0,77
9	—	0,15	0,21	0,28	0,33	0,40	0,46	0,52
10	—	—	0,15	0,20	0,25	0,29	0,33	0,37
11	—	—	0,10	0,14	0,18	0,21	0,24	0,27
12	—	—	0,07	0,10	0,13	0,15	0,18	0,19
13	—	—	0,04	0,07	0,10	0,12	0,13	0,14

3. Reduktion des Gewichtes eines Körpers auf den leeren Raum

Für das wahre Gewicht von 1 cm³ Messing sind 8,4 [p] und für das wahre Gewicht vc
:m³ Luft 0,00120 [p] angenommen. Wenn ein Körper, dessen wahres Gewicht vc
:m³ d [p] beträgt, in Luft m [p] wiegt, so muß man zu seinem Gewicht mk [mp] hi:
fügen, wobei k durch die Formel bestimmt ist:

$$k = 1{,}20\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{8{,}4}\right).$$

d	k	d	k	d	k
0,7	+1,57	2,0	+0,457	8	+ 0,007
0,8	1,36	2,5	0,337	9	— 0,010
0,9	1,19	3,0	0,257	10	— 0,023
1,0	1,06	3,5	0,200	11	— 0,034
1,1	0,95	4,0	0,157	12	— 0,043
1,2	0,86	4,5	0,124	13	— 0,051
1,3	0,78	5,0	0,097	14	— 0,057
1,4	0,71	5,5	0,075	15	— 0,063
1,5	0,66	6,0	0,057	16	— 0,068
1,6	0,61	6,5	0,042	17	— 0,072
1,7	0,56	7,0	0,029	18	— 0,076
1,8	0,52	7,5	0,017	19	— 0,080
1,9	0,49	8,0	+0,007	20	— 0,083
2,0	+0,46	—	—	21	— 0,086

4. Dichte der trockenen Luft bei verschiedenen Temperaturen

Die Dichte δ der trockenen Luft bei $t°$ und dem Druck H in mm Hg, reduziert aui C, wird nach der Formel berechnet:

$$\delta = \frac{0{,}0012932}{1 + 0{,}00367 \cdot t} \cdot \frac{H}{760}.$$

$t°$ C	H in mm 700	710	720	730	740	750	760	770	780
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0	1191	1208	1225	1242	1259	1276	1293	1310	1327
1	1187	1204	1221	1238	1255	1272	1288	1305	1322
2	1182	1199	1216	1233	1250	1267	1284	1300	1318
3	1178	1195	1212	1229	1245	1262	1279	1296	1313
4	1174	1191	1207	1224	1241	1258	1274	1291	1308
5	1170	1186	1203	1220	1236	1253	1270	1287	1303
6	1165	1182	1199	1215	1232	1249	1265	1282	1299
7	1161	1178	1194	1211	1228	1244	1261	1277	1294
8	1157	1174	1190	1207	1223	1240	1256	1273	1289
9	1153	1169	1186	1202	1219	1235	1252	1268	1285
10	1149	1165	1182	1198	1215	1231	1247	1264	1280
11	1145	1161	1178	1194	1210	1227	1243	1259	1276
12	1141	1157	1173	1190	1206	1222	1239	1255	1271
13	1137	1153	1169	1186	1202	1218	1234	1251	1267
14	1133	1149	1165	1181	1198	1214	1230	1246	1262
15	1129	1145	1161	1177	1193	1210	1226	1242	1258
16	1125	1141	1157	1173	1189	1205	1221	1238	1254
17	1121	1137	1153	1169	1185	1201	1217	1233	1249
18	1117	1133	1149	1165	1181	1197	1213	1229	1245
19	1113	1129	1145	1161	1177	1193	1209	1225	1241
20	1110	1126	1141	1157	1173	1189	1205	1221	1236
21	1106	1122	1137	1153	1169	1185	1201	1216	1232
22	1102	1118	1134	1149	1165	1181	1197	1212	1228
23	1098	1114	1130	1145	1161	1177	1193	1208	1224
24	1095	1110	1126	1142	1157	1173	1189	1204	1220
25	1091	1107	1122	1138	1153	1169	1185	1200	1216
26	1087	1103	1118	1134	1149	1165	1181	1196	1212
27	1084	1099	1115	1130	1146	1161	1177	1192	1208
28	1080	1096	1111	1126	1142	1157	1173	1188	1204
29	1077	1092	1107	1123	1138	1153	1169	1184	1200
30	1073	1088	1104	1119	1134	1150	1165	1180	1196

5. Dichte des Wassers bei verschiedenen Temperaturen

$t°$ C	Dichte	$t°$ C	Dichte	$t°$ C	Dichte
0	0,99987	12	0,99952	24	0,99732
1	0,99993	13	0,99940	25	0,99707
2	0,99997	14	0,99927	26	0,99681
3	0,99999	15	0,99913	27	0,99654
4	1,00000	16	0,99897	28	0,99626
5	0,99999	17	0,99880	29	0,99597
6	0,99997	18	0,99862	30	0,99567
7	0,99993	19	0,99843	31	0,99537
8	0,99988	20	0,99823	32	0,99505
9	0,99981	21	0,99802	33	0,99472
10	0,99973	22	0,99780	34	0,99440
11	0,99963	23	0,99757	35	0,99406

6. Dichte des Quecksilbers bei verschiedenen Temperaturen

10-Grad-Intervall	1-Grad-Intervall									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	13,5955	5930	5905	5880	5856	5831	5806	5772	5747	5722
10	5698	5683	5658	5634	5609	5584	5560	5535	5511	5486
20	5461	5437	5412	5388	5363	5339	5314	5290	5265	5241
30	5216	5191	5167	5142	5118	5094	5069	5045	5020	4996
40	4971	4947	4922	4898	4873	4849	4825	4800	4776	4751
50	4727	4703	4678	4654	4630	4605	4581	4557	4532	4508
60	4484	4459	4435	4411	4386	4362	4338	4314	4289	4265
70	4241	4217	4192	4168	4144	4120	4095	4071	4047	4023
80	3999	3975	3950	3926	3902	3878	3854	3830	3806	3781
90	3757	3733	3709	3685	3661	3637	3613	3589	3565	3541
100	3516	3492	—	—	—	—	—	—	—	—

7. Dichte einiger Flüssigkeiten

Bezeichnung	Chemische Formel	Dichte	
		Größe	Temperatur
Amylalkohol	$C_5H_{12}O$	0,815	0
Anilin	C_6H_7N	1,015	0
Äthylalkohol	C_2H_6O	0,789	0
Äthyläther	$C_4H_{10}O$	0,716	0
Azeton	C_3H_6O	0,792	20
Benzol	C_6H_6	0,879	20
Chloroform	$CHCl_3$	1,483	18
Essigsäure	$C_2H_4O_2$	1,049	18
Glyzerin	$C_3H_8O_3$	1,260	0
Methylalkohol	CH_4O	0,792	0
Nitrobenzol	$C_6H_5O_2N$	1,21	18
Petroleum		0,8	0
Quecksilber	Hg	13,596	0
Schwefelkohlenstoff	CS_2	1,263	0
Terpentinöl	$C_{10}H_{16}$	0,858	16
Toluol	C_7H_8	0,87	18
Wasser	H_2O	1,000	4
Xylol	$C_6H_4(CH_3)_2$	0,85	18

8. Dichte einiger wäßriger Lösungen
(bei 18° C)

%	KOH	KCl	KJ	$K_2Cr_2O_7$	%
0	0,999	0,9986	0,9986	0,999	0
5	1,045	1,0308	1,0363	1,035	5
10	1,091	1,0638	1,0762	1,072	10
15	1,139	1,0978	1,1200	1,109	15
20	1,188	1,1335	1,1679		20
25	1,238	—	1,218	—	25
30	1,290	—	1,273	—	30
35	1,344	—	1,332	—	35
40	1,400	—	1,397	—	40
45	1,45	—	1,468	—	45
50	1,51	—	1,545	—	50
55	1,57	—	1,630	—	55
60	—	—	1,731	—	60

%	NH_4Cl	NaOH	NaCl	%
0	0,9986	0,9986	0,9986	0
5	1,0142	1,0545	1,0345	5
10	1,0289	1,1098	1,0711	10
15	1,0430	1,1650	1,1090	15
20	1,0571	1,2202	1,1485	20
25	1,0710	1,2751	1,1897	25
30	—	1,3290	—	30
35	—	1,3811	—	35
40	—	1,4314	—	40
45	—	1,4794	—	45
50	—	1,5268	—	50

%	$ZnSO_4$	$CuSO_4$	%
0	0,999	0,999	0
5	1,051	1,051	5
10	1,107	1,107	10
15	1,167	1,167	15
20	1,232	1,23*	20
25	1,305	* über-	25
30	1,379	sättigt	30
35	—	—	35
40	—	—	40

%	$AgNO_3$	HCl	HNO_3	H_2SO_4	H_3PO_4	Alkohol	%
0	0,9986	0,9986	0,999	0,9986	0,999	0,9986	0
5	1,0422	1,0236	1,027	1,0323	1,027	0,9898	5
10	1,0893	1,0482	1,056	1,0669	1,054	0,9824	10
15	1,1404	1,0734	1,086	1,1030	1,083	0,9760	15
20	1,1958	1,0989	1,118	1,1406	1,114	0,9696	20
25	1,2555	1,1248	1,151	1,1796	1,145	0,9628	25
30	1,3213	1,1508	1,184	1,2199	1,179	0,9551	30
35	1,3945	1,1757	1,217	1,2614	1,214	0,9463	35
40	1,4773	1,199	1,250	1,3043	1,251	0,9367	40
45	1,5705	—	1,283	1,349	1,290	0,9264	45
50	1,6745	—	1,314	1,397	1,330	0,9155	50
55	1,7895	—	1,344	1,447	1,373	0,9043	55
60	1,9158	—	1,372	1,500	1,418	0,8928	60
65	—	—	1,397	1,555	1,464	0,8811	65
70	—	—	1,418	1,612	1,512	0,8693	70
75	—	—	1,438	1,671	1,562	0,8574	75
80	—	—	1,457	1,729	1,615	0,8452	80
85	—	—	1,473	1,781	1,672	0,8327	85
90	—	—	1,489	1,817	—	0,8197	90
95	—	—	1,50	1,836	—	0,8060	95
100	—	—	1,52	1,838	—	0,7911	100

9. Dichte einiger fester Körper

Stoff	Dichte	Stoff	Dichte
Alabaster	2,25···2,87	Kochsalz	2,08···2,20
Aluminiumbronze (90% Kupfer + 10% Aluminium)	7,7	Konstantan	8,8
Aluminium	2,69	Kork	0,24
Aluminium, gegossen	2,56	Kupfer, gegossen	8,6···8,9
Aluminium, gewalzt	2,62···2,80	Kupfer, gewalzt	8,9···9,0
Aluminium, geschmiedet	2,70···2,80	Kupfer, elektrolytisch gewonnen	8,88···8,96
Aluminium, chemisch rein	2,58	Magnesium	1,74
Antimon	6,6	Mangan	7,8
Asbest	1,2···2,8	Manganin	8,4
Birke, trocken	0,51···0,77	Marmor	2,52···2,84
Blei	11,22···11,44	Messing	8,3···8,7
Bor	2,4	Natrium	0,97
Brom	3,12	Neusilber	8,4···8,7
Bronze	8,7	Nickel	8,4···9,2
Buche, trocken	0,62···0,83	Nickelin	8,77
Diamant	3,4···3,6	Paraffin	0,87···0,93
Ebonit (Hartgummi)	1,8	Papier (Schreibpapier)	0,70···1,15
Eiche, trocken	0,7···1,03	Phosphor, weiß	1,8
Eis	0,88···0,92	Platin	21,2···21,7
Eisen, chemisch rein	7,86	Quarz	2,65
Eisen (Schweißeisen)	7,8	Salmiak (Ammoniumchlorid)	1,52
Eisen (Gußeisen)	7,85	Schwefel, rhomb.	2,07
Eisen (Roheisen)	6,6···7,3	Schwefel, monokl.	1,96
Gips, kristallisiert	2,17···2,31	Silber	10,42···10,57
Gips, gebrannt	1,8	Steinkohle (in Stücken)	1,2···1,5
Glas	2,4···2,6	Steinsalz	2,28···2,41
Glas (Flintglas)	3,0···5,9	Tanne, trocken	0,37···0,75
Glimmer	2,6···3,2	Wachs	0,95···0,99
Gold	19,3	Weißmetall	7,1
Granit	2,4···2,8	Wismut	9,76···9,3
Graphit	1,9···2,3	Wolfram	19,1
Gußstahl	7,7···8,0	Woodsche Legierung	9,7
Kalium	0,86	Zink	6,86···7,24
Kalkspat	2,71	Zinn, gegossen	7,23
Kautschuk	0,92···0,96	Zinn, gewalzt	7,3···7,5
Kiefer, trocken	0,35···0,60	Zucker	1,59

Ammoniak	0,7708	0,68	0,00 3802	0,52	1,31	0,000 093	0,000 049	— 78	— 33,5	327	112	+ 132
Chlor	3,214	1,56	—	0,124	1,36	129	0183	— 100	— 34,5	675	76	+ 144
Helium	0,1786	0,15	3660	1,25	1,66	189	338	— 272	— 268,8	—	2,25	— 268
Kohlendioxyd	1,9768	—	3726	0,202	1,30	140	0331	— 57	— 78,5	142	73	+ 31
Kohlenoxyd	1,2504	0,79	367	0,250	1,40	167	052	— 199	— 190	—	35	— 139
Luft (frei von CO_2)	1,2928	—	3674	0,241	1,40	172	0565	—	— 193	50	37,2	— 141
Methan	0,7186	0,47	—	0,53	1,31	104	074	— 184	— 161,5	—	46	— 83
Sauerstoff	1,4290	1,13	3674	0,218	1,40	192	0572	— 218	— 183,0	51	50	— 119
Stickoxyd	1,3402	—	—	0,242	1,38	172	0555	— 167	— 150	—	65	— 94
Stickoxydul	1,9777	—	368	0,210	1,28	138	0351	— 102	— 90	—	71,7	+ 36
Stickstoff	1,2507	0,79	3674	0,249	1,40	167	0567	— 209,9	— 195,8	48	33,5	— 147
Wasserstoff	0,0899	0,06	3662	3,41	1,41	083	376	— 259	— 252,7	110	12,8	— 240

11. Einige Flüssigkeitskonstanten

Oberflächenspannung α bei 18° C $\left(\text{in } \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}\right)$; Koeffizient der inneren Reibung η bei 18° C $\left(\text{in } \frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{sec}}\right)$; Ausdehnungskoeffizient β bei 18° C; spezifische Wärme q bei 18° C $\left(\text{in } \frac{\text{cal}}{\text{grad} \cdot \text{g}}\right)$; Schmelzpunkt Θ° C; Schmelzwärme ϱ $\left(\text{in } \frac{\text{cal}}{\text{g}}\right)$; Siedepunkt τ° C; Verdampfungswärme λ $\left(\text{in } \frac{\text{cal}}{\text{g}}\right)$; kritische Temperatur t° C; kritischer Druck p (in atm).

	α	$10^2\eta$	β	q	Θ° C	ϱ	τ° C	λ	t° C	p
			0,00							
Anilin	43	4,6	085	0,50	— 6,2	21	184,2	104	426	52,3
Äthylalkohol .	22,0	1,22	110	0,58	— 114	—	78,3	202	243	63
Äthyläther ...	17,0	0,238	163	0,56	— 116,3	27	34,6	202	194	35
Azeton	23,3	0,337	131	0,52	— 94,3	—	56,7	125	235	47
Benzol	29,0	0,673	124	0,407	+ 5,50	30,4	80,2	94	288	47,7
Brom	44	1,02	112	0,11	— 7,3	16,2	63,0	43	302	131
Chloroform ...	27	0,579	126	0,23	— 63,7	47	61,2	58	260	—
Essigsäure	26	1,27	107	0,50	+ 16,6	45	118,5	90	322	57,2
Glyzerin	66	1393	050	0,58	— 20	42	290	—	—	—
Methylalkohol.	22,8	0,632	122	0,60	— 97	—	64,7	265	240	78,7
Pentan	—	0,244	160	0,52	— 160	—	27,9	—	201	33,7
Petroleum	26	—	092	0,51	—	—	—	—	—	—
Propylalkohol.	23,6	2,39	095	0,57	— 127	—	96	163	263	49,9
Quecksilber ...	$5 \cdot 10^2$	1,59	0181	0,033	— 38,9	2,8	356,7	68	1470	—
Schwefelwasserstoff ..	32	0,382	121	0,24	— 112,0	—	46,2	85	273	73
Toluol	28,6	0,613	109	0,414	— 95,1	—	110,8	87	320	41,6
Wasser	72,8	1,05	018	0,999	0	79,7	100,0	539,1	374	218
m-Xylol	28,4	0,647	101	0,40	— 49,3	39	138,5	81	350	27

12. Einige Wärmeeigenschaften fester Körper

Bezeichnung	Ausdehnungskoeffizient 0°C···100°C $\alpha \cdot 10^4$	Spez. Wärme bei 18°C	Wärmeleitfähigkeit bei 18°C $\frac{\text{cal}}{\text{grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}}$	Schmelzpunkt	Schmelzwärme
Aluminium	0,238	0,214	0,48	658,7	76,8
Blei	0,293	0,03	0,083	327	5,36
Bronze	0,171···0,212	0,104	0,14	—	—
Ebonit (Hartgummi)	0,84	—	0,0004	—	—
Eis	0,51	0,50	0,006	0	79,63
Eisen	0,121	0,119	0,14	1530	23···33
Eisen (Stahl)	0,106	0,12	0,11	—	—
Eisen (Gußeisen)	0,114	—	0,12	—	—
Glas (Kronglas)	0,09	0,16	0,0016	—	—
Glas (Flintglas)	0,079	0,12	0,0014	—	—
Gold	0,145	0,032	0,70	1063	15,9
Holz (Ebenholz)	—	0,33	0,0005	—	—
Holz (Eichenholz)	0,05···0,5	0,33	0,0005	—	—
Holz (Tannenholz)	0,04···0,58	0,33	0,0005	—	—
Invar	0,009	—	0,011	—	—
Iridium	0,066	0,032	0,14	2350	—
Kadmium	0,316	0,057	0,22	320,9	13,66
Kalium	0,83	0,17	0,23	62,3	15,7
Kalzium	—	0,17	—	810	—
Kobalt	0,124	0,103	—	1480	58,2
Kohlenstoff (Diamant)	0,0118	0,11	—	—	—
Kohlenstoff (Graphit)	0,079	0,16	0.037	—	—
Konstantan	0,1523	0,10	0,054	—	—
Kork	—	0,69	0,001	—	—
Kupfer	0,167	0,094	0,92	1083	42
Magnalium	0,238	—	—	—	—
Magnesium	0,261	0,25	0,38	651	72
Manganin	0,181	0,10	0,052	—	—
Messing	0,188···0,193	0,0017	0,26	etwa 900	—
Natrium	2,26	0,295	0,32	97,5	31,7
Neusilber	0,184	0,095	0,07	etwa 1000	—
Nichrom	0,123	—	—	etwa 1100	—
Nickel	0,128	0,11	0,14	1452	58,3···73
Nickelin	—	—	—	—	—
Osmium	0,0679	0,031	—	2500	—
Palladium	0,118	0,059	0,168	1557	—
Paraffin	1,07···4,7	—	0,0005	38···56	35,10
Platin	0,091	0,028	0,166	1770	—
Porzellan	0,04	—	0,0025	—	—
Quarz, ⊥ Achse	0,134	0,19	0,016	—	—
Quarz, ‖ Achse	0,08	0,19	0,033	—	—
Quarz, geschmolzen	0,0057	—	0,0024	—	—
Schwefel	1,18	0,175	0,0005	106,8···119,2	9,37
Silber	0,197	0,056	1,01	960,5	21
Tantal	66	0,033	0,13	2800	—
Wachs	7,1···15,2	—	—	63	42,3
Wismut	0,135	0,031	0,019	271	12,64
Wolfram	0,045	0,037	0,38	3380	—
Woodsche Legierung	—	0,04	0,3	65,5	8,4
Zink	0,291	0,093	0,265	419,4	28,1
Zinn	0,230	0,055	0,157	231,9	14,0

13. Umrechnung des Gasvolumens auf 0° C und 760 mm Druck

Wenn das Volumen eines Gases und seine Dichte bei t° C und dem Druck H mm gleich nd δ sind, dann wird das Volumen v_0 und die Dichte δ_0 des Gases für 0° C und den Druc 60 mm nach den Formeln berechnet:

$$v_0 = \frac{v}{1+\alpha t} \cdot \frac{H}{760} \quad \text{und} \quad \delta_0 = \delta\,(1+\alpha t)\,\frac{760}{H}, \quad \text{wobei} \quad \alpha = 0{,}00367$$

t° C	$1+\alpha t$	t° C	$1+\alpha t$	t° C	$1+\alpha t$
0	1,0000	40	1,1468	80	1,2936
1	1,0037	41	1,1505	81	1,2973
2	1,0073	42	1,1541	82	1,3009
3	1,0110	43	1,1578	83	1,3046
4	1,0147	44	1,1615	84	1,3083
5	1,0183	45	1,1651	85	1,3119
6	1,0220	46	1,1688	86	1,3156
7	1,0257	47	1,1725	87	1,3198
8	1,0294	48	1,1762	88	1,3230
9	1,0330	49	1,1798	89	1,3266
10	1,0367	50	1,1835	90	1,3303
11	1,0404	51	1,1872	91	1,3340
12	1,0440	52	1,1908	92	1,3376
13	1,0477	53	1,1945	93	1,3413
14	1,0514	54	1,1982	94	1,3450
15	1,0550	55	1,2018	95	1,3486
16	1,0587	56	1,2055	96	1,3523
17	1,0624	57	1,2092	97	1,3560
18	1,0661	58	1,2129	98	1,3597
19	1,0697	59	1,2165	99	1,3633
20	1,0734	60	1,2202	100	1,3670
21	1,0771	61	1,2239	101	1,3707
22	1,0807	62	1,2275	102	1,3743
23	1,0844	63	1,2312	103	1,3780
24	1,0881	64	1,2349	104	1,3817
25	1,0917	65	1,2385	105	1,3853
26	1,0954	66	1,2422	106	1,3890
27	1,0991	67	1,2459	107	1,3927
28	1,1028	68	1,2496	108	1,3964
29	1,1064	69	1,2532	109	1,4000
30	1,1101	70	1,2569	110	1,4037
31	1,1138	71	1,2606	111	1,4074
32	1,1174	72	1,2642	112	1,4110
33	1,1211	73	1,2679	113	1,4147
34	1,1248	74	1,2716	114	1,4184
35	1,1284	75	1,2752	115	1,4220
36	1,1321	76	1,2789	116	1,4257
37	1,1358	77	1,2826	117	1,4294
38	1,1395	78	1,2863	118	1,4331
39	1,1431	79	1,2899	119	1,4367
40	1,1468	80	1,2936	120	1,4404

H mm	$\frac{H}{760}$	H mm	$\frac{H}{760}$
700	0,9211	740	0,9737
701	0,9224	741	0,9750
702	0,9237	742	0,9763
703	0,9250	743	0,9776
704	0,9263	744	0,9789
705	0,9276	745	0,9803
706	0,9289	746	0,9816
707	0,9303	747	0,9829
708	0,9316	748	0,9842
709	0,9329	749	0,9855
710	0,9342	750	0,9868
711	0,9355	751	0,9882
712	0,9368	752	0,9895
713	0,9382	753	0,9908
714	0,9395	754	0,9921
715	0,9408	755	0,9934
716	0,9421	756	0,9947
717	0,9434	757	0,9961
718	0,9447	758	0,9974
719	0,9461	759	0,9987
720	0,9474	760	1,0000
721	0,9487	761	1,0013
722	0,9500	762	1,0026
723	0,9513	763	1,0039
724	0,9526	764	1,0053
725	0,9539	765	1,0066
726	0,9553	766	1,0079
727	0,9566	767	1,0092
728	0,9579	768	1,0105
729	0,9592	769	1,0118
730	0,9605	770	1,0132
731	0,9618	771	1,0145
732	0,9632	772	1,0158
733	0,9645	773	1,0171
734	0,9658	774	1,0184
735	0,9671	775	1,0197
736	0,9684	776	1,0211
737	0,9697	777	1,0224
738	0,9711	778	1,0237
739	0,9724	779	1,0250
740	0,9737	780	1,0263

14. Siedetemperatur des Wassers bei verschiedenen Drucken

H ist der barometrische Druck in mm

	H in mm											
	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	780	790
0	96,92	7,32	7,71	8,11	8,49	8,88	9,26	9,63	100,00	0,37	0,73	1,09
1	6,96	7,36	7,75	8,14	8,53	8,91	9,29	9,67	0,04	0,40	0,76	1,12
2	7,00	7,40	7,79	8,18	8,57	8,95	9,33	9,70	0,07	0,44	0,80	1,16
3	7,04	7,44	7,83	8,22	8,61	8,99	9,37	9,74	0,11	0,48	0,84	1,19
4	7,08	7,48	7,87	8,26	8,65	9,03	9,41	9,78	0,15	0,51	0,87	1,23
5	7,12	7,52	7,91	8,30	8,69	9,07	9,44	9,82	0,18	0,55	0,91	1,26
6	7,16	7,56	7,95	8,34	8,72	9,10	9,48	9,85	0,22	0,58	0,94	1,30
7	7,20	7,60	7,99	8,38	8,76	9,14	9,52	9,89	0,26	0,62	0,98	1,33
8	7,24	7,63	8,03	8,42	8,80	9,18	9,56	9,93	0,29	0,66	1,02	1,37
9	7,28	7,67	8,07	8,45	8,84	9,22	9,59	9,96	0,33	0,69	1,05	1,41
10	7,32	7,71	8,11	8,49	8,88	9,26	9,63	0,00	0,37	0,73	1,09	1,44

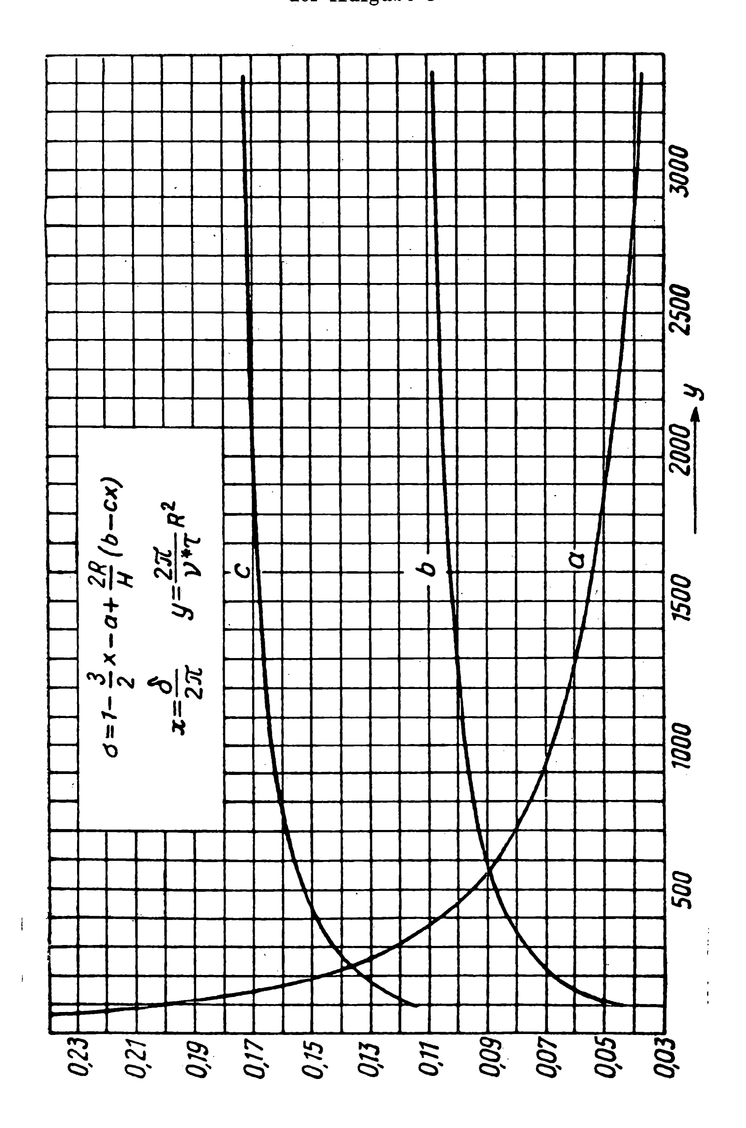
15. Spezifische Wärme des Wassers bei verschiedenen Temperaturen

t°C	c	t°C	c
0	1,0091	55	82
5	50	60	88
10	20	65	94
15	1,0000	70	1,0001
20	0,9987	75	07
25	78	80	14
30	73	85	21
35	71	90	28
40	71	95	35
45	73	100	43
50	77		

16. Spezifische Wärme des Kupfers bei verschiedenen Temperaturen

Temperatur in °C	0	100	200	300	400	500	600
Spez. Wärme des Kupfers in $\frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{grad}}$	0,0910	0,0940	0,0975	0,1008	0,1038	0,1070	0,1090

17. Graphische Darstellung der Koeffizienten a, b und c zur Berechnung von σ der Aufgabe 32



18. Druck und Dichte des gesättigten Wasserdampfes bei verschiedenen Temperaturen

Temperaturen in ° C; Druck *p* in Torr; unter dem Buchstaben *m* steht die Masse vo m³ Dampf, ausgedrückt in Gramm.

t° C	p	m	t° C	p	m	t° C	p	m
—30	0,28	0,33	0	4,58	4,84	30	31,82	30,3
—29	0,31	0,37	1	4,93	5,22	31	33,70	32,1
—28	0,35	0,41	2	5,29	5,60	32	35,66	33,9
—27	0,38	0,46	3	5,69	5,98	33	37,73	35,7
—26	0,43	0,51	4	6,10	6,40	34	39,90	37,6
—25	0,47	0,55	5	6,54	6,84	35	42,18	39,6
—24	0,52	0,60	6	7,01	7,3	36	44,56	41,8
—23	0,58	0,66	7	7,51	7,8	37	47,07	44,0
—22	0,64	0,73	8	8,05	8,3	38	49,69	46,3
—21	0,70	0,80	9	8,61	8,8	39	52,44	48,7
—20	0,77	0,88	10	9,21	9,4	40	55,32	51,2
—19	0,85	0,96	11	9,84	10,0	45	71,88	65,4
—18	0,94	1,05	12	10,52	10,7	50	92,5	83,0
—17	1,03	1,15	13	11,23	11,4	55	118,0	104,3
—16	1,13	1,27	14	11,99	12,1	60	149,4	130
—15	1,24	1,38	15	12,79	12,8	65	187,5	161
—14	1,36	1,51	16	13,63	13,6	70	233,7	198
—13	1,49	1,65	17	14,53	14,5	75	289,1	242
—12	1,63	1,80	18	15,48	15,4	80	355,1	293
—11	1,78	1,96	19	16,48	16,3	85	433,6	354
—10	1,95	2,14	20	17,54	17,3	90	525,8	424
— 9	2,13	2,33	21	18,65	18,3	95	633,9	505
— 8	2,32	2,54	22	19,83	19,4	100	760,0	598
— 7	2,53	2,76	23	21,07	20,6			
— 6	2,76	2,99	24	22,38	21,8			
— 5	3,01	3,24	25	23,76	23,0			
— 4	3,28	3,51	26	25,21	24,4			
— 3	3,57	3,81	27	26,74	25,8			
— 2	3,88	4,13	28	28,35	27,2			
— 1	4,22	4,47	29	30,04	28,7			

19. Psychrometrische Tabelle der relativen Feuchtigkeit der Luft

Anzeige des trockenen Thermometers in °C	Differenz der Anzeige des trockenen und feuchten Thermometers in °C										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	100	81	63	45	28	11					
2	100	84	68	51	35	20					
4	100	85	70	56	42	28	14				
6	100	86	73	60	47	35	23	10			
8	100	87	75	63	51	40	28	18	7		
10	100	88	76	65	54	44	34	24	14	4	
12	100	89	78	68	57	48	38	29	20	11	
14	100	90	79	70	60	51	42	33	25	17	9
16	100	90	81	71	62	54	45	37	30	22	15
18	100	91	82	73	64	56	48	41	34	26	20
20	100	91	83	74	66	59	51	44	37	30	24
22	100	92	83	76	68	61	54	47	40	34	28
24	100	92	84	77	69	62	56	49	43	37	31
26	100	92	85	78	71	64	58	50	45	40	34
28	100	93	85	78	72	65	59	53	48	42	37
30	100	93	86	79	73	67	61	55	50	44	39

20. Löslichkeit einiger Salze in Wasser

In 100 Gewichtsteilen Wasser sind im Sättigungszustand die angeführten Gewichtsteil[e] [w]asserfreien Salzes gelöst.

	Bei der Temperatur		
	0°C	18°C	100°C
KCl	28	34	57
KJ	128	142	209
$KClO_3$	3	6,9	56
KNO_3	13	29	250
K_2SO_4	8	10,5	26
$K_2Cr_2O_7$	5	11	94
K_2CO_3	89	111	156
NH_4Cl	28	36	73
NaCl	35,5	36,0	39,6
$NaNO_3$	73	86	180
$NaClO_3$	82	98	204
Na_2CO_3	7	20	45
LiCl	64	79	130
Li_2CO_3	1,5	1,3	0,8
$BaCl_2$	31	35	59
$SrCl_2$	44	52	120
$CaCl_2$	50	71	155

	Bei der Temperatur		
	0°C	18°C	100°C
$CaSO_4$	0,18	0,202	0,17
$MgCl_2$	52	56	—
$MgSO_4$	27	35	74
$ZnCl_2$	210	360	610
$ZnSO_4$	43	51	95
$CdSO_4$	75	76	61
$CuSO_4$	18	23	75
$NiSO_4$	29	39	—
$AgNO_3$	122	220	900
$Pb(NO_3)_2$ ...	38	51	130
Hg_2SO_4	—	0,05	—
$BaSO_4$	$0{,}0_3 17$	$0{,}0_3 23$	—
BaC_2O_4	0,005	0,008	—
CaC_2O_4	$0{,}0_3 40$	$0{,}0_3 55$	—
AgCl	$0{,}0_3 06$	$0{,}0_3 13$	—
Rohrzucker .	179	201	490

21. Oberflächenspannung des Wassers bei Temperaturen von 0 bis 80° C

Temperatur in °C	Oberflächenspannung in $\frac{dyn}{cm}$	Temperatur in °C	Oberflächenspannung in $\frac{dyn}{cm}$
0	75,49	45	68,6
5	74,75	50	67,8
10	74,01	55	66,9
15	73,26	60	66,0
20	72,53	65	65,1
25	71,78	70	64,2
30	71,03	75	63,3
35	70,29	80	62,3
40	69,54		

22. Koeffizient der inneren Reibung des Wassers für verschiedene Temperaturen

in Poise ($cm^{-1} \cdot g \cdot sec^{-1}$)

t °C	$10^5[\eta]$	Auf +1° C	t °C	$10^5[\eta]$	Auf +1° C	t °C	$10^5[\eta]$	Auf +1° C	t °C	$10^5[\eta]$	Auf +1° C
0	1797		19	1029		30	803		100	284	
5	1518	−56	20	1004	−25	40	655	−15	110	256	−2,8
10	1307	−42	21	980	−24	50	551	−10	120	232	−2,4
15	1140	−33	22	957	−23	60	470	−8,1	130	212	−2,0
16	1110	−30	23	936	−21	70	407	−6,3	140	196	−1,6
17	1082	−28	24	915	−21	80	357	−5,0	150	184	−1,2
18	1055	−27	25	895	−20	90	317	−4,0	160	174	−1,0
19	1029	−26	30	803	−18	100	284	−3,3			

23. Schwerebeschleunigung g für verschiedene Breiten in Meereshöhe

Breite in °	g	Breite in °	g	Breite in °	g
0	978,030	35	979,730	70	982,606
5	978,069	40	980,166	75	982,866
10	978,186	45	980,616	80	983,058
15	978,376	50	981,066	85	983,176
20	978,634	55	981,503	90	983,216
25	978,952	60	981,914	Moskau	981,523
30	979,321	65	982,285	Leningrad	981,908

Aluminium	6300···7500	— 20	2300···2700	— 21	0,33	5	10···40	5000
Blei	1500···1700	—	550	— 80	0,43	—	2	1300
Bronze	10600	—	4600	—	0,31	10	18···80	
Eisen, geschmiedet ...	20000···22000	— 2	7000···8500	— 2 bis — 5	0,28	20	40···60	5100
Glas	5000···8000	bis — 4	1800···3000	—	0,2···0,3	—	3···9	5000···6000
Gold	7000···9500	— 3	2600···3900	— 3	0,41	—	11	2100
Gußeisen, grau	7500···13000	—	5000	—	0,23···0,27	6	12···13	—
Gußeisen, weiß	18000	—	—	—	—	—	—	—
Holz	400···1800	—	—	—	—	—	3···22	3···4000
Invar	14000	—	5600	—	—	50	78	—
Konstantan	16600	—	6200	—	0,33	30	32	4300
Kupfer	10000···13000	— 2 bis — 4	3900···4800	— 4 bis — 6	0,34	0,5···20	16···45	3600
Magnalium	7000	—	—	—	—	6	20	—
Manganin	12600	—	4700	—	0,33	—	—	3900
Messing	8000···10000	— 4	2700···3700	— 5	0,3···0,4	bis 13	10···50	3200
Neusilber	11000	—	4000	— 4	0,37	—	—	3600
Nickel	20000···22000	— 2	7800	— 3	0,30	9	50	4900
Platin	16000···17500	— 1 bis — 2	6000···7240	— 2	0,38	—	24···34	2800
Quarz, geschmolzen ..	6000	—	—	—	—	—	12···66	—
Silber	7000···8000	— 4	2500···2900	— 7 bis — 8	0,37	15	29	2700
Stahl	20000···22000	— 2	8000···8300	— 2 bis — 5	0,28	20···150	50···160	5100
Stahlsaite	—	—	—	—	—	—	bis 250	5100
Tantal	19000	—	—	—	—	—	93	3400
Zink	8000···13000	—	4000	— 40	0,3···0,3	—	13···20	3700
Zinn	4000···4500	—	1700	—	0,33	—	1,7···2,5	2600

25. Widerstand und Gewicht von Kupferdrähten

(Der spezifische Widerstand ist gleich $0{,}178\,\Omega\cdot\frac{mm^2}{m}$; die Dichte ist gleich 8,89)

Querschnitt in mm²	Durchmesser in mm	Widerstand für die Länge von 100 m in Ω	Gewicht von 100 m in kp
0,5	0,8	3,57	0,445
0,75	1,0	2,38	0,666
1	1,1	1,78	0,889
1,5	1,4	1,19	1,33
2,5	1,8	0,71	2,22
4	2,3	0,45	3,56
6	2,8	0,30	5,33
10	3,6	0,18	8,89
16	4,5	0,11	14,2
25	5,6	0,071	22,2
35	6,7	0,051	31,1
50	8,0	0,036	44,5
70	10,9	0,026	62,2
95	12,6	0,019	84,5
120	14,5	0,015	106,8
150	15,8	0,012	133,2
185	17,6	0,0097	164,4
240	20,4	0,0074	211,5
310	22,8	0,0058	275,5
400	26,3	0,0045	355,5
500	29,4	0,0036	444,5
625	32,9	0,0029	555,0
800	37,2	0,0022	711,0
1000	41,6	0,0018	889,0

26. Spezifischer Widerstand einiger Isolatoren

27. Spezifischer Widerstand einiger Metalle und Legierungen

in Ohm · cm bei 18° C

Reine Metalle und Legierungen	$10^4 \varrho$	Reine Metalle und Legierungen	$10^4 \varrho$	Reine Metalle und Legierungen	$10^4 \varrho$
Silber	0,016	Kadmium	0,076	Manganin	0,43
Kupfer	0,017	Messing	0,08	Antimon	0,45
Gold	0,023	Eisen	0,086	Konstantan ...	0,50
Aluminium ...	0,029	Kobalt	0,090	Quecksilber ...	0,958
Iridium	0,053	Palladium	0,107	Wismut	1,20
Wolfram	0,056	Platin	0,107	Natrium	0,049
Rhodium	0,060	Zinn	0,113	Kalium	0,070
Zink	0,060	Tantal	0,12	Nickelin	0,42
Nickel	0,070	Blei	0,21	Nichrom	1,10

28. Spezifischer Widerstand einiger wäßriger Lösungen

bei 18° C

In der Tabelle sind die Widerstände von 1 cm³ verschiedener Lösungen (in Ohm) ngegeben.

Prozentualer Gehalt wasserfreier Salze oder Säuren in der Lösung	Salmiakgeist NH_4Cl	Natriumchlorid $NaCl$	Zinksulfat $ZnSO_4$	Kupfersulfat $CuSO_4$	Ätzkali KOH	Ätznatron $NaOH$	Schwefelsäure H_2SO_4
5	10,9	14,9	52,4	52,9	5,8	5,1	4,8
10	5,6	8,3	31,2	31,3	3,2	3,2	2,6
15	3,9	6,1	24,1	23,8	2,4	2,9	1,8
20	3,0	5,1	21,3	—	2,0	3,0	1,5
25	2,5	4,7	20,8	—	1,9	3,7	1,4
30	—	—	22,7	—	1,8	4,8	1,35
35	—	—	—	—	2,0	6,4	1,4
40	—	—	—	—	2,2	8,3	1,5

29. Leitfähigkeit wäßriger Lösungen von Schwefelsäure in $Ohm^{-1} \cdot cm^{-1}$

½ H_2SO_4-Konzentration in %													
5	10	15	20	25	30	35	40	50	60	70	80	90	100
),208	0,391	0,543	0,653	0,717	0,739	0,724	0,680	0,540	0,373	0,216	0,110	0,107	0,016

30. Temperaturkoeffizient des Widerstandes einiger Metalle und Legierungen ($\alpha \cdot 10^3$)

Aluminium	+4,2	Messing	+2
Blei	+4,2	Nichrom	+0,15···0,4
Bronze	−0,5	Nickel	+6,2
Eisen	+6,0	Nickelin	+0,3
Gold	+3,9	Platin	+3,9
Konstantan	+0,002	Quecksilber	+0,27
Kupfer	+4,1	Silber	+4,0
Manganin	+0,006	Wolfram	+4,5

31. Dielektrizitätskonstante bei 18° C

Azeton	21	Paraffinöl	2,2
Äthylalkohol	33	Petroleum	2
Bakelit	3,2	Phosphor	6
Benzol	2,3	Quarz	
Bernstein	2,8	‖ zur Achse	4,7
Ebonit	2,7	⊥ zur Achse	4,4
Glas, gewöhnlich	5···7	Quarz, geschmolzen	3,7
Glas, optisch	bis 10	Rizinusöl	4,67
Glimmer	6···9	Rutil	170
Guttapercha	4,4	Sauerstoff	1,000547
Helium	1,000074	Schellack	3··· 3,7
Holz, trocken	2···8	Schiefer	12···50
Kautschuk	2,2···3	Schwefel	3,6···4,3
Kohlendioxyd	1,00097	Schwefelwasserstoff	2,6
Luft	1,000590	Steinsalz	5,6
Marmor	8,3	Stickstoff	1,000606
Methylalkohol	26	Wasser	81
Nitrobenzol	36	Wasserstoff	1,000264
Papier	2···2,5	Xylol	2,2···2,6
Paraffin	2	Zelluloid	3,9

32. Thermospannungen

A. In dieser Tabelle sind die Thermospannungen, ausgedrückt in 10^{-5} V, für die hermoelemente Platin—Rhodium und Platin—Iridium für verschiedene Temperaturen er einen Lötstelle und für die Temperatur 0° C der anderen Lötstelle angegeben.

Thermoelement	Temp. °C	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450
Pt und	0	0	23	51	83	119	158	199	242	286	331
(90% Pt, 10% Rh)	500	337	423	470	518	567	617	668	720	773	826
	1500	880	935	991	1048	1106	1225	1165	1286	1348	—
Pt und	9	0	58	125	195	268	343	420	498	577	657
(90% Pt, 10% Ir)	500	737	818	899	981	1064	1147	1231	1315	1400	1485
	1500	1571	1657	1744	1831	1919	2007	2096	2185	2275	—

B. In dieser Tabelle sind die Thermospannungen, ausgedrückt in 10^{-6} V (Mikrovolt), ir Thermoelemente angegeben, die aus Platin und einem der übrigen, in der Tabelle ngeführten Metalle bestehen. Eine der Lötstellen hat eine Temperatur von 0° C und ie andere die in der Tabelle angegebene Temperatur.

Der Strom fließt durch die erwärmte Lötstelle von dem Metall, das ein (zahlenmäßig) leineres Potential besitzt.

Metall	−190° C	+100° C	Metall	−190° C	+100° C
Aluminium	+ 390	+ 380	Magnesium	+ 330	+ 410
Antimon	—	+4700	Manganin[2])	—	+ 570
Blei	+ 210	+ 410	Neusilber[3])	—	etwa
Bronze	—	etwa			−1000
		+ 400	Nickel	+ 2200	−1640
Eisen	−2900	etwa	Palladium	+ 790	− 560
		+1600	Quecksilber	—	0
Gold	− 120	+ 730	Silber	− 140	+ 710
Kadmium	− 60	+ 900	Tantal	—	+ 330
Kobalt	—	−1520	Wismut	+12300	−6500
Konstantan[1])	—	−3440	Zink	− 120	+ 750
Kupfer	− 200	+ 700	Zinn	+ 200	+ 410

[1]) 60% Kupfer, 40% Nickel.
[2]) 84% Kupfer, 4% Nickel, 12% Mangan.
[3]) 60% Kupfer, 15% Nickel, 25% Zink.

33. Urspannung der Elemente

Bezeichnung	Negative Elektrode	Lösungen		Positive Elektrode	Spannung in Volt
DANIELL-Element	amalg. Zn	1 Teil H_2SO_4 auf 4 Teile H_2O	Gesättigte Lösung von $CuSO_4 + 5\,H_2O$	Cu	1,06
DANIELL-Element	amalg. Zn	1 Teil H_2SO_4 auf 12 Teile H_2O	Gesättigte Lösung von $CuSO_4 + 5\,H_2O$	Cu	1,09
DANIELL-Element	amalg. Zn	5%ige Lösung von $ZnSO_4 + 6\,H_2O$	Gesättigte Lösung von $CuSO_4 + 5\,H_2O$	Cu	1,08
DANIELL-Element	amalg. Zn	1 Teil NaCl auf 4 Teile H_2O	Gesättigte Lösung von $CuSO_4 + 5\,H_2O$	Cu	1,05
POGGENDORFF-Element	amalg. Zn	1 Teil H_2SO_4 auf 12 Teile H_2O	12 Teile $K_2Cr_2O_7$ auf 100 Teile H_2O	Kohle	2,03
Chromsäure-element	amalg. Zn	12 Teile $K_2Cr_2O_7$ + 25 Teile H_2SO_4 + 100 Teile H_2O		Kohle	2,01
LECLANCHÉ-Element	amalg. Zn	NH_4Cl-Lösung. MnO_2 mit Kohlepulver		Kohle	1,46
Trockenelement	Zn	1 Teil ZnO, 1 Teil NH_4Cl, 3 Teile Gips, 2 Teile $ZnCl_2$ und Wasser, bis Paste entsteht		Kohle	1,3
WESTON-Element	amalg. Cd	Gesättigte Lösung von $CdSO_4$, Paste aus Hg_2SO_4 und $CdSO_4$		Quecksilber	1,0183
CLARK-Element	amalg. Zn	Gesättigte Lösung von $ZnSO_4$, Paste aus Hg_2SO_4 und $ZnSO_4$		Quecksilber	bei 20° C 1,434
Bleiakkumulator	Blei-schwamm	27···28%ige Lösung von chlorfreiem H_2SO_4; Dichte 1,20		Bleioxyd Pb_2O_5	bei 15° C 2,0···1,9
EDISON-Akkumulator	Eisen	20%ige KOH-Lösung		Dinickel-trioxyd Ni_2O_3	1,2···1,3

Formeln für die Temperaturabhängigkeit der Elemente

nach WESTON: $E_t = E_{20} - 0{,}0000406\,(t-20) - 0{,}00000095\,(t-20)^2 + 0{,}00000001\,(t-20)^3$,

nach CLARK: $E_t = E_{15} - 0{,}00119\,(t-15) - 0{,}000007\,(t-15)^2$.

34. Elektrochemische Äquivalente

Der Strom von 1 A scheidet aus (in mg):					
	Silber	Kupfer	Wasserstoff	Wasser	cm³ Knallgas bei 0° C und 760 mm Hg
In 1 sec	1,118	0,3294	0,01036	0,0933	0,1740
In 1 min	67,08	19,76	0,6215	5,60	10,44
In 1 Std.	4025	1186	37,29	335,9	626

35. Wellenlängen einiger Spektrallinien
in Å (10^{-8} cm)

Element	λ	Element	λ	Element	λ
Ba	4554	H	3970	Li	4603
	4934		4102		6104
	5535		4340		6708
	5778		4861		
	5972		6563	Na	5890
	6142				5896
	6496	He	3889		
			4026	Sr	4607
			4471		6386
Ca	4455		4713		6408
	4878		4922		
	5270		5016		
	5349		5876		
	5590		6578		
	5857		7065		
	6122				
	6162				
	6439	K	4045		
			6911		
Cu	4023		6939		
	4063		7665		
	4275		7699		
	4378				
	4587				
	5153				
	5218				
	5700				
	5782				

36. Wellenlängen der Spektrallinien einer Quecksilber-Kadmium-Zink-Lampe

λ in Å	Element	Intensität	λ in Å	Element	Intensität
6438,4696	Cd	10	4799,914	Cd	10
6362,345	Zn	10	4722,163	Zn	10
6234,35	Hg	4	4680,140	Zn	10
6123,46	Hg	5	4678,150	Cd	10
6072,63	Hg	4	4358,343	Hg	10
5790,66	Hg	10	4347,50	Hg	6
5769,60	Hg	10	4339,21	Hg	6
5460,724	Hg	10	4108,07	Hg	5
5085,823	Cd	10	4077,8	Hg	7
4916,0	Hg	10	4046,77	Hg	7
4810,534	Zn	10			

37. Wellenlängen einiger Linien des Neonspektrums

Lfd. Nr.	Lage und Farbe der Linie	Relative Intensität	Wellenlänge in mμ
1	Grellrot	10	640,2
2	Rot-orange, die linke zweier eng beieinanderliegender Linien	10	614,3
3	Orange, die erste links von der vierten bemerkbare	5	594,5
4	Gelb	20	585,2
5	Hellgrün, die erste rechts von der vierten bemerkbare	4	576,0
6	Grün, die linke von zwei einzeln stehenden Linien	6	540,0
7	Grün, die rechte von zwei einzeln stehenden Linien	8	533,0[1]
8	Grün, die rechte von fünf gleichabständigen Linien	5	503,1
9	Blaugrün, einzeln stehend	8	484,9

[1]) Diese Linie ist doppelt (Dublett). Hier ist der mittlere Wert der Wellenlänge beide Komponenten angegeben.

Abb. 38. Die Spektren
von Wasserstoff, Helium, Lithium, Natrium, Quecksilber und der Sonne

75 70 65 60 55 50 45 4

39. Die Wellenlängen der wichtigsten FRAUNHOFERschen Linien

Bezeichnung der Linie	Element	Wellenlänge in Å	Bezeichnung der Linie	Element	Wellenlänge in Å
A	Sauerstoff	7621	b_4	Eisen, Magnesium	5167,4
a		7185	c	Eisen	4957,6
B	Sauerstoff	6870	F	Wasserstoff	4861,3
C	Wasserstoff	6562,8	d	Eisen	4668
α	Sauerstoff	6278,1	e	Eisen	4383,6
D_1	Natrium	5895,9	f	Wasserstoff	4340,5
D_2	Natrium	5890,0	G′	Eisen	4325,8
D_3	Helium	5875,6	G	Eisen, Kalzium .	4307,9
E	Eisen	5269,6	g	Kalzium	4226,7
b_1	Magnesium	5183,6	h	Wasserstoff	4101,7
b_2	Magnesium	5172,7	H	Kalzium	3968,6
b_3	Eisen	5169,0	K	Kalzium	3933,6

40. Die Wellenlängen der Spektrallinien zu Legierungen verwendeter Element und des Eisens

(zur Aufgabe 81)

Bezeichnung der Elemente und Nr. der Gruppe	Nr. der Linie nach Tabelle 42	λ in Å der zu Legierungen verwendeten Elemente	Nr. der Linie nach Tabelle 42	λ in Å von Eisen
V-2	1	4379,24	4	4375,93
	2	4384,73		
	3	4395,24		
Ni-1	1	4714,41	4	4707,28
			3	4709,0
			2	4710,3
Mn-1	5	4739,0	6	4736,78
	4	4754,0	8	4789,0
	3	4762,37	7	5789,65
	2	4756,42		
	1	4783,43		
W-2	1	4843,0	8	4786,8
			7	4789,65

Fortsetzung der Tabelle

Bezeichnung der Elemente und Nr. der Gruppe	Nr. der Linie nach Tabelle 42	λ in Å der zu Legierungen verwendeten Elemente	Nr. der Linie nach Tabelle 42	λ in Å von Eisen
V-1	1	4875,48	4	4871,33
			3	4872,14
			2	4878,22
Cr-4	1	4922,3	2	4919,0
			3	4920,51
Ti-1	1	4999,5	4	4994,13
			2	5001,87
			3	5006,13
Ni-2	1	5035,36	2	5041,0
			3	5041,76
W-1	1	5053,3	4	5049,8
	2	5054,62	3	5051,64
Cr-1	1	5204,5	4	5198,7
		5206,0		
	2	5208,4	3	5202,3
Cr-3	1	5345,8	8	5324,2
	2	5348,3	7	5338,9
			6	5339,9
			5	5341,0
			4	5371,4
Cr-2	1	5409,8	4	5405,8
			3	5415,2
			2	5410,9
Mo	1	5533,0	4	5497,5
	2	5570,5	3	5501,5
			8	5569,6
			6	5572,8
			7	5576,1
Mn-2	3	6013,5	5	6020,2
	2	6016,2	4	6027,0
	1	6021,79		—
Si	1	6346,7	5	6301,5
	2	6370,9	4	6318
			3	6335,3

41. Intensitätsverhältnisse der Spektrallinien der zu bestimmenden Elemente

(zur Aufgabe 81)

Cr

Zusatz des Elementes in %	Nr. der Gruppe	Vergleichslinie
0,05	Cr -1	$1 = 4$
0,10	Cr -1	$1 \leqq 3$
0,20	Cr -1	$1 = 3$
0,30	Cr -3	$1 = 7$
0,70	Cr -3	$2 = 7$
1,0	Cr -2	$1 = 2$
	Cr -3	$1 = 6;\ 2 \geqq 7$
2,50	Cr -2	$1 = 3$
	Cr -3	$2 = 6$
4,0	Cr -2	$1 = 4$
	Cr -3	$1 = 8;\ 2 = 5$
4,50	Cr -3	$6 \leqq 1 \leqq 5;\ 2 > 7$
7,0	Cr -3	$1 > 8;\ 2 < 8$
10,0	Cr -3	$1 = 4;\ 2 = 8$
	Cr -4	$1 \leqq 2$
15,0	Cr -4	$1 = 2$
20,0	Cr -3	$1 > 4;\ 2 \leqq 4$
	Cr -4	$3 > 1 > 2$
30,0	Cr -3	$1 \gg 4;\ 2 > 4$
	Cr -4	$1 = 3$

Mn

Zusatz des Elementes in %	Nr. der Gruppe	Vergleichslinie
0,15	Mn -1	$1 = 8$
0,30	Mn -2	$2 = 4$
0,35	Mn -1	$1 \leqq 7$
0,50	Mn -1	$4 = 7$
0,70	Mn -1	$3 \geqq 7$
	Mn -2	$3 = 4$
1,00	Mn -1	$2 = 7$
1,3	Mn -1	$4 = 6$
	Mn -2	$1 = 5$
2,00	Mn -1	$3 = 6$
4,00	Mn -1	$5 = 7$
10,0	Mn -1	$5 \leqq 6$

Fortsetzung der Ta

Mo

Zusatz des Elementes in %	Vergleichslinie
0,10	1 = 3
0,20	1 = 4
0,40	2 = 7
0,80	2 = 8
1,50	2 = 6
	1 = 6
3,0	1 ≧ 5

Ni

Zusatz des Elementes in %	Nr. der Gruppe	Vergleichslinie
0,2	Ni -1	1 < 3
0,5	Ni -1	1 ≦ 3
1,5	Ni -1	1 = 2
3,0	Ni -1	4 > 1 ≧ 2
	Ni -2	1 = 2
5,0	Ni -1	1 = 4
9,0	Ni -2	1 = 3
15,0	Ni -2	1 = 4

W

Zusatz des Elementes in %	Nr. der Gruppe	Vergleichslinie
1,0	W-2	1 = 8
2,0	W-1	1 ≦ 3
2,5	W-2	1 = 7
3,0	W-2	1 = 3
5,0	W-1	1 ≦ 4
8,0	W-1	1 ≧ 4; 2 < 3
13,0	W-1	1 > 4; 2 = 3
18,0	W-1	1 ≫ 4; 2 ≧ 3

Fortsetzung der Tabelle 41

Ti	
Zusatz des Elementes in %	Vergleichslinie
0,10	$1 = 2$
0,30	$1 = 4$
0,80	$1 = 3$
1,5	$1 > 3$

V		
Zusatz des Elementes in %	Nr. der Gruppe	Vergleichslinie
0,15	V-2	$1 = 4$
0,30	V-2	$2 = 4$
0,50	V-2	$3 = 4$
0,80	V-1	$1 = 2$
1,50	V-1	$2 = 3$
2,50	V-2	$1 = 4$

Si	
Zusatz des Elementes in %	Vergleichslinie
0,50	$1 \ll 4$
1,0	$4 < 1 < 3$
2,50	$3 \leqq 1 < 5;\ 2 < 4$

Tabelle 42 befindet sich zwischen den Seiten 568 und 569.

Brechungsindex einiger Festkörper bei 18° C, verglichen mit Luft, und das optische Drehvermögen einer Quarzplatte von 1 mm Dicke

44. Brechungsindex einiger Flüssigkeiten

Bezeichnung	Formel	t°C	n_D
Anilin	$C_6H_5NH_2$	20	1,586
Äthylalkohol	C_2H_5OH	17,5	1,362
Azeton	CH_3COCH_3	20	1,359
Benzol	C_6H_6	20	1,501
Kanadabalsam	—	—	1,53
Methylalkohol	CH_3OH	18	1,330
Methylenjodid	CH_2J_2	19	1,742
α-Monobromnaphthalin	$C_{10}H_7Br$	20	1,65820
Nitrobenzol	$C_6H_5NO_2$	20	1,553
Salzsäure	HCl	10,5	1,254
Schwefelsäure	H_2SO_4	23	1,429
Schwefelwasserstoff	CS_2	15,7	1,631
Tetrachlorkohlenstoff	CCl_4	20	1,460
Wasser	H_2O	20	1,333
Xylol	$C_6H_4(CH_3)_2$	15,7	1,50

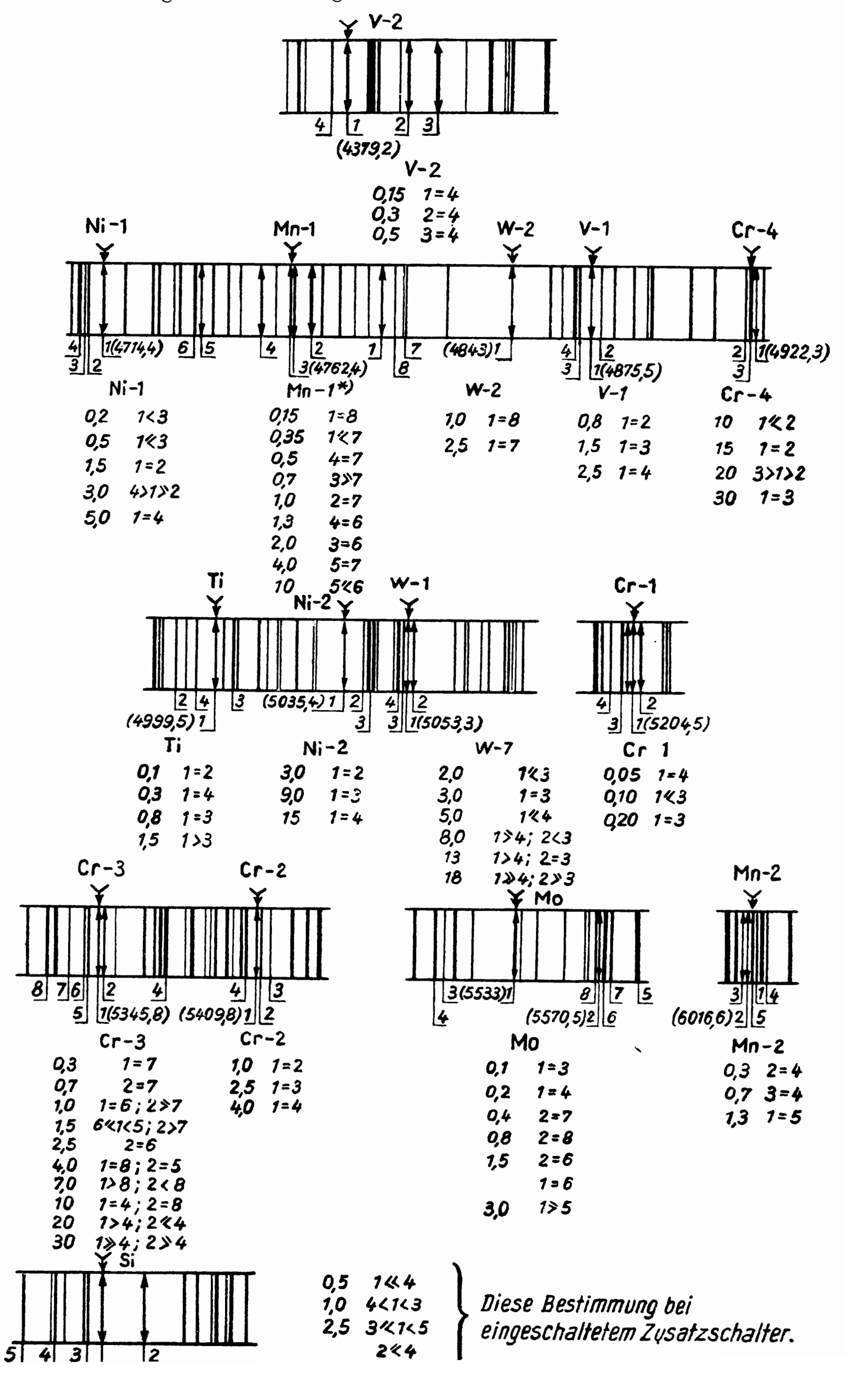
45. Interferenzfarben bei gekreuzten und parallelen Nicols

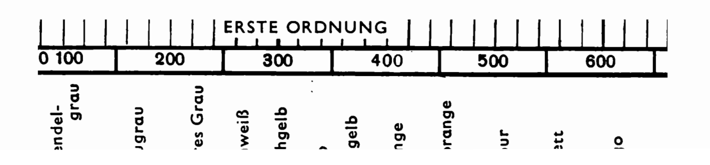
Dicke des Keils in mm	bei gekreuzten Nicols	bei parallelen Nicols	
0,15	Rot	Grün	3. Ordnung
0,14	Gelb	Gräulich-himmelblau	
0,13	Grün	Rot	
0,12	Blau	Gelb	
0,11	Purpur	Grün	
0,10	Rot	Himmelblau-grünlich	2. Ordnung
0,09	Orange	Blau	
0,08	Grün	Purpur	
0,07	Himmelblau	Goldgelb	
0,06	Blau	Gelb	
0,05	Purpur Rot	Grün	
0,04	Orange	Blau	1. Ordnung
0,03	Gelb	Himmelblau	
0,02	Grün	Graubraun	
0,01	Schwarz	Weiß	

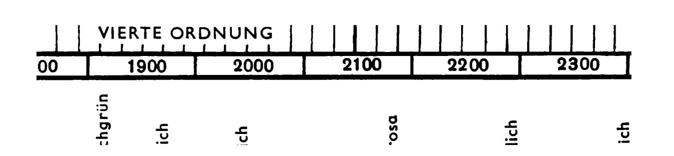
mit dem Styloskop am Wechselstrombogen mit konstanter scheibenförmiger Kupferelektrode (zur Aufgabe 81)

Bezeichnungen: ↕-Linien des zu bestimmenden Elementes; ∟-Vergleichslinien des Eisens; Y-Lage der Gruppe nach der Skala; *) wird verwendet zur Bestimmung des Mangans in schwach legierten Stählen, dabei darf von Cr nicht mehr als 3% enthalten sein, bei Cr > 3% überlagert sich die Cr-Linie der Fe-7 (siehe Gruppe Mn-2).

Die Reihenfolge der Bestimmung der Elemente: Mo, Cr, Ni, Mn, W, V, Ti, Si.




ERSTE ORDNUNG
0 100
200
300
400
500
600


VIERTE ORDNUNG
00
1900
2000
2100
2200
2300
chgrün
ich
ich
rosa
lich
ich

47. Dichte wäßriger Zuckerlösungen im Temperaturintervall von 0 bis 50° C

C%	Temperatur							
	0° C	10° C	15° C	20° C	25° C	30° C	40° C	50° C
0	0,99987	0,99973	0,99913	0,99823	0,99707	0,99567	0,99232	0,98813
1	1,00390	1,00365	1,00301	1,00212	1,00093	1,99952	0,99615	0,99197
2	1,00798	1,00760	1,00693	1,00602	1,00481	1,00340	1,00001	0,99575
3	1,01207	1,01157	1,01087	1,00993	1,00872	1,00731	1,00387	0,99958
4	1,01619	1,01557	1,01484	1,01388	1,01266	1,01124	1,00777	1,00340
5	1,02033	1,01960	1,01884	1,01785	1,01661	1,01518	1,01169	1,00735
6	1,02449	1,02366	1,02287	1,02186	1,02060	1,01916	1,01563	1,01127
7	1,02867	1,02774	1,02692	1,02588	1,02461	1,02316	0,01960	1,01521
8	1,03287	1,03185	1,03100	1,02994	1,02864	1,02717	1,02359	1,01918
9	1,03710	1,03599	1,03512	1,03403	1,03271	1,03122	1,02761	1,02198
10	1,04135	1,04016	1,03925	1,03814	1,03679	1,03530	1,03165	1,02319
11	1,04564	1,04437	1,04343	1,04229	1,04092	1,03940	1,03573	1,03126
12	1,04994	1,04859	1,04762	1,04646	1,04507	1,04353	1,03982	1,03533
13	1,05429	1,05286	1,05186	1,05066	1,04925	1,04770	1,05043	1,03943
14	1,05865	1,05714	1,05612	1,05490	1,05346	1,05189	1,04809	1,04356
15	1,06305	1,06146	1,06041	1,05917	1,05772	1,05612	1,05229	1,04772
16	1,06746	1,06581	1,06473	1,06346	1,06198	1,06035	1,05650	1,05191
17	1,07191	1,07020	1,06909	1,06779	1,06629	1,06464	1,06074	1,05614
18	1,07640	1,07461	0,07347	1,07215	1,07062	1,06896	1,06502	1,06038
19	1,08092	1,07906	1,07789	1,07654	1,07499	1,07329	1,06933	1,06467
20	1,08546	1,08353	1,08233	1,08096	1,07940	1,07767	1,07366	1,06898
22	1,09466	1,09260	1,09134	1,08990	1,08830	1,08652	1,08244	1,07771
24	1,10398	1,10178	1,10046	1,09897	1,09731	1,09550	1,09135	1,08657
26	1,11343	1,11110	1,10972	1,10818	1,10647	1,10461	1,10039	1,09557
28	1,12302	1,12056	1,11911	1,11751	1,11575	1,11386	1,10957	1,10470
30	1,13274	1,13014	1,12863	1,12698	1,12517	1,12324	1,11888	1,11398
32	1,14262	1,13988	1,13831	1,13660	1,13474	1,13276	1,12834	1,12340
34	1,15262	1,14975	1,14811	1,14634	1,14443	1,14241	1,13794	1,13295
36	1,16278	1,15976	1,15806	1,15624	1,15427	1,15221	1,14768	1,14265
38	1,17307	1,16990	1,16814	1,16627	1,16425	1,16214	1,15756	1,15249
40	1,18349	1,18020	1,17837	1,17645	1,17439	1,17214	1,16759	1,16248
42	1,19406	1,19063	1,18875	1,18677	1,18468	1,18248	1,17777	1,17215
44	1,20477	1,20121	1,19927	1,19725	1,19512	1,19287	1,18809	1,18290
46	1,21562	1,21194	1,20994	1,20787	1,20570	1,20341	1,19856	1,19334
48	1,22661	1,22281	1,22076	1,21864	1,21644	1,21411	1,20919	1,20392
50	1,23775	1,23382	1,23173	1,22957	1,22732	1,22495	1,21996	1,21465
55	1,26621	1,26203	1,25981	1,25753	1,25516	1,25271	1,24756	1,24211
60	1,29560	1,29117	1,28884	1,28646	1,28399	1,28144	1,27615	1,27058

48. Geometrische, mechanische und kalorische Einheiten

Bezeichnung der Größen und ihre Definition	Dimension der Einheiten im LMT-System	Dimension der Einheiten im CGS-System und die Bedeutung der Einheiten	Einige verwendete Einheiten, die das CGS-System nicht enthält, ihre Beziehung zu den Einheiten des CGS-Systems und ihre Bezeichnung	Abgekürzte Bezeichnungen
Länge L } Grundeinheiten	$[L]$	cm		
Masse M } Grundeinheiten	$[M]$	g		
Zeit T } Grundeinheiten	$[T]$	sec		
Fläche $S \sim L^2$	$[S] = L^2$	cm^2		
Volumen $V \sim L^3$	$[V] = L^3$	cm^3		
Winkel φ	Dimensionslos			
Dichte $\delta \sim \frac{M}{V}$	$[\delta] = L^{-3} M$	$cm^{-3} \cdot g$		
Spez. Gewicht	$[\varrho] = L^{-2} M T^{-2}$	$g \cdot cm^{-2} \cdot sec^{-2}$		
Konzentration $q \sim \frac{M}{V}$	$[q] = L^{-3} M$	$cm^{-3} \cdot g$		
Geschwindigkeit $v \sim \frac{L}{T}$	$[v] = L T^{-1}$	$cm \cdot sec^{-1}$		
Impuls $U \sim M v$	$[U] = L M T^{-1}$	$cm \cdot g \cdot sec^{-1}$		
Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} \sim \frac{\varphi}{T}$	$[\dot{\varphi}] = T^{-1}$	sec^{-1}		
Frequenz $\nu \sim \frac{1}{T}$	$[\nu] = T^{-1}$	sec^{-1}		
Beschleunigung $a \sim \frac{v}{T}$	$[a] = L T^{-2}$	$cm \cdot sec^{-2}$		
Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi} \sim \frac{\dot{\varphi}}{T}$	$[\ddot{\varphi}] = T^{-2}$	sec^{-2}		
Kraft $F \sim M \cdot a$	$[F] = L M T^{-2}$	$cm \cdot g \cdot sec^{-2}$ (dyn)	1 g (Gewicht) = 981 dyn = 1 p	dyn
Druck $P \sim \frac{F}{S}$	$[P] = L^{-1} M T^{-2}$	$cm^{-1} \cdot g \cdot sec^{-2}$ (bar)	1 atm = 1013200 dyn/cm^2	

Fortsetzung der Tabelle 4

Bezeichnung der Größen und ihre Definition	Dimension der Einheiten im LMT-System	Dimension der Einheiten im CGS-System und die Bedeutung der Einheiten	Einige verwendete Einheiten, die das CGS-System nicht enthält, ihre Beziehung zu den Einheiten des CGS-Systems und ihre Bezeichnung	Abgekürzte Bezeichnungen
Arbeit, Energie $W \sim F \cdot L \sim \frac{1}{2} M \cdot v^2$	$[W] = L^2 M T^{-2}$	$cm^2 g \cdot sec^{-1}$ (erg)	1 Joule $= 10^7$ erg 1 kpm $=$ 1 kp $\cdot$ 1 m $= 9{,}81 \cdot 10^7$ erg; 1 Elektronenvolt $= 1{,}60 \cdot 10^{-12}$ erg; 1 MeV $= 10^6$ eV	J, erg eV
Leistung $P \sim \frac{W}{T}$	$[P] = L^2 M T^{-3}$	$cm^2 \cdot g \cdot sec^{-3}$ (erg/sec)	1 Watt $=$ Joule/sec $= 10^7$ erg/sec	W
Drehimpuls oder Kraftmoment $\mu \sim F \cdot L$	$[\mu] = L^2 M T^{-2}$	$cm^2 \cdot g \cdot sec^{-2}$		
Trägheitsmoment $K \sim L^2 M$	$[K] = L^2 M$	$cm^2 \cdot g$		
Elastizitätsmodul $E \sim \frac{F}{S}$	$[E] = L^{-1} M T^{-2}$	$cm^{-1} \cdot g \cdot sec^{-2}$	1 kp/mm² $= 9{,}81 \cdot 10^7$ CGS	
Schubmodul $N \sim \frac{F}{S}$	$[N] = L^{-1} M T^{-2}$	$cm^{-1} \cdot g \cdot sec^{-2}$	1 kp/mm² $= 9{,}81 \cdot 10^7$ CGS	
Oberflächenspannung $\alpha \sim \frac{F}{L}$	$[\alpha] = M T^{-2}$	$g \cdot sec^{-2}$	1 mp/mm $= 9{,}81$ CGS	
Reibungskoeffizient $\eta \sim \frac{FL}{S \cdot v}$	$[\eta] = L^{-1} M T^{-1}$	$cm^{-1} \cdot g \cdot sec^{-1}$		
Diffusionskoeffizient $D \sim \frac{LM}{q \cdot ST}$	$[D] = L^2 T^{-1}$	$cm^2 \cdot sec^{-1}$		
Wärmemenge $Q \sim W$	$[Q] = L^2 M T^{-2}$	$cm^2 \cdot g \cdot sec^{-2}$ (erg)	1 Kalorie (Grammkalorie $= 4{,}19 \cdot 10^7$ erg $= 4{,}19$ Joule$=0{,}427$ kpm	kleine Kalorie-cal; große Kalorie-kcal

49. Wärmeeinheiten im LMTΘ-System

Benennung und Definition der Größen	Dimension der Einheit im LMTΘ-System	Dimension der Einheit im CGS-Grad-System	Einige verwendete Einheiten, die das CGS-Grad-System nicht enthält
Absolute Temperatur Θ (Grundeinheit)	Θ	Grad Celsius	
Spezifische Wärme $c \sim \frac{Q}{M\Theta}$	$L^2 T^{-2} \Theta^{-1}$	$cm^2 \cdot sec^{-2} \cdot grad$	cal/g · grad
Wärmekapazität $C \sim \frac{Q}{\Theta}$	$L^2 M T^{-2} \Theta^{-1}$	$cm^2 \cdot g \cdot sec^{-2} \cdot grad^{-1}$	cal/grad
Wärmeleitfähigkeit $\lambda \sim \frac{QL}{TS\Theta}$	$L M T^{-3} \Theta^{-1}$	$cm \cdot g \cdot sec^{-3} \cdot grad$	cal/cm · sec · grad
Linearer Ausdehnungskoeffizient $\alpha \sim \frac{\Delta L}{L\Theta}$	Θ^{-1}	$grad^{-1}$	

50. Die hauptsächlichsten photometrischen Einheiten

Benennung der Größen und ihre Definition	Benennung der Einheiten und ihre abgekürzte Bezeichnung	Definition der Einheiten
Lichtstärke J	Internationale Kerze cd (Candela)	Normal
Lichtstrom $\Phi = J \cdot \omega$	Lumen lm	Der Lichtstrom, der von einer punktförmigen Lichtquelle der Lichtstärke einer int. Kerze in die Raumwinkeleinheit ausgesendet wird
Beleuchtungsstärke $E = \frac{\Phi}{S} = \frac{J}{r^2}$	Phot, Lux lx	Die Beleuchtungsstärke, die auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius 1 m (1 cm) von einer homogenen im Mittelpunkt der Kugel stehenden Lichtquelle der Lichtstärke einer int. Kerze hervorgerufen wird
Leuchtdichte $B = \frac{J}{S \cdot \cos\varphi}$	Stilb sb	Das Verhältnis der Lichtstärke einer int. Kerze zur Projektion der Oberfläche von 1 cm² auf die Fläche senkrecht zur Beobachtungsrichtung

51. Die Dimensionen der elektromagnetischen Einheiten

Bezeichnung der Größen und ihre Definition	Dimension der Einheiten im LMT-System	Dimension der Einheiten im CGS-System und ihre Bezeichnung	Einige verwendete Einheiten, die im CGS-System nicht enthalten sind, ihre Beziehung zu den Einheiten des CGS-Systems und ihre Bezeichnung	Abgekürzte Bezeichnungen der Einheiten
Magnetische Polstärke $m \sim \sqrt{L^2 F}$	$[m] = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$cm^{\frac{3}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot sec^{-1}$		
Magnetisches Moment $\mathfrak{M} \sim m L$	$[\mathfrak{M}] = L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$cm^{\frac{5}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot sec^{-1}$		
Magnetische Feldstärke $H \sim \frac{F}{m}$	$[H] = L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$cm^{-\frac{1}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot sec^{-1}$ (Oersted)		Oe
Magnetische Induktion	$[B] = L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	(Gauss)		G
Induktionsfluß	$[\Phi] = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$cm^{\frac{3}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot sec^{-1}$ (Maxwell)	1 Weber = 10^8 M	M; Wb
		Elektrische Einheiten im elektrostatischen System		
Elektrizitätsmenge $e_e \sim \sqrt{L^2 F}$	$[e_e] = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$cm^{\frac{3}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot sec^{-1}$	1 Coulomb = $3 \cdot 10^9$ CGSE	Coulomb-C
Elektrische Oberflächendichte $\sigma_e \sim \frac{e}{S}$	$[\sigma_e] = L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$cm^{-\frac{1}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot sec^{-1}$		
Elektrische Spannung, Urspannung $V_e \sim \frac{e}{L}$	$[V_e] = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$cm^{\frac{1}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot sec^{-1}$	1 Volt = $\frac{1}{300}$ CGSE	V
Elektrische Feldstärke $E_e \sim \frac{F}{e_e}$	$[E_e] = L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$cm^{-\frac{1}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot sec^{-1}$		

Kapazität $C_e \sim \frac{e_e}{V_e}$	$[C_e] = L$	cm	1 Farad = $10^6\,\mu$F = $9 \cdot 10^{11}$ CGSE	F
Stromstärke $I_e \sim \frac{e_e}{T}$	$[I_e] = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$	$cm^{\frac{3}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot sec^2$	1 Ampere = C/sec = $3 \cdot 10^9$ CGSE	A
Widerstand $R_e \sim \frac{V_e}{i_e}$	$[R_e] = L^{-1} T$	$cm^{-1} \cdot sec$	1 Ohm = V/A = $\frac{1}{9}\, 10^{-11}$ CGSE	Ω
Spezifischer Widerstand $\varrho_e \sim R_e \frac{S}{L}$	$[\varrho_e] = T$	sec		

Elektrische Einheiten im elektromagnetischen System

Elektrizitätsmenge $e_m \sim I_m T$	$[e_m] = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$	$cm^{\frac{1}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot 10^{10}\,[e_e]$	1 C = 0,1 CGSM	
Elektrische Spannung, Urspannung $V_m \sim \frac{W}{e_m}$	$[V_m] = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$	$cm^{\frac{3}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot sec^{-2} = \frac{1}{3}\, 10^{-10}\,[V_e]$	1 Volt = 10^8 CGSM	
Kapazität $C_m \sim \frac{e_m}{V_m}$	$[C_m] = L^{-1} T^2$	$cm^{-1} \cdot sec^2 = 9 \cdot 10^{20}\,[C_e]$	1 Farad = 10^{-9} CGSM	
Stromstärke $I_m \sim \frac{F L}{m}$	$[I_m] = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$cm^{\frac{1}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot sec^{-1} = 3 \cdot 10^{10}\,[i_e]$	1 Ampere = 10^{-1} CGSM	
Widerstand $R_m \sim \frac{V_m}{I_m}$	$[R_m] = L T^{-1}$	$cm \cdot sec^{-1}$	1 Ohm = V/A = 10^9 CGSM	
Spezifischer Widerstand $\varrho_m \sim R_m \frac{S}{L}$	$[\varrho_m] = L^2 T^{-1}$	$cm^2 \cdot sec^{-1}$		
Induktions- und Selbstinduktionskoeffizient $L_m \sim L$	$[L_m] = L$	cm	1 Henry = 10^9 CGSM	H

52. Universelle physikalische Konstanten

1	Gravitationskonstante	$6{,}67_0\ 10^{-8}\ g^{-1} \cdot cm^3 \cdot sec^{-2}$
2	Schwerebeschleunigung am 45. Breitengrad in Meereshöhe	$980{,}616\ cm \cdot sec^{-2}$
3	1 Kilopondmeter	$0{,}980616 \cdot 10^8$ erg
4	Normale Atmosphäre	$1{,}033254\ kp \cdot cm^{-2}$
5	Volumen eines Grammoleküls eines idealen Gases unter Normalbedingungen	22,4146 l
6	Gaskonstante für ein Grammolekül	$8{,}31436 \cdot 10^7\ erg \cdot grad^{-1} \cdot mol^{-1}$
7	Die 1 cal bei 15° C äquivalente Energie	$4{,}185_5\ J \cdot cal^{-1}$
8	FARADAYkonstante	$96501{,}_2 \pm 10\ C \cdot (g - äqu.)^{-1}$
9	LOSCHMIDTsche Zahl	$(6{,}0228_3 \pm 0{,}0011) \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$
10	BOLTZMANNkonstante *k*	$(1{,}38047 \pm 0{,}00026) \cdot 10^{-16}\ erg \cdot grad^{-1}$
11	Masse eines Wasserstoffatoms H^1	$(1{,}67339_3 \pm 0{,}00031) \cdot 10^{-24}$ g
12	Masse eines Protons	$(1{,}67248_2 \pm 0{,}00031) \cdot 10^{-24}$ g
13	Masse eines Elektrons	$(9{,}1066_0 \pm 0{,}0032) \cdot 10^{-28}$ g
14	Ladung eines Elektrons	$(4{,}8025_1 \pm 0{,}0010) \cdot 10^{-10}$ CGSE $(1{,}60203_3 \pm 0{,}00034) \cdot 10^{-20}$ CGSM
15	Spezifische Ladung eines Elektrons $\frac{e}{m}$	$(1{,}7592 \pm 0{,}0005) \cdot 10^7\ CGSM \cdot g^{-1}$
16	Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum)	$(2{,}99776 + 0{,}00004) \cdot 10^{10}\ cm \cdot sec^{-1}$
17	PLANCKsche Konstante *h*	$6{,}55 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec$

I	II	III	IV	V
1 H Wasserstoff 1,0080				
3 Li Lithium 6,940	4 Be Beryllium 9,02	5 B Bor 10,82	6 C Kohlenstoff 12,010	7 N Stickstoff 14,008
11 Na Natrium 22,997	12 Mg Magnesium 24,32	13 Al Aluminium 26,97	14 Si Silizium 28,06	15 P Phosphor 30,98
19 K Kalium 39,096	20 Ca Kalzium 40,08	21 Sc Scandium 45,10	22 Ti Titan 47,90	23 V Vanadin 50,95
29 Cu Kupfer 63,57	30 Zn Zink 65,38	31 Ga Gallium 69,72	32 Ge Germanium 72,60	33 As Arsen 74,91
37 Rb Rubidium 85,48	38 Sr Strontium 87,63	39 Y Yttrium 88,92	40 Zr Zirkonium 91,22	41 Nb Niob 92,91
47 Ag Silber 107,880	48 Cd Kadmium 112,41	49 In Indium 114,76	50 Sn Zinn 118,70	51 Sb Antimon 121,76
55 Cs Cäsium 132,91	56 Ba Barium 137,36	57 La Lanthan 138,92	72 Hf Hafnium 178,6	73 Ta Tantal 180,88
79 Au Gold 197,2	80 Hg Quecksilber 200,61	81 Tl Thallium 204,39	82 Pb Blei 207,21	83 Bi Wismut 209,00
87 Fr Francium 223	88 Ra Radium 226,05	89 Ac Aktinium 227		

e nach D. I. MENDELEJEW

e der Elemente

VI	VII	VIII		
8 O Sauerstoff 16,0000	9 F Fluor 19,000			
16 S Schwefel 32,06	17 Cl Chlor 35,457			
24 Cr Chrom 52,01	25 Mn Mangan 54,93	26 Fe Eisen 55,85	27 Co Kobalt 58,94	28 Ni Nickel 58,69
34 Se Selen 71,96	35 Br Brom 79,916			
42 Mo Molybdän 95,95	43 Tc Technetium 99	44 Ru Ruthenium 101,7	45 Rh Rhodium 102,91	46 Pd Palladium 106,71
52 Te Tellur 127,61	53 J Jod 126,92			
74 W Wolfram 183,92	75 Re Rhenium 186,31	76 Os Osmium 190,2	77 Ir Iridium 193,1	78 Pt Platin 195,23
84 Po Polonium 210	85 At Astatin 210			

II. TABELLEN ZUR AUSWERTUNG

54. Die wichtigsten algebraischen und trigonometrischen Formeln

1. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

3. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

4. $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

5. $(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} a^2x^{m-2} + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} a^n x^{m-n} + \cdots + a^m$.

6. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

7. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

8. $\sin(\pi - x) = \sin x;\quad \cos(\pi - x) = -\cos x$.

9. $\sin(-x) = -\sin x;\quad \cos(-x) = \cos x$.

10. $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$.

11. $\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$.

12. $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$.

13. $\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$.

14. $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;\quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

15. $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y}$.

16. $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}};\quad \cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

17. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

18. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

19. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

20. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

21. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$.

22. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$.

55. Einige Formeln aus der analytischen Geometrie der Ebene

1. Gleichung einer Geraden, die durch den Koordinatenanfang geht:

$$y = kx.$$

2. Allgemeine Gleichung einer Geraden

$$ax + by + c = 0.$$

3. Gleichung eines Kreises mit dem Zentrum im Koordinatenanfang:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

4. Gleichung einer Parabel:

$$y^2 = 2px.$$

5. Gleichung einer Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

6. Gleichung der Tangente an eine Ellipse:

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1.$$

7. Gleichung der Normalen einer Ellipse:

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

8. Gleichung einer Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

56. Die wichtigsten Formeln aus der Differential- und Integralrechnung

1. $\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}.$

2. $\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$

3. $\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$

4. $\frac{d(x^m)}{dx} = m x^{m-1}.$

5. $\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a.$

6. $\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}.$

7. $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x; \quad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x.$

8. $\frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \frac{d\,\mathrm{ctg}\,x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

9. TAYLORsche Reihe

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \cdots +$$
$$+ \frac{(x-a)^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}(\varepsilon).$$

10. MAC LAURINsche Reihe:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) +$$
$$+ \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}(\vartheta x).$$

11. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

12. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

13. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

14. $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \cdots$

15. $\int (x+a)^m dx = \frac{1}{m+1} (x+a)^{m+1}.$

16. $\int \frac{1}{a+x} dx = \ln(a+x).$

17. $\int \sin x\, dx = -\cos x; \quad \int \cos x\, dx = \sin x.$

18. $\int e^x dx = e^x.$

57. Formeln der Näherungsrechnung

Wenn a, b, c und d klein gegen 1 sind und wenn α 2° nicht überschreitet und im Bogenmaß ausgedrückt ist, dann kann man in erster Näherung annehmen:

$$(1 \pm a)(1 \pm b)(1 \pm c) \cdots = 1 \pm a \pm b \pm c \pm \cdots \qquad \frac{(1 \pm a)(1 \pm b)}{(1 \pm c)(1 \pm d)} = 1 \pm a \pm b \mp c \mp d$$

$(1 \pm a)^2 = 1 \pm 2a$

$(1 \pm a)^n = 1 \pm na$

$\frac{1}{1 \pm a} = 1 \mp a$

$e^a = 1 + a$

$\sqrt{1 \pm a} = 1 \pm {}^1/_2 a$

$\frac{1}{\sqrt{1 \pm a}} = 1 \mp \frac{a}{2}$

$\ln_e(1 + a) = a - \frac{a^2}{2}$

$\sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a + b)$

$\frac{1}{(1+a)^n} = 1 \mp na$

$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \alpha$

$\cos\alpha = 1$

$\sin(\vartheta \pm \alpha) = \sin\vartheta \pm \alpha\cos\vartheta$

$\cos(\vartheta \pm \alpha) = \cos\vartheta \mp \alpha\sin\vartheta$

58. Volumen und Trägheitsmomente

Körper	Achse	Volumen	Trägheitsmoment
Kugel vom Radius r	Durchmesser	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$M\frac{2}{5}r^2$
Ellipsoid mit den Achsen 2a, 2b, 2c	Achse 2a	$\frac{4}{3}\pi abc$	$M\frac{b^2+c^2}{5}$
Sphärische Schicht, äußerer Radius r, innerer Radius r_1	Durchmesser	$\frac{4}{3}\pi(r^3-r_1^3)$	$M\frac{2}{5}\cdot\frac{r^5-r_1^5}{r^3-r_1^3}$
Kreiszylinder der Länge 2a, Radius r	Achse 2a	$2\pi ar^2$	$M\frac{r^2}{2}$
Ebenfalls	senkrecht zur Achse durch das Zentrum	$2\pi ar^2$	$M\left(\frac{r^2}{4}+\frac{a^2}{3}\right)$
Hohlzylinder, Länge 2a, äußerer Radius r, innerer Radius r_1	Achse 2a	$2\pi a(r^2-r_1^2)$	$M\left(\frac{r^2+r_1^2}{2}\right)$
Ebenfalls	senkrecht zur Achse durch das Zentrum	$2\pi a(r^2-r_1^2)$	$M\left(\frac{r^2+r_1^2}{4}+\frac{a^2}{3}\right)$
Rechtwinkliges Parallelepiped 2a, 2b, 2c	Achse 2a	$8abc$	$M\frac{b^2+c^2}{3}$
Rhombisches Prisma, Länge 2a, Diagonalen 2b, 2c	Achse 2a	$4abc$	$M\frac{b^2+c^2}{6}$
Ebenfalls	parallel zur Diagonalen 2b, durch das Zentrum	$4abc$	$M\left(\frac{a^2}{3}+\frac{c^2}{6}\right)$

In allen diesen Fällen gehen die Achsen durch den Schwerpunkt. M bezeichnet die asse des Körpers. Um das Trägheitsmoment um irgendeine Achse zu erhalten, die parallel ı einer der angegebenen Achsen verläuft, jedoch nicht durch das Zentrum geht, muß ıan zum angegebenen Trägheitsmoment noch eine Größe hinzufügen, die gleich dem rodukt aus der Masse des Körpers und dem Quadrat des Abstandes zwischen den

59. Einige Zahlenkonstanten und ihre Logarithmen

Zahlen	Logarithmen	Zahlen	Logarithmen
[1] $\pi = 3,14159$	0,49715	[2] $\frac{1}{\pi} = 0,31831$	$\bar{1},50285$
$2\pi = 6,28319$	0,79818		
$\frac{\pi}{4} = 0,78540$	$\bar{1},89509$	$\frac{1}{2\pi} = 0,15915$	$\bar{1},20182$
$\frac{\pi}{6} = 0,52360$	$\bar{1},71900$	$\frac{4}{\pi} = 1,27324$	0,10491
$\frac{4\pi}{3} = 4,18879$	0,62209	$\frac{6}{\pi} = 1,90986$	0,28100
$\frac{\pi}{360} = 0,00873$	$\bar{3},94085$	$\frac{3}{4\pi} = 0,23873$	$\bar{1},37791$
$\pi^2 = 9,86960$	0,99430	$\frac{360}{\pi} = 114,59156$	2,05915
$\sqrt{\pi} = 1,77245$	0,24857		
$\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = 0,80600$	$\bar{1},90633$	$\frac{1}{\pi^2} = 0,10132$	$\bar{1},00570$
$\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} = 1,61199$	0,20736	$\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0,56419$	$\bar{1},75143$
Umfang = 360°	2,55630	$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} = 1,24070$	0,09367
= 21600′	4,33445	$\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = 0,62035$	$\bar{1},79264$
= 1296000″	6,11261		
[3] $e = 2,71828$	0,43429	Bogenmaß = 57° 17′ 44″, 806	
		= 57°, 29578	1,75812
		= 3437′,747	3,53627
		= 206264″, 8	5,31443
		$M = \lg e = 0,43429$	$\bar{1},63778$

[1] $\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ldots$

[2] $\frac{1}{\pi} = 0,31830\ 98861\ 83790\ 67153\ldots$

[3] Basis des natürlichen Logarithmus $e = 2,71828\ 18284\ldots$

60. Natürlicher Sinus

Grad	0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	Mittlere Differenz 1	2	3	4	5
0	·0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	·0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	·0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	3	6	9	12	15
3	·0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	3	6	9	12	15
4	·0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	3	6	9	12	15
5	·0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	3	6	9	12	14
6	·1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	3	6	9	12	14
7	·1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	3	6	9	12	14
8	·1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	3	6	9	12	14
9	·1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	3	6	9	12	14
10	·1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	3	6	9	12	14
11	·1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	3	6	9	11	14
12	·2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2232	3	6	9	11	14
13	·2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	3	6	8	11	14
14	·2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	3	6	8	11	14
15	·2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	3	6	8	11	14
16	·2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	3	6	8	11	14
17	·2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3	6	8	11	14
18	·3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3	6	8	11	14
19	·3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3	5	8	11	14
20	·3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3	5	8	11	14
21	·3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3	5	8	11	14
22	·3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3	5	8	11	14
23	·3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	3	5	8	11	14
24	·4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	3	5	8	11	13
25	·4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	3	5	8	11	13
26	·4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	3	5	8	10	13
27	·4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	3	5	8	10	13
28	·4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	3	5	8	10	13
29	·4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	3	5	8	10	13
30	·5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	3	5	8	10	13
31	·5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	2	5	7	10	12
32	·5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	2	5	7	10	12
33	·5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	2	5	7	10	12
34	·5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	2	5	7	10	12
35	·5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	2	5	7	10	12
36	·5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	2	5	7	9	12
37	·6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	2	5	7	9	12
38	·6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	2	5	7	9	11
39	·6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	2	4	7	9	11
40	·6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	2	4	7	9	11
41	·6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	2	4	7	9	11
42	·6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	2	4	6	9	11
43	·6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	2	4	6	8	11
44	·6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	2	4	6	8	10

Fortsetzung der Tabelle 60

Grad	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mittlere Differenz				
	0°·0	0°·1	0°·2	0°·3	0°·4	0°·5	0°·6	0°·7	0°·8	0°·9	1	2	3	4	5
45	·7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	2	4	6	8	10
46	·7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	2	4	6	8	10
47	·7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	2	4	6	8	10
48	·7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	2	4	6	8	10
49	·7547	7558	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7749	2	4	6	8	9
50	·7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	2	4	6	7	9
51	·7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	2	4	5	7	9
52	·7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	2	4	5	7	9
53	·7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	2	3	5	7	9
54	·8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	2	3	5	7	8
55	·8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	2	3	5	7	8
56	·8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	2	3	5	6	8
57	·8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	2	3	5	6	8
58	·8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	2	3	5	6	8
59	·8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	1	3	4	6	7
60	·8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	1	3	4	6	7
61	·8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	1	3	4	6	7
62	·8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	1	3	4	5	7
63	·8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	1	3	4	5	6
64	·8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	1	3	4	5	6
65	·9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	1	2	4	5	6
66	·9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	1	2	3	5	6
67	·9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	1	2	3	4	6
68	·9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	1	2	3	4	5
69	·9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	1	2	3	4	5
70	·9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	1	2	3	4	5
71	·9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	1	2	3	4	5
72	·9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	1	2	3	3	4
73	·9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	1	2	2	3	4
74	·9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	1	2	2	3	4
75	·9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	1	1	2	3	4
76	·9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	1	1	2	3	3
77	·9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	1	1	2	3	3
78	·9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	1	1	2	2	3
79	·9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	1	1	2	2	3
80	·9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	0	1	1	2	2
81	·9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	0	1	1	2	2
82	·9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	0	1	1	2	2
83	·9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	0	1	1	1	2
84	·9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	0	1	1	1	2
85	·9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	0	0	1	1	1
86	·9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	0	0	1	1	1
87	·9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	0	0	0	1	1
88	·9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0	0	0	0	0
89	·9998	9999	9999	9999	9999	1000	1000	1000	1000	1000	0	0	0	0	0
90	1000														

61. Natürlicher Kosinus

Grad	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mittlere Differenz				
	0°·0	0°·1	0°·2	0°·3	0°·4	0°·5	0°·6	0°·7	0°·8	0°·9	1	2	3	4	5
0	1000	1000	1000	1000	1000	1000	9999	9999	9999	9999	0	0	0	0	0
1	·9998	9998	9998	9997	9997	9997	9996	9996	9995	9995	0	0	0	0	0
2	·9994	9993	9993	9992	9991	9990	9990	9989	9988	9987	0	0	0	1	1
3	·9986	9985	9984	9983	9982	9981	9980	9979	9978	9977	0	0	1	1	1
4	·9976	9974	9973	9972	9971	9969	9968	9966	9965	9963	0	0	1	1	1
5	·9962	9960	9959	9957	9956	9954	9952	9951	9949	9947	0	1	1	1	2
6	·9945	9943	9942	9940	9938	9936	9934	9932	9930	9928	0	1	1	1	2
7	·9925	9923	9921	9919	9917	9914	9912	9910	9907	9905	0	1	1	2	2
8	·9903	9900	9898	9895	9893	9890	9888	9885	9882	9880	0	1	1	2	2
9	·9877	9874	9871	9869	9866	9863	9860	9857	9854	9851	0	1	1	2	2
10	·9848	9845	9842	9839	9836	9833	9829	9826	9823	9820	1	1	2	2	3
11	·9816	9813	9810	9806	9803	9799	9796	9792	9789	9785	1	1	2	2	3
12	·9781	9778	9774	9770	9767	9763	9759	9755	9751	9748	1	1	2	3	3
13	·9744	9740	9736	9732	9728	9724	9720	9715	9711	9707	1	1	2	3	3
14	·9703	9699	9694	9690	9686	9681	9677	9673	9668	9664	1	1	2	3	4
15	·9659	9655	9650	9646	9641	9636	9632	9627	9622	9617	1	2	2	3	4
16	·9613	9608	9603	9598	9593	9588	9583	9578	9573	9568	1	2	2	3	4
17	·9563	9558	9553	9548	9542	9537	9532	9527	9521	9516	1	2	3	3	4
18	·9511	9505	9500	9494	9489	9483	9478	9472	9466	9461	1	2	3	4	5
19	·9455	9449	9444	9438	9432	9426	9421	9415	9409	9403	1	2	3	4	5
20	·9397	9391	9385	9379	9373	9367	9361	9354	9348	9342	1	2	3	4	5
21	·9336	9330	9323	9317	9311	9304	9298	9291	9285	9278	1	2	3	4	5
22	·9272	9265	9259	9252	9245	9239	9232	9225	9219	9212	1	2	3	4	6
23	·9205	9198	9191	9184	9178	9171	9164	9157	9150	9143	1	2	3	5	6
24	·9135	9128	9121	9114	9107	9100	9092	9085	9078	9070	1	2	4	5	6
25	·9063	9056	9048	9041	9033	9026	9018	9011	9003	8996	1	3	4	5	6
26	·8988	8980	8973	8965	8957	8949	8942	8934	8926	8918	1	3	4	5	6
27	·8910	8902	8894	8886	8878	8870	8862	8854	8846	8838	1	3	4	5	7
28	·8829	8821	8813	8805	8796	8788	8780	8771	8763	8755	1	3	4	6	7
29	·8746	8738	8729	8721	8712	8704	8695	8686	8678	8669	1	3	4	6	7
30	·8660	8652	8643	8634	8625	8616	8607	8599	8590	8581	1	3	4	6	7
31	·8572	8563	8554	8545	8536	8526	8517	8508	8499	8490	2	3	5	6	8
32	·8480	8471	8462	8453	8443	8434	8425	8415	8406	8396	2	3	5	6	8
33	·8387	8377	8368	8358	8348	8339	8329	8320	8310	8300	2	3	5	6	8
34	·8290	8281	8271	8261	8251	8241	8231	8221	8211	8202	2	3	5	7	8
35	·8192	8181	8171	8161	8151	8141	8131	8121	8111	8100	2	3	5	7	8
36	·8090	8080	8070	8059	8049	8039	8028	8018	8007	7997	2	3	5	7	9
37	·7986	7976	7965	7955	7944	7934	7923	7912	7902	7891	2	4	5	7	9
38	·7880	7869	7869	7848	7837	7826	7815	7804	7793	7782	2	4	5	7	9
39	·7771	7760	7749	7738	7727	7716	7705	7694	7683	7672	2	4	6	7	9
40	·7660	7649	7638	7627	7615	7604	7593	7581	7570	7559	2	4	6	8	9
41	·7547	7536	7524	7513	7501	7490	7478	7466	7455	7443	2	4	6	8	10
42	·7431	7420	7408	7396	7385	7373	7361	7349	7337	7325	2	4	6	8	10
43	·7314	7302	7290	7278	7266	7254	7242	7230	7218	7206	2	4	6	8	10
44	·7193	7181	7169	7157	7145	7133	7120	7108	7096	7083	2	4	6	8	10

Fortsetzung der Tabelle 61

Grad	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mittlere Differenz				
	0°·0	0°·1	0°·2	0°·3	0°·4	0°·5	0°·6	0°·7	0°·8	0°·9	1	2	3	4	5
45	·7071	7059	7046	7034	7022	7009	6997	6984	6972	6959	2	4	6	8	10
46	·6947	6934	6921	6909	6896	6884	6871	6858	6845	6833	2	4	6	8	11
47	·6820	6807	6794	6782	6769	6756	6743	6730	6717	6704	2	4	6	9	11
48	·6691	6678	6665	6652	6639	6626	6613	6600	6587	6574	2	4	7	9	11
49	·6561	6547	6534	6521	6508	6494	6481	6468	6455	6441	2	4	7	9	11
50	·6428	6414	6401	6388	6374	6361	6347	6334	6320	6307	2	4	7	9	11
51	·6293	6280	6266	6252	6239	6225	6211	6198	6184	6170	2	5	7	9	11
52	·6157	6143	6129	6115	6101	6088	6074	6060	6046	6032	2	5	7	9	12
53	·6018	6004	5990	5976	5962	5948	5934	5920	5906	5892	2	5	7	9	12
54	·5878	5864	5850	5835	5821	5807	5793	5779	5764	5750	2	5	7	9	12
55	·5736	5721	5707	5693	5678	5664	5650	5635	5621	5606	2	5	7	10	12
56	·5592	5577	5563	5548	5534	5519	5505	5490	5476	5461	2	5	7	10	12
57	·5446	5432	5417	5402	5388	5373	5358	5344	5329	5314	2	5	7	10	12
58	·5299	5284	5270	5255	5240	5225	5210	5195	5180	5165	2	5	7	10	12
59	·5150	5135	5120	5105	5090	5075	5060	5045	5030	5015	3	5	8	10	13
60	·5000	4985	4970	4955	4939	4924	4909	4894	4879	4863	3	5	8	10	13
61	·4848	4833	4818	4802	4787	4772	4756	4741	4726	4710	3	5	8	10	13
62	·4695	4679	4664	4648	4633	4617	4602	4586	4571	4555	3	5	8	10	13
63	·4540	4524	4509	4493	4478	4462	4446	4431	4415	4399	3	5	8	10	13
64	·4384	4368	4352	4337	4321	4305	4289	4274	4258	4242	3	5	8	11	13
65	·4226	4210	4195	4179	4163	4147	4131	4115	4099	4083	3	5	8	11	13
66	·4067	4051	4035	4019	4003	3987	3971	3955	3939	3923	3	5	8	11	14
67	·3907	3891	3875	3859	3843	3827	3811	3795	3778	3762	3	5	8	11	14
68	·3746	3730	3714	3697	3681	3665	3649	3633	3616	3600	3	5	8	11	14
69	·3584	3567	3551	3535	3518	3502	3486	3469	3453	3437	3	5	8	11	14
70	·3420	3404	3387	3371	3355	3338	3322	3305	3289	3272	3	5	8	11	14
71	·3256	3239	3223	3206	3190	3173	3156	3140	3123	3107	3	6	8	11	14
72	·3090	3074	3057	3040	3024	3007	2990	2974	2957	2940	3	6	8	11	14
73	·2924	2907	2890	2874	2857	2840	2823	2807	2790	2773	3	6	8	11	14
74	·2756	2740	2723	2706	2689	2672	2656	2639	2622	2605	3	6	8	11	14
75	·2588	2571	2554	2538	2521	2504	2487	2470	2453	2436	3	6	8	11	14
76	·2419	2402	2385	2368	2351	2334	2317	2300	2284	2267	3	6	8	11	14
77	·2250	2233	2215	2198	2181	2164	2147	2130	2113	2096	3	6	9	11	14
78	·2079	2062	2045	2028	2011	1994	1977	1959	1942	1925	3	6	9	11	14
79	·1908	1891	1874	1857	1840	1822	1805	1788	1771	1754	3	6	9	11	14
80	·1736	1719	1702	1685	1668	1650	1633	1616	1599	1582	3	6	9	12	14
81	·1564	1547	1530	1513	1495	1478	1461	1444	1426	1409	3	6	9	12	14
82	·1392	1374	1357	1340	1323	1305	1288	1271	1253	1236	3	6	9	12	14
83	·1219	1201	1184	1167	1149	1132	1115	1097	1080	1063	3	6	9	12	14
84	·1045	1028	1011	0993	0976	0958	0941	0924	0906	0889	3	6	9	12	14
85	·0872	0854	0837	0819	0802	0785	0767	0750	0732	0715	3	6	9	12	14
86	·0698	0680	0663	0645	0628	0610	0593	0576	0558	0541	3	6	9	12	15
87	·0523	0506	0488	0471	0454	0436	0419	0401	0384	0366	3	6	9	12	15
88	·0349	0332	0314	0297	0279	0262	0244	0227	0209	0192	3	6	9	12	15
89	·0175	0157	0140	0122	0105	0087	0070	0052	0035	0017	3	6	9	12	15
90	·0000														

62. Natürlicher Tangens

Grad	0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	Mittlere Differenz 1	2	3	4	5
0	·0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	·0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	·0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	3	6	9	12	15
3	·0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	3	6	9	12	15
4	·0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	3	6	9	12	15
5	·0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	3	6	9	12	15
6	·1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	3	6	9	12	15
7	·1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	3	6	9	12	15
8	·1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	3	6	9	12	15
9	·1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	3	6	9	12	15
10	·1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	3	6	9	12	15
11	·1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	3	6	9	12	15
12	·2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	3	6	9	12	15
13	·2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	3	6	9	12	15
14	·2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	3	6	9	12	16
15	·2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	3	6	9	13	16
16	·2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3	6	9	13	16
17	·3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3	6	10	13	16
18	·3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3	6	10	13	16
19	·3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3	7	10	13	16
20	·3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3	7	10	13	17
21	·3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	3	7	10	13	17
22	·4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	3	7	10	14	17
23	·4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	3	7	10	14	17
24	·4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4	7	11	14	18
25	·4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4	7	11	14	18
26	·4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	4	7	11	15	18
27	·5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	4	7	11	15	18
28	·5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	4	8	11	15	19
29	·5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	4	8	12	15	19
30	·5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	4	8	12	16	20
31	·6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	4	8	12	16	20
32	·6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	4	8	12	16	20
33	·6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	4	8	13	17	21
34	·6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	4	9	13	17	21
35	·7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	4	9	13	18	22
36	·7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	5	9	14	18	23
37	·7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	5	9	14	18	23
38	·7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	5	9	14	19	24
39	·8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	5	10	15	20	24
40	·8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	5	10	15	20	25
41	·8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	5	10	16	21	26
42	·9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	5	11	16	21	27
43	·9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	6	11	17	22	28
44	·9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	6	11	17	23	29

Fortsetzung der Tabelle 6

0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	Mittlere Differenz 1	2	3	4	5
1.0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	6	12	18	24	30
1.0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	6	12	18	25	31
1.0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	6	13	19	25	32
1.1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	7	13	20	27	33
1.1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	7	14	21	28	34
1.1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	7	14	22	29	36
1.2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	8	15	23	30	38
1.2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	8	16	24	31	39
1.3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	8	16	25	33	41
1.3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	9	17	26	34	43
1.4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	9	18	27	36	45
1.4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	10	19	29	38	48
1.5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	10	20	30	40	50
1.6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6557	11	21	32	43	53
1.6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	11	23	34	45	56
1.7321	8391	7461	7532	7603	7675	7747	7820	7893	7966	12	24	36	48	60
1.8040	7115	8190	8265	8341	8418	8495	8572	8650	8728	13	26	38	51	64
1.8807	8887	8967	9047	9128	9210	9292	9375	9458	9542	14	27	41	55	68
1.9626	9711	9797	9883	9970	2.0057	2.0145	2.0233	2.0323	2.0413	15	29	44	58	73
2.0503	0594	0686	0778	0872	0965	1060	1155	1251	1348	16	31	47	63	78
2.1445	1543	1642	1742	1842	1943	2045	2148	2251	2355	17	34	51	68	85
2.2460	2566	2673	2781	2889	2998	3109	3220	3332	3445	18	37	55	73	92
2.3559	3673	3789	3906	4023	4142	4262	4383	4504	4627	20	40	60	79	99
2.4751	4876	5002	5129	5257	5386	5517	5649	5782	5916	22	43	65	87	108
2.6051	6187	6325	6464	6605	6746	6889	7034	7179	7326	24	47	71	95	119
2.7475	7625	7776	7929	8083	8239	8397	8556	8716	8878	26	52	78	104	131
2.9042	9208	9375	9544	9714	9887	3.0061	3.0237	3.0415	3.0595	29	58	87	116	145
3.0777	0961	1146	1334	1524	1716	1910	2106	2305	2506	32	64	96	129	161
3.2709	2914	3122	3332	3544	3759	3977	4197	4420	4646	36	72	108	144	180
3.4874	5105	5339	5576	5816	6059	6305	6554	6806	7062	41	81	122	163	204
3.7321	7583	7848	8118	8391	8667	8947	9232	9520	9812	46	93	139	186	232
4.0108	0408	0713	1022	1335	1653	1976	2303	2635	2972	53	107	160	213	267
4.3315	3662	4015	4374	4737	5107	5483	5864	6252	6646	Da die Differenz sich stark ändert, darf man die mittleren Differenzen nicht benutzen				
4.7046	7453	7867	8288	8716	9152	9594	5.0045	5.0504	5.0970					
5.1446	1929	2422	2924	3435	3955	4486	5026	5578	6140					
5.6713	7297	7894	8502	9124	9758	6.0405	6.1066	6.1742	6.2432					
6.3134	3859	4596	5350	6122	6912	7720	8548	9395	7.0264					
7.1154	2066	3002	3962	4947	5958	6996	8062	9158	8.0285					
8.1443	2636	3863	5126	6427	7769	9152	9.0579	9.2052	9.3572					
9.5144	9.677	9.845	10.02	10.20	10.39	10.58	10.78	10.99	11.20					

63. Umrechnung von Grad in Bogenmaß

Grad	0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	Mittlere Differenz 1	2	3	4	5
0	·0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	·0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	·0349	0367	0484	0401	0419	0436	0454	0471	0489	0506	3	6	9	12	15
3	·0524	0541	0559	0576	0593	0611	0628	0646	0663	0681	3	6	9	12	15
4	·0698	0716	0733	0750	0768	0785	0803	0820	0838	0855	3	6	9	12	15
5	·0873	0890	0908	0925	0942	0960	0977	0995	1012	1030	3	6	9	12	15
6	·1047	1065	1082	1100	1117	1134	1152	1169	1187	1204	3	6	9	12	15
7	·1222	1239	1257	1274	1292	1309	1326	1344	1361	1379	3	6	9	12	15
8	·1396	1414	1431	1449	1466	1484	1501	1518	1536	1553	3	6	9	12	15
9	·1571	1588	1606	1623	1641	1658	1676	1693	1710	1728	3	6	9	12	15
10	·1745	1763	1780	1798	1815	1833	1850	1868	1885	1902	3	6	9	12	15
11	·1920	1937	1955	1972	1990	2007	2025	2042	2060	2077	3	6	9	12	15
12	·2094	2112	2129	2147	2164	2182	2199	2217	2234	2251	3	6	9	12	15
13	·2269	2286	2304	2321	2339	2356	2374	2391	2409	2426	3	6	9	12	15
14	·2443	2461	2478	2496	2513	2531	2548	2566	2583	2601	3	6	9	12	15
15	·2618	2635	2653	2670	2688	2705	2723	2740	2758	2775	3	6	9	12	15
16	·2793	2810	2827	2845	2862	2880	2897	2915	2932	2950	3	6	9	12	15
17	·2967	2985	3002	3019	3037	3054	3072	3089	3107	3124	3	6	9	12	15
18	·3142	3159	3176	3194	3211	3229	3246	3264	3281	3299	3	6	9	12	15
19	·3316	3334	3351	3368	3386	3403	3421	3438	3456	3473	3	6	9	12	15
20	·3491	3508	3526	3543	3560	3578	3595	3613	3630	3648	3	6	9	12	15
21	·3665	3683	3700	3718	3735	3752	3770	3787	3805	3822	3	6	9	12	15
22	·3840	3857	3875	3892	3910	3927	3944	3962	3979	3997	3	6	9	12	15
23	·4014	4032	4049	4067	4084	4102	4119	4136	4154	4171	3	6	9	12	15
24	·4189	4206	4224	4241	4259	4276	4294	4311	4328	4346	3	6	9	12	15
25	·4363	4381	4398	4416	4433	4451	4468	4485	4503	4520	3	6	9	12	15
26	·4538	4555	4573	4590	4608	4625	4643	4660	4677	4695	3	6	9	12	15
27	·4712	4730	4747	4765	4782	4800	4817	4835	4852	4869	3	6	9	12	15
28	·4887	4904	4922	4939	4957	4974	4992	5009	5027	5044	3	6	9	12	15
29	·5061	5079	5096	5114	5131	5149	5166	5184	5201	5219	3	6	9	12	15
30	·5236	5253	5271	5288	5306	5323	5341	5358	5376	5393	3	6	9	12	15
31	·5411	5428	5445	5463	5480	5498	5515	5533	5550	5568	3	6	9	12	15
32	·5585	5603	5620	5637	5655	5672	5690	5707	5725	5742	3	6	9	12	15
33	·5760	5777	5794	5812	5829	5847	5864	5882	5899	5917	3	6	9	12	15
34	·5934	5952	5969	5986	6004	6021	6039	6056	6074	6091	3	6	9	12	15
35	·6109	6126	6144	6161	6178	6196	6213	6231	6248	6266	3	6	9	12	15
36	·6283	6301	6318	6336	6353	6370	6388	6405	6423	6440	3	6	9	12	15
37	·6458	6475	6493	6510	6528	6545	6562	6580	6597	6615	3	6	9	12	15
38	·6632	6650	6667	6685	6702	6720	6737	6754	6772	6789	3	6	9	12	15
39	·6807	6824	6842	6859	6877	6894	6912	6929	6946	6964	3	6	9	12	15
40	·6981	6999	7016	7034	7051	7069	7086	7103	7121	7138	3	6	9	12	15
41	·7156	7173	7191	7208	7226	7243	7261	7278	7295	7313	3	6	9	12	15
42	·7330	7348	7365	7383	7400	7418	7435	7453	7470	7487	3	6	9	12	15
43	·7505	7522	7540	7557	7575	7592	7610	7627	7645	7662	3	6	9	12	15
44	·7679	7697	7714	7732	7749	7767	7784	7802	7819	7837	3	6	9	12	15

Fortsetzung der Tabelle 63

Grad	0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	Mittlere Differenz 1	2	3	4	5
45	·7854	7871	7889	7906	7924	7941	7959	7976	7994	8011	3	6	9	12	15
46	·8029	8046	8063	8081	8098	8116	8133	8151	8168	8186	3	6	9	12	15
47	·8203	8221	8238	8255	8273	8290	8308	8325	8343	8360	3	6	9	12	15
48	·8378	8395	8412	8430	8447	8465	8482	8500	8517	8535	3	6	9	12	15
49	·8552	8570	8587	8604	8622	8639	8657	8674	8692	8709	3	6	9	12	15
50	·8727	8744	8762	8779	8796	8814	8831	8849	8866	8884	3	6	9	12	15
51	·8901	8919	8936	8954	8971	8988	9006	9023	9041	9058	3	6	9	12	15
52	·9076	9093	9111	9128	9146	9163	9180	9198	9215	9233	3	6	9	12	15
53	·9250	9268	9285	9303	9320	9338	9355	9372	9390	9407	3	6	9	12	15
54	·9425	9442	9460	9477	9495	9512	9529	9547	9564	9582	3	6	9	12	15
55	·9599	9617	9634	9652	9669	9687	9704	9721	9739	9756	3	6	9	12	15
56	·9774	9791	9809	9826	9844	9861	9879	9896	9913	9931	3	6	9	12	15
57	·9948	9966	9983	1.0001	1.0018	1.0036	1.0053	1.0071	1.0088	1.0105	3	6	9	12	15
58	1.0123	0140	0158	0175	0193	0210	0228	0245	0263	0280	3	6	9	12	15
59	1.0297	0315	0332	0350	0367	0385	0402	0420	0437	0455	3	6	9	12	15
60	1.0472	0489	0507	0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	3	6	9	12	15
61	1.0647	0664	0681	0699	0716	0734	0751	0769	0786	0804	3	6	9	12	15
62	1.0821	0838	0856	0873	0891	0908	0926	0943	0961	0978	3	6	9	12	15
63	1.0996	1013	1030	1048	1065	1083	1100	1118	1135	1153	3	6	9	12	15
64	1.1170	1188	1205	1222	1240	1257	1275	1292	1310	1327	3	6	9	12	15
65	1.1345	1362	1380	1397	1414	1432	1449	1467	1484	1502	3	6	9	12	15
66	1.1519	1537	1554	1572	1589	1606	1624	1641	1659	1676	3	6	9	12	15
67	1.1694	1711	1729	1746	1764	1781	1798	1816	1833	1851	3	6	9	12	15
68	1.1868	1886	1903	1921	1938	1956	1973	1990	2008	2025	3	6	9	12	15
69	1.2043	2060	2078	2095	2113	2130	2147	2165	2182	2200	3	6	9	12	15
70	1.2217	2235	2252	2270	2287	2305	2322	2339	2357	2374	3	6	9	12	15
71	1.2392	2409	2427	2444	2462	2479	2497	2514	2531	2549	3	6	9	12	15
72	1.2566	2584	2601	2619	2636	2654	2671	2689	2706	2723	3	6	9	12	15
73	1.2741	2758	2776	2793	2811	2828	2846	2863	2881	2898	3	6	9	12	15
74	1.2915	2933	2950	2968	2985	3003	3020	3038	3055	3073	3	6	9	12	15
75	1.3090	3107	3125	3142	3160	3177	3195	3212	3230	3247	3	6	9	12	15
76	1.3265	3282	3299	3317	3334	3352	3369	3387	3404	3422	3	6	9	12	15
77	1.3439	3456	3474	3491	3509	3526	3544	3561	3579	3596	3	6	9	12	15
78	1.3614	3631	3648	3666	3683	3701	3718	3736	3753	3771	3	6	9	12	15
79	1.3788	3806	3823	3840	3858	3875	3893	3910	3928	3945	3	6	9	12	15
80	1.3963	3980	3998	4015	4032	4050	4067	4085	4102	4120	3	6	9	12	15
81	1.4137	4155	4172	4190	4207	4224	4242	4259	4277	4294	3	6	9	12	15
82	1.4312	4329	4347	4364	4382	4399	4416	4434	4451	4469	3	6	9	12	15
83	1.4486	4504	4521	4539	4556	4573	4591	4608	4626	4643	3	6	9	12	15
84	1.4661	4678	4696	4713	4731	4748	4765	4783	4800	4818	3	6	9	12	15
85	1.4835	4853	4870	4888	4905	4923	4940	4957	4975	4992	3	6	9	12	15
86	1.5010	5027	5045	5062	5080	5097	5115	5132	5149	5167	3	6	9	12	15
87	1.5184	5202	5219	5237	5254	5272	5289	5307	5324	5341	3	6	9	12	15
88	1.5359	5376	5394	5411	5429	5446	5464	5481	5499	5516	3	6	9	12	15
89	1.5533	5551	5568	5586	5603	5621	5638	5656	5673	5691	3	6	9	12	15

4. Umrechnung von Bogenmaß in Grad und in trigonometrische Funktione

Bogenmaß	Grad		sin	cos	tg
.01	0°.573	0° 34′	.0099	1.000	.0099
.02	1°.146	1° 9′	.0201	1.000	.0201
.03	1.719	1° 43′	.0300	1.000	.0300
.04	2.292	2° 17′	.0398	.9992	.0399
.05	2.865	2° 52′	.0500	.9987	.0501
.06	3.438	3° 26′	.0599	.9982	.0600
.07	4.011	4° 1′	.0700	.9975	.0702
.08	4.584	4° 35′	.0799	.9968	.0802
.09	5.157	5° 10′	.0901	.9959	.0904
.10	5.730	5° 44′	.0999	.9950	.1004
.12	6.876	6° 53′	.1198	.9928	.1207
.14	8.022	8° 1′	.1395	.9902	.1408
.16	9.168	9° 10′	.1593	.9872	.1614
.18	10.31	10° 19′	.1791	.9838	.1820
.20	11.46	11° 28′	.1988	.9800	.2028
.22	12.61	12° 36′	.2181	.9759	.2235
.24	13.75	13° 45′	.2377	.9713	.2447
.26	14.90	14° 54′	.2571	.9664	.2661
.28	16.04	16° 3′	.2765	.9610	.2877
.30	17.19	17° 11′	.2954	.9554	.3092
.32	18.34	18° 20′	.3145	.9492	.3314
.34	19.48	19° 29′	.3335	.9427	.3538
.36	20.63	20° 38′	.3524	.9359	.3765
.38	21.77	21° 44′	.3703	.9289	.3986
.40	22.92	22° 55′	.3894	.9211	.4228
.42	24.07	24° 4′	.4078	.9131	.4466
.44	25.21	25° 13′	.4260	.9047	.4709
.46	26.36	26° 21′	.4439	.8961	.4953
.48	27.50	27° 30′	.4617	.8870	.5206
.50	28.65	28° 39′	.4795	.8776	.5464
.52	29.80	29° 48′	.4970	.8678	.5727
.54	30.94	30° 57′	.5143	.8576	.5997
.56	32.09	32° 5′	.5312	.8473	.6269
.58	33.23	33° 14′	.5480	.8364	.6552
.60	34.38	34° 23′	.5647	.8253	.6843
.62	35.53	35° 32′	.5812	.8138	.7142
.64	36.67	36° 40′	.5972	.8021	.7445
.66	37.82	37° 49′	.6131	.7900	.7761
.68	38.96	38° 58′	.6289	.7775	.8088
.70	40.11	40° 7′	.6443	.7647	.8426
.72	41.26	41° 15′	.6593	.7518	.8770
.74	42.40	42° 24′	.6743	.7385	.9131
.76	43.55	43° 33′	.6890	.7248	.9506
.78	44.69	44° 42′	.7034	.7108	.9896

Bogenmaß	Grad		sin	cos	tg
.80	45.84	45° 50′	.7173	.6967	1.030
.82	46.99	46° 59′	.7312	.6822	1.072
.84	48.13	48° 8′	.7447	.6674	1.116
.86	49.28	49° 17′	.7579	.6523	1.162
.88	50.42	50° 25′	.7707	.6372	1.210
.90	51.57	51° 34′	.7833	.6216	1.260
.92	52.72	52° 43′	.7956	.6058	1.313
.94	53.86	53° 52′	.8076	.5897	1.370
.96	55.01	55° 0′	.8192	.5736	1.428
.98	56.15	56° 9′	.8305	.5570	1.491
1.00	57.30	57° 18′	.8415	.5402	1.558
1.02	58.45	58° 27′	.8522	.5232	1.629
1.04	59.59	59° 36′	.8625	.5060	1.704
1.06	60.74	60° 44′	.8724	.4889	1.784
1.08	61.88	61° 53′	.8820	.4713	1.872
1.10	63.03	63° 2′	.8913	.4535	1.965
1.12	64.18	64° 11′	.9002	.4355	2.067
1.14	65.32	65° 19′	.9086	.4176	2.176
1.16	66.47	66° 28′	.9168	.3993	2.296
1.18	67.62	67° 37′	.9247	.3808	2.428
1.20	68.76	68° 46′	.9321	.3622	2.574
1.22	69.91	69° 54′	.9391	.3437	2.733
1.24	71.05	71° 3′	.9458	.3247	2.912
1.26	72.20	72° 12′	.9521	.3057	3.115
1.28	73.34	73° 21′	.9581	.2865	3.344
1.30	74.49	74° 29′	.9636	.2675	3.602
1.32	75.64	75° 38′	.9687	.2481	3.904
1.34	76.78	76° 47′	.9735	.2286	4.258
1.36	77.93	77° 56′	.9779	.2090	4.678
1.38	79.07	79° 4′	.9818	.1897	5.177
1.40	80.22	80° 13′	.9855	.1699	5.799
1.42	81.37	81° 22′	.9887	.1501	6.586
1.44	82.51	82° 31′	.9915	.1302	7.613
1.46	83.66	83° 39′	.9939	.1106	8.986
1.48	84.80	84° 48′	.9959	.0906	10.988
1.50	85.95	85° 57′	.9975	.0706	14.124
1.52	87.10	87° 6′	.9987	.0506	19.740
1.54	88.24	88° 14′	.9995	.0308	32.421
1.56	89.39	89° 23′	.9999	.0108	92.908
$\pi/2$	90°				

SACHREGISTER